Вадим Дунаев

# Занимательная математика

## Множества и отношения

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2008

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26
Д83

**Дунаев В. В.**

Д83 Занимательная математика. Множества и отношения. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 336 с.: ил.

ISBN 978-5-94157-988-4

Книга в занимательной форме вводит читателя в мир математики и логики. Она адресована всем, кто любит поразмышлять и интересуется головоломками и парадоксами. Материал первой части изложен в форме диалогов Профессора, Простака и Зануды. На занимательных примерах и задачах читатель приобщается к алгебре логики и элементам теории множеств и постоянно встречается с парадоксальными ситуациями, пытаясь их разрешить. Для всех предлагаемых задач приведены развернутые решения. Во второй части рассказывается о теории отношений и ее применении к таким практическим вещам, как реляционные базы данных и классификационная деятельность.

*Для широкого круга читателей*

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

**Группа подготовки издания:**

| | |
|---|---|
| Главный редактор | *Екатерина Кондукова* |
| Зам. главного редактора | *Игорь Шишигин* |
| Зав. редакцией | *Григорий Добин* |
| Редактор | *Татьяна Темкина* |
| Компьютерная верстка | *Натальи Караваевой* |
| Корректор | *Виктория Пиотровская* |
| Дизайн обложки | *Инны Тачиной* |
| Зав. производством | *Николай Тверских* |

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.09.07.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,09.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-94157-988-4

# Оглавление

**Введение ... 1**
Благодарности ... 6

**ЧАСТЬ I. И В ШУТКУ, И ВСЕРЬЕЗ ... 7**

**Глава 1. Головоломки и задачи ... 9**
1.1. Арифметические задачи ... 9
1.1.1. Треть равна половине? ... 9
1.1.2. Когда родился Иван? ... 11
1.1.3. Необычная арифметика ... 12
1.1.4. Параллельная работа с разными производительностями ... 17
1.2. Геометрическая задача: обустройство дач ... 20
1.3. Алгоритмические задачи ... 22
1.3.1. О песочных часах ... 22
1.3.2. Поиск фальшивой монеты: одна из восьми ... 23
1.3.3. Поиск фальшивой монеты: одна из девяти ... 26
1.3.4. Поиск фальшивой монеты: попытка обобщения ... 27
1.3.5. Обмен валют: постановка задачи ... 29
1.3.6. Поиск кратчайшего пути ... 32
1.4. Логические задачи ... 33
1.4.1. Почему трезвенник был уволен за пьянство? ... 34
1.4.2. Кому достанется киевский престол? ... 35
1.4.3. Почему началась столетняя война? ... 37
1.4.4. Казнить или помиловать? ... 40
1.4.5. Исполнение приговора — сюрприз для осужденного ... 43

**Глава 2. О логике ... 48**
2.1. Высказывания ... 48
2.1.1. Закон противоречия ... 52
2.1.2. Закон исключения третьего ... 54

2.1.3. Совместное использование НЕ, И и ИЛИ ........ 56
2.1.4. Перестановка, группировка и распределение высказываний ........ 59
2.1.5. Логическое следование и эквивалентность ........ 59
2.2. Предикаты, или высказывания с аргументами ........ 70
2.3. Определения ........ 77
2.3.1. Определение человека ........ 79
2.3.2. Доказательство того, что 2 + 2 = 4 ........ 82
2.3.3. Определения сложения и умножения целых чисел ........ 84
2.3.4. Непредикативные определения ........ 85
2.3.5. Аксиоматические определения ........ 90
2.4. О "женской" логике ........ 98

**Глава 3. Немного о множествах ........ 101**

3.1. Что такое множество? ........ 101
3.2. Операции над множествами ........ 109
3.3. Первые парадоксы теории множеств ........ 113
3.4. Бесконечные множества ........ 119
3.4.1. Сравнение бесконечных множеств ........ 121
3.4.2. Множество всех подмножеств данного множества ........ 130
3.4.3. Прямая и плоскость ........ 132
3.5. Парадоксы бесконечности ........ 138
3.5.1. Не оскудеет рука дающего ........ 138
3.5.2. Дорогу осилит идущий ........ 143
3.6. Аксиомы теории множеств ........ 144
3.7. От перечислимости и разрешимости множеств к алгоритмам ........ 150

**ЧАСТЬ II. ШУТКИ В СТОРОНУ ........ 157**

**Глава 4. Отношения ........ 159**

4.1. Что такое отношение? ........ 159
4.2. Как задать отношение? ........ 162

**Глава 5. Бинарные отношения ........ 172**

5.1. Операции над бинарными отношениями ........ 173
5.1.1. Теоретико-множественные операции ........ 173
5.1.2. Обратное отношение ........ 173
5.1.3. Композиция отношений ........ 174
5.2. Отображения как бинарные отношения ........ 175
5.3. Сечения отношения ........ 178
5.3.1. Определения ........ 178

5.3.2. Свойства операций $\Delta\nabla$ и $\nabla\Delta$ ........ 183
5.3.3. Классы и ко-классы ........ 185
5.3.4. Свойства множеств классов и ко-классов ........ 186
5.4. Бинарные отношения на одном множестве ........ 190
5.4.1. Операции над отношениями ........ 190
5.4.2. Свойства отношений ........ 192
5.4.3. Сочетания свойств отношений ........ 197
5.4.4. Сходство, или толерантность ........ 199
5.4.5. Одинаковость, или эквивалентность ........ 212
5.4.6. Порядки ........ 223
5.5. Отображения отношений ........ 240
5.5.1. Гомоморфизм отношений ........ 242
5.5.2. Корреспонденция отношений ........ 245
5.5.2. Изоморфизм и другие морфизмы отношений ........ 247

**Глава 6. От *n*-арных отношений к реляционным базам данных ........ 249**

6.1. Отношения и таблицы ........ 250
6.2. Операции над отношениями ........ 254
6.2.1. Селекция ........ 254
6.2.2. Проекция ........ 256
6.2.3. Естественное соединение ........ 258
6.3. Декомпозиция отношений ........ 261
6.3.1. Корректная декомпозиция ........ 261
6.3.2. Пример некорректной декомпозиции ........ 262
6.3.3. Зависимости между атрибутами ........ 263
6.3.4. Правила вывода зависимостей ........ 271
6.3.5. Ключи ........ 273
6.4. Ограничения целостности отношений ........ 275
6.4.1. Семантическая целостность ........ 276
6.4.2. Доменная целостность ........ 276
6.4.3. Ссылочная целостность ........ 277
6.5. Нормализация таблиц ........ 278
6.5.1. Первая нормальная форма ........ 280
6.5.2. Вторая нормальная форма ........ 281
6.5.3. Третья нормальная форма ........ 281
6.5.4. Доменно-ключевая нормальная форма ........ 282
6.5.5. Денормализация ........ 283

**Глава 7. Классификация ........ 284**

7.1. Что такое классификация? ........ 284
7.2. Аксиомы классификации и основные следствия ........ 289

7.3. Реляционный подход к классификации ........ 293
7.4. Классифицирование ........ 294
7.5. Именование таксонов ........ 297
7.6. Увеличим нашу немощь, чтобы расширить границы господства ........ 301
7.6.1. Определение слабой операции таксонообразования ........ 302
7.6.2. Примеры ........ 303
7.6.3. Особенности классифицирования ........ 306
7.7. Классификация по нечетким отношениям ........ 307
7.7.1. Что такое нечеткие множества? ........ 308
7.7.2. Классы и ко-классы нечетких бинарных отношений ........ 311

**Заключение ........ 313**

**Литература ........ 317**

Общая, знаменитая и популярная ........ 317
Более специальная, но достаточно популярная ........ 317
Очень специальная ........ 318

**Предметный указатель ........ 319**

*Светлой памяти отца, привившего мне любовь к математике,*
*а также сыну, для которого сделать того же я не сумел*

# Введение

> И хотя в подобных случаях трудно дать общие предписания и каждый должен в них следовать указаниям собственного разума, я попытаюсь все же указать путь начинающим.
>
> *И. Ньютон*

Математика увлекательна и занимательна совсем не потому, что некоторые ее разделы могут быть изложены как анекдоты и головоломки, доступные пониманию широкого круга читателей. Она интересна главным образом потому, что в сжатой, но емкой форме выражает способности и особенности нашего мышления и психологии познания окружающего мира. Математики сначала ставят себе простые, с обывательской точки зрения, задачи, а затем показывают, что не все так просто, как кажется. Простые, на первый взгляд, задачи могут вообще не иметь решения, а решение, которое все-таки предлагается, оказывается решением совсем другой задачи. Математика, в отличие от других наук, не устаревает ни в одном из своих многочисленных разделов. Истины, достигнутые много веков назад, остаются истинами и сегодня, не зависимо от достижений техники, естественных и философских наук. Нематематикам математика представляется эталоном стремления к истине, определенности и доказательности логических построений. Вместе с тем, математика поучительна для нас еще и тем, как она применяет аналогии и обобщение. Мы и в повседневной жизни нередко прибегаем к методу рассуждений по аналогии, но в математике он наиболее ясно выражен. Однако в математике аналогия — не аргумент, не прецедент, на который можно сослаться как на основание для последующих умозаключений, а лишь путеводная нить для доказательства истинности или ложности некоторого утверждения. Аналогия для математика — это инструмент и технология его кухни, в которую он не любит пускать посторонних. Решая какую-то задачу, в том числе поставленную насущной практикой, математик заинтересован не столько в получении правильного ответа на нее, сколько в разработке метода решения более общей задачи. Иначе говоря, он стремится к возможно большей абстракции от кучи мелких и чересчур конкретных деталей чисто практической задачи, чтобы увидеть ее настоящую сущность и выработать наиболее универсальный метод решения, который, возможно, пригодится и в многочисленных случаях аналогичных частных задач.

Занимательнее всего в математике, пожалуй, не столько интригующие и увлекательные формулировки задач и неожиданные ответы на них, сколько порой драматический поиск решений, собственно мыслительный процесс. Правильный ответ, конечно, важен, но это не главная цель данной книги.

Эта книга — о математике не для математиков, и написана она не математиком. Она адресована всем, кто любит поразмышлять или порешать задачки и, в первую очередь, тем, кто считает свою направленность к людям гуманитарной, кому чужды точные науки, — психологам, социологам, юристам, журналистам, врачам, биологам и т. п., а также школьникам старших классов, которые еще не выбрали свою будущую стезю. Для чтения этой книги не предполагается сколько-нибудь серьезная математическая подготовка, — знаний в пределах средней школы, даже изрядно подзабытых, вполне достаточно.

Добавлю еще, что эта книга, надеюсь, окажется небесполезной будущим и уже состоявшимся инженерам, а также программистам, как изучавшим прикладную математику в вузах, так и самодеятельным. Программисты, знающие только языки общения с компьютерами, но не понимающие математическую сущность алгоритмов создаваемых ими программ, являются не более чем просто кодировщиками или весьма ограниченными переводчиками, которые переводят слова (если не буквы), но не мысли.

Данная книга посвящена лишь некоторым разделам необъятной математики — множествам и отношениям. Что может быть проще понятия множества? Под множеством мы понимаем практически все, что угодно. Это — многообразие, совокупность различающихся чем-то вещей, но рассматриваемая как некая целостность. Одно дело бесконечно разнообразный в своих деталях мир, другое — его часть или весь этот мир в моем поле зрения, рассматриваемый как нечто целое или относящееся к чему-то одному, подпадающий под некоторую общую идею. Простая в своей сущности идея множества сначала была положена в основу очень специфических задач математики, а затем вдруг оказалось, что ее можно попытаться развить в качестве фундамента математики в целом. Этому способствовал общий кризис математики, долго зреющий, но явно обнаружившийся только в конце XIX века. Тогда лучшие умы мира самоотверженно бросились спасать самую лучшую, с точки зрения определенности, обоснованности и истинности, науку. Они не могли допустить краха веры в непогрешимость математики. Ведь она и создавалась веками как особая наука об истине, как демонстрация могущества человеческого разума. Только во вторую очередь ее рассматривали как собрание методов решения насущных инженерных и перспективных прикладных задач. Драма математики конца XIX — первой половины XX веков увлекательна и поучительна сама по себе. Однако это не драма одной лишь математики, это — кризис чрезмерной самоуверенности человеческого разума и порожденной им науки, это — многими ожидаемая расплата за гордыню. Однако в данной книге мы лишь коснемся данной проблемы, не останавливаясь на нюансах. Эта драма должна нас научить быть более внимательным, а также примириться с мыслью о том, что истина не абсолютна — она относительна. Она где-то рядом, но не лежит на поверхности, доступная и тривиально-очевидная. Ее, истины, в большинстве случаев надо дознаться, потратив на это свои интеллектуальные и эмоциональные ресурсы, т. е. испытав сначала недоумение, раздражение и лишь потом — надежду и восторг. Последнее и будет настоящей наградой за все перипетии пройденного пути к тому, что называют истиной, пониманием, осознанием или, короче, жизнью интеллекта и чувств.

Немного уяснив понятие множества, мы должны ощутить готовность двигаться дальше. А именно: мы должны разобраться в том, что такое отношения между объектами различной природы. При этом нам не важно, находятся ли конкретные индивидуумы в интересующем нас отношении, например, любят ли они друг друга, больше ли один другого или главнее. Для нас важно понять, чем одни отношения отличаются от других вне зависимости от того, как конкретно они определены, между какими объектами и по каким правилам или признакам. Как бы ни было задано конкретное отношение между объектами из одного, двух или более множеств, мы, при более пристальном рассмотрении, можем установить, что это, например, отношение сходства, или эквивалентности, или порядка. А установив тип отношения, будучи вооруженными знаниями о нем, мы сможем чисто логически вывести другие важные следствия о данных конкретных отношениях и увеличить свою мощь в понимании мира, где как будто все взаимосвязано, все со всем находится в отношениях или вступает в определенные отношения.

Исключительно практическая область деятельности, такая как синтез и применение реляционных баз данных, покоится на теории отношений. Можно с уверенностью утверждать, что успех реляционных баз данных объясняется счастливым симбиозом насущных практических потребностей с адекватной теорией, возникшим совсем недавно — в середине XX века. Теперь мы можем изучать реляционные базы данных как инженерно-программистские конструкции, обросшие к настоящему времени множеством деталей и нюансов. А можем взглянуть на это сложное технологическое хозяйство с позиций теории, чтобы абстрагироваться от затемняющих суть дела деталей и преходящих технических усовершенствований. В данной книге мы рассмотрим некоторые из основных проблем реляционных баз данных именно с позиций теории отношений.

В теории множеств любую (или почти любую) совокупность объектов можно рассматривать как некий новый объект, называемый множеством. Этот тезис развязывает нам руки в творении множеств. Однако жизнь показывает, что творчество в данном направлении не вполне произвольно. В зависимости от интересов исследования и практических нужд мы создаем одни множества, а другие — нет. Наиболее ярко синтез множеств проявляется в так называемой классификационной деятельности, когда явно требуется разделить объекты некоторой предметной области на классы (т. е. множества). Почему дети относят китов и дельфинов к рыбам, а мы, взрослые, — нет? Почему даже самые маленькие дети отличают жуков и бабочек от птиц, хотя и те, и другие летают? Почему дети научаются считать быстрее, чем сравнивать количества? Не потому ли, что для счета требуется лишь научиться переходить от одного элемента к другому, называя их разными именами, а для сравнения совокупностей нужна предварительная абстракция от всего, что в них есть индивидуального? И то, и другое — различные проявления единого понятия числа. Это все не просто психология, это — математика. Математика и есть концентрированная психология, только обращенная не к чувственной жизни тела, а к парению духа.

Книга состоит из двух частей. Материал *первой части* (*главы 1*, *2* и *3*) изложен в форме диалогов, которая позволила мне задавать любые, в том числе и глупые вопросы. Глупые вопросы обычно стесняются задавать, но именно в них содержится нечто ("сермяжная правда"), благодаря чему учитель может распознать суть проблемы: то ли дело в недостаточном педагогическом искусстве изложении, то ли в дефектах собственно постановки и методов решения задачи. Для всех предлагаемых задач приведены развернутые решения, но я советую не искать в тексте правильные ответы сразу же, а прежде попробовать "вычислить" их самостоятельно. В *первой части* книги мы начинаем с задач, похожих на головоломки, а затем приобщаемся к алгебре логики и элементам теории множеств. При этом мы постоянно встречаемся с парадоксальными ситуациями, пытаясь их разрешить. Это и есть, на мой взгляд, математическое творчество, разговору о котором посвящена книга. Замышляя персонажи диалога как символы со вполне реальными прототипами, позже я понял, что они — мои собственные ипостаси. Так что это я сам рассказываю своим alter ego то, что им по силам со мной обсуждать. Один из них смел и креативен, другой осмотрителен и аккуратен.

Во *второй части* (*главы 4—7*) рассказывается о теории отношений и ее применении к таким практическим вещам, как реляционные базы данных и классификационная деятельность. Здесь изложение ведется не в форме диалога. Можно сказать, что это лекции. Пусть вас не пугает обилие символики. Она просто позволяет сделать изложение более кратким, а взаимосвязь отдельных положений — более отчетливой. В отличие от первой части, здесь вы найдете меньше увлекательных историй, но больше сведений, хотя для их усвоения потребуется, возможно, больше усилий. Доказательства теорем приведены не столько для вящей убедительности их формулировок, сколько для того, чтобы предоставить возможность поупражняться в обращении с рассматриваемыми объектами. Хотя, должен подчеркнуть, именно изучение доказательств теорем и есть настоящее изучение математики. Результат не так важен, как способ его получения. Впрочем, при первом чтении доказательства можно и пропустить без особого ущерба для понимания последующего материала. Попутно я хотел бы обратить внимание на то, что чем более интуитивно понятен тезис, тем более громоздким выглядит его доказательство. Интуитивно понятные вещи укоренились глубоко в нашем подсознании, а доказательство — попытка вывести их на уровень сознания, где правят логика и речь. Вытащить то, что и так понятно, на уровень сознания — нелегкая задача. По мере изложения материала в этой части темп и видимая сложность нарастают, но если вы неспешно начинали с первых глав, то данное обстоятельство вряд ли будет вам серьезной помехой. Дорогу осилит идущий.

В списке литературы приведены источники, которые я так или иначе использовал. Первые по списку книги я рекомендую тем, кто интересуется математикой и наукой вообще, а последующие упоминаю просто как источники фактов и доказательств, которым в данной, небольшой по объему, книге не нашлось места, либо они слишком сложны для неподготовленного читателя. В этом списке я не указал Мартина Гарднера, замечательного американского популяризатора науки XX века. Ссылки на его великолепные статьи и книги, а также выдержки из них легко найти в Интернете. Я и сам использовал в данной книге некоторые из его замечательных идей.

Между тем, чего хотелось, и тем, что действительно получилось, всегда есть разница. Я буду благодарен всем читателям, оставившим свой отзыв в моей гостевой книге по адресу **http://dunaevv1.narod.ru**.

# Благодарности

Эта книга явилась результатом воспоминаний о плодотворной и интересной совместной научно-исследовательской и преподавательской работе с Олегом Маратовичем Поляковым, Владиславом Станиславовичем Блюмом и Владимиром Владимировичем Фроловым на кафедре, возглавляемой тогда Виктором Ивановичем Белицким, которым я искренне благодарен.

Я очень признателен Татьяне Темкиной за плодотворное обсуждение рукописи и придуманные ею иллюстрации, которые превосходно, на мой взгляд, воплотили в графике Инна Тачина и Наталья Караваева.

Особую благодарность я выражаю своей жене Валентине за поддержку во время работы над этой книгой.

# ЧАСТЬ I

# И В ШУТКУ, И ВСЕРЬЕЗ


Уважаемые Простак и Зануда, идя навстречу вашим неоднократным просьбам, я наконец-то нашел время и силы, чтобы встретиться с вами для беседы о математике. Прежде чем начать говорить по существу, я предлагаю рассмотреть несколько задач, которые следует отнести скорее к головоломкам, чем к классу математических задач, хотя их связь с математикой лежит на поверхности рассуждений и не требует особой проницательности, чтобы увериться в этом. Моя задача сейчас состоит в том, чтобы настроить вас на некоторую информационную волну, необходимую вам для облегчения последующего активного восприятия предлагаемого мной материала. Мой монолог вы можете в любое время прервать, чтобы задать вопрос или высказать собственное мнение по обсуждаемой теме. В результате возникшего диалога мы, быть может, скорее достигнем цели — понимания не только постановки и метода решения конкретной задачи, но и самого духа математики.

# Глава 1

# Головоломки и задачи

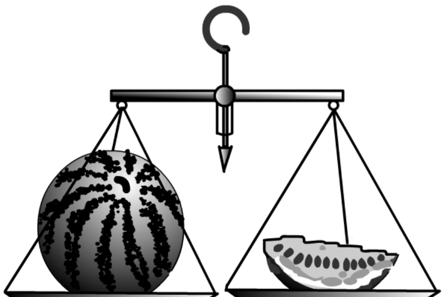
> Знание только тогда знание, когда оно приобретено усилиями мысли, а не памятью.
>
> *Л. Толстой*

## 1.1. Арифметические задачи

### 1.1.1. Треть равна половине?

Профессор. Рассмотрим следующую задачу: каковы числа, треть от которых равна половине?

Простак. Я вижу, что это — математическая задача, ответ на которую не очевиден. Сначала, признаюсь, я подумал, что это ноль, но это было бы слишком просто, чтобы походить на истину. Вы же, Профессор, недаром задали нам эту головоломку. Если для решения задачи потребуется составить какое-нибудь уравнение, то я готов увидеть его на бумаге, но сам не хотел бы тратить время на его выписывание. Я согласен, что здесь есть загвоздка, но меня больше интересует правильный ответ, чем возня с его поиском. Просто я многое забыл из школьной математики и сразу мне не вспомнить. Все же непонятно: как может быть, чтобы меньшая часть была равна большей части? Сдается мне, *что эта задача вообще не имеет решения*.



Зануда. Оставим эмоции. Следуя духу математики, надо попытаться составить уравнение. Обозначим искомое число через $x$. Тогда уравнение, соответствующее формулировке задачи, будет иметь следующий вид:

$$x/2 = x/3.$$

Очевидно, если в это уравнение вместо $x$ подставить 0, то получим тождество $0 = 0$ и, следовательно, искомое число равно нулю, о чем и догадывался Простак. Я же не остановился на догадках, а просто вычислил решение, используя математический метод.

Профессор. Действительно, число ноль обладает тем свойством, что любая его часть всегда равна любой его части. Зная это, можно было и не составлять никаких уравнений, чтобы найти решение. Но может быть существуют и другие числа, отличные от нуля, соответствующие решению поставленной задачи?

Зануда. Из моего уравнения таких чисел найти нельзя. Похоже, что их и не существует.

Простак. В твоем уравнении, Зануда, можно сократить левую и правую части на $x$, получив неверное тождество $1/3 = 1/2$. Так что твой результат $x = 0$ был обнаружен только благодаря тому, что ты начал с подстановок чисел в свое уравнение вместо $x$, а не попытался прежде упростить само уравнение, как обычно это все делают. Иначе говоря, тебе просто повезло. Тем не менее, мы до сих пор не знаем, существуют ли отличные от нуля числа, треть от которых равна половине.

Зануда. Сокращать на $x$ можно только в том случае, если $x$ не равен 0. Напомню Простаку, что на ноль делить нельзя, поскольку результат деления не определен. Допустим, $x$ не равен 0. Тогда после сокращения на $x$ мое уравнение примет вид $1/3 = 1/2$, что, очевидно, неверно. Отсюда заключаем, что верно обратное, а именно, что $x = 0$. Более того, мы ясно видим, что других вариантов нет. Только ноль удовлетворяет условиям поставленной задачи и является единственным ее решением! Таким образом, я полностью решил вашу задачу, уважаемый Профессор.

Профессор. Я с интересом следил за вашими рассуждениями. Особенно мне понравилось последнее замечание Зануды. Вместе с тем, должен объявить вам, что вы решили не ту задачу, которую я сформулировал. Моя задача решается с помощью уравнения

$$x/3 = 1/2,$$

откуда очевидно следует единственное его решение $x = 3/2$.

Предупреждая ваши возможные недоумения, сразу скажу, что слово "половина" обозначает число 1/2 (т. е. 0,5). Обратите внимание, в задаче не говорилось о половине *чего-то*. Таким образом, требовалось найти числа, треть которых равна просто числу 1/2. Вы же решали задачу не в моей, а в следующей формулировке: каковы числа, треть от которых равна *их* половине? Впредь будьте внимательны при чтении формулировок задач. Естественный язык, на котором мы говорим, позволяет красочно, объемно и лаконично выражать мысли. Вопрос в том, насколько точно та или иная мысль выражена, и однозначно ли она понимается. Недаром говорится, что "мысль изреченная есть ложь". Рассмотренная нами задача относится к головоломкам не потому, что ее трудно решить, а потому, что ее формулировка предполагает некоторую неоднозначность интерпретации. Многие головоломки и почти все анекдоты строятся в расчете на то, что "исходные данные" будут неверно проинтерпретированы из-за невнимательности. Вспомните детскую загадку: А и Б сидели на трубе, А упало, Б пропало, что осталось на трубе? Большинство из нас легко обнаружило, что здесь речь идет о двух объектах, А и Б, а буква "и" является элементом синтаксиса предложения (союзом). Однако допустима и другая интерпретация: "и" обозначает некоторый объект, подобно буквам "А" и "Б".

## 1.1.2. Когда родился Иван?

П р о ф е с с о р. В 1975 году некто по имени Иван сказал, что ему было $n$ лет в $n^2$ году. В каком году он родился?

П р о с т а к. Составим уравнение:

$$x + n = n^2,$$

где $x$ — искомый год, в котором родился Иван.

В одном уравнении два неизвестных. Это плохо, но обнадеживает то, что величины $n$ и $x$ ограничены:

$$0 < n < 150;$$

$$x + n \leq 1975.$$

З а н у д а. Я бы ограничил $n$ еще больше, например, так: $0 < n < 120$, хотя навряд ли Ивану могло быть 120 лет. Впрочем, есть же долгожители и постарше. А теперь надо, начиная примерно с года $x = 1855$, перебрать различные сочетания $x$ и $n$, пока не получится равенство $x + n = n^2$.

П р о с т а к. Можно обойтись без перебора, пусть и ограниченного, но все же очень большого количества вариантов. Обратите внимание, что $n^2$ должно быть не больше 1975 и не слишком далеко от этого значения.

Из того, что $n^2 \leq 1975$, следует $n \leq \sqrt{1975} \approx 44{,}4$. Возьмем ближайшее меньшее целое число $n = 44$. Тогда $n^2 = 1936$ и $x = n^2 - n = 1936 - 44 = 1892$. Итак, Иван родился в 1892 году.

З а н у д а. А может быть, есть и другие подходящие значения $x$ и $n$?

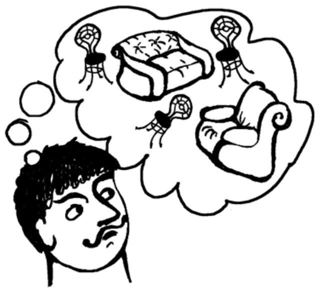
П р о с т а к. Проверим еще одно, следующее, значение $n = 43$. Для него получается $n^2 = 1849$ и $x = 1849 - 43 = 1805$. Но тогда в 1975 году Ивану было бы 170 лет. Кажется, в XX веке таких долгожителей не было, поэтому данный вариант следует отбросить.

Если мы возьмем для пробы $n = 42$, то попадем в XVIII век, поскольку $n^2 = 1754$. Итак, ясно, что условиям нашей задачи отвечает только один вариант.

П р о ф е с с о р. Замечательно. Вот видите, вы обошлись без перебора большого количества вариантов, стоило только немного поразмышлять.

## 1.1.3. Необычная арифметика

П р о ф е с с о р. Мы все еще со школы знаем основные арифметические операции, такие как сложение, вычитание, умножение и деление чисел. Как и сами числа, эти операции возникли из опыта. Несколько предметов можно считать неразличимыми с некоторой точки зрения и тогда можно подсчитать их общее количество. Например, столы, стулья, диваны и другие предметы обстановки образуют совокупность, называемую одним словом "мебель". Хотя эти предметы могут заметно отличаться друг от друга, мы пренебрегаем этими различиями, подсчитывая их общее количество. Если, скажем, у вас уже есть 2 яблока, а я даю вам еще одно, то вы без особых затруднений сможете вычислить, что теперь у вас стало 3 яблока. При этом вы не обращаете внимания на различия сортов и размеров яблок. Вы просто сопоставляете совокупности различных предметов число — их общее количество.



Объединяя две совокупности, мы применяем операцию сложения чисел, чтобы определить количество предметов в объединении. Выделяя из данной совокупности часть предметов, мы применяем операцию вычитания. Я хочу сказать, что таким действиям над предметами, как образование из них совокупностей, последующее слияние или разъединение этих совокупностей, соответствуют арифметические операции над числами, и наоборот. Но всегда ли это верно? Так, например: смешав 1 литр воды с 1 литром спирта, мы получим не 2, а 1,8 литра спиртового раствора; смешав два равных объема воды — один при температуре 40°, а другой при температуре 60° по шкале Цельсия, — мы не получим удвоенного объема при температуре 100°; соединив в электрической цепи параллельно два резистора с сопротивлениями R1 и R2, получим общее сопротивление R1R2 / (R1 + R2), а не R1 + R2. Итак, мы видим, что операции прибавления (соединения), выполняемой над предметами, не всегда соответствует арифметическая операция сложения соответствующих чисел.

П р о с т а к. Очевидно, что арифметические операции нельзя применять к практическим задачам столь прямолинейно. Интерпретация, например, сложения как смешение жидкостей слишком груба, а потому и не приводит к правильным результатам.

П р о ф е с с о р. Очень справедливое замечание! Однако давайте рассмотрим следующую задачу.

Продавец ведет учет эффективности своей торговли, вычисляя отношение количества посетителей магазина, сделавших покупки, к их общему количеству. Например, если за день из пяти посетителей только трое что-то купили, то эффективность торговли в этот день оценивается величиной 3/5. Такое отношение продавец вычисляет каждый день и желает оценить эффективность своей работы сразу за несколько дней. Допустим, в первый день эффективность равна 3/5, а во второй — 7/9. Какова суммарная эффективность торговли за два дня?

П р о с т а к. Надо просто сложить дневные эффективности:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{9}=\frac{3\times 9+7\times 5}{5\times 9}=\frac{62}{45}.$$

З а н у д а. Получается, что за два дня магазин посетили 45 человек, из которых 62 сделали покупки. Какая-то несуразность!

П р о с т а к. Я и сам вижу, что это абсурд, и готов исправиться: *суммарная эффективность — это среднее значение дневных эффективностей*, а не просто их сумма. Если требуется найти среднее значение нескольких величин, то их следует сначала сложить, а полученную сумму разделить на количество этих величин. Поэтому средняя эффективность равна

$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{9}}{2}=\frac{31}{45}\approx 0,6889.$$

Зануда. Я все равно не согласен с Простаком. За два дня магазин посетили 5 + 9 = 14 покупателей и только 3 + 7 = 10 из них что-то купили. Следовательно, средняя эффективность торговли за два дня равна совсем другой величине:

$$\frac{3+7}{5+9} = \frac{10}{14} \approx 0,7143.$$

Иначе говоря, средняя или суммарная эффективность вычисляется не путем сложения дробей, а как дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель — сумме знаменателей этих частных дробей.

Профессор. Итак, обычная арифметическая сумма двух дробей определяется по формуле:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1}{b_1 \times b_2}.$$

А Зануда придумал новую операцию сложения двух дробей, которую мы обозначим как $\oplus$, чтобы отличить ее от обычной операции $+$ сложения чисел:

$$\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}.$$

Простак. Хотя метод, предложенный Занудой, и кажется обоснованным, я все же не вижу причин отказываться от своего способа. Но наши способы дают различные результаты. Так какой же из двух методов правильный?

Профессор. В поисках ответа на этот вопрос давайте рассмотрим еще одну задачу, очень похожую на задачу об эффективности торговли.

Допустим, автомобиль первую сотню километров проехал за 2 часа, а вторую сотню — за 8 часов. С какой средней скоростью автомобиль проехал всю дистанцию длиной 200 км?

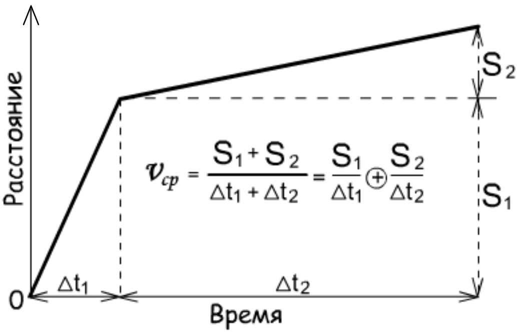
Очевидно, что автомобиль ехал неравномерно: на различных участках пути он имел различные скорости. Нас интересует *средняя скорость, которая есть скорость равномерного движения, при которой автомобиль проедет то же расстояние и за то же время, что и при неравномерном движении*. Тогда в рассматриваемом случае средняя скорость автомобиля равна 20 км/ч. Действительно, с этой скоростью он за 10 часов пройдет весь путь длиной 200 км.

Если бы мы взяли среднее арифметическое скоростей на двух участках, то получили бы неверное значение:

$$\frac{\frac{100}{2} + \frac{100}{8}}{2} = 31,25.$$

С такой скоростью за 10 часов автомобиль прошел бы не 200, а 312,5 км. Правильное значение 20 км/ч средней скорости получается с помощью операции

$$\frac{100}{2} \oplus \frac{100}{8} = \frac{100+100}{2+8} = 20.$$




Теперь рассмотрим более общий случай неравномерного движения. Пусть участки пути $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ автомобиль проходит за время $\Delta t_1$, $\Delta t_2$, ..., $\Delta t_n$ соответственно. Очевидно, скорость на $i$-м участке равна $S_i / \Delta t_i$. Определим *среднюю скорость на всем пути как взвешенную сумму всех скоростей на отдельных участках*. Это означает, что суммируемые величины скоростей должны быть предварительно умножены на так называемый весовой коэффициент, равный доле общего времени, в течение которого автомобиль двигался с данной скоростью. Временна́я доля $i$-го участка составляет величину $\Delta t_i / T$, где $T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n$ — общее время в пути. Таким образом, чем меньше по времени автомобиль двигался с данной скоростью, тем меньше вес этой скорости в сумме всех скоростей на отдельных участках, и наоборот. Очевидно, что каждый весовой коэффициент принимает значения в интервале от 0 до 1, а сумма всех таких коэффициентов равна 1.

Итак, взвешенная сумма всех скоростей на отдельных участках равна

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} \times \frac{\Delta t_1}{T} + \frac{S_2}{\Delta t_2} \times \frac{\Delta t_2}{T} + ... + \frac{S_n}{\Delta t_n} \times \frac{\Delta t_n}{T} =$$

$$= \frac{S_1 + S_2 + ... S_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n} = \frac{S_1}{\Delta t_1} \oplus \frac{S_2}{\Delta t_2} \oplus ... \oplus \frac{S_n}{\Delta t_n}.$$

Таким образом, мы приходим к применению операции $\oplus$ и при более сложном определении средней скорости, которое в конце концов сводится к исходному: средняя скорость равна отношению расстояния к общему времени, затраченному на его прохождение. С другой стороны, это — среднее расстояние, проходимое в единицу времени, или, как еще говорят, среднее расстояние в расчете на единицу времени.

Теперь, полагаю, вам нетрудно будет определить и среднюю эффективность торговли.

Простак. Средняя эффективность торговли аналогична средней скорости движения в пространстве. Ее можно понимать как среднее количество покупателей в расчете на одного посетителя магазина. Тогда правильной будет формула, предложенная Занудой:

$$\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2}{b_2} \oplus \ldots \oplus \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Профессор. Я согласен с Вами, Простак.

Зануда. Если я правильно понял, для решения задач о средней эффективности и скорости, а может быть и каких-то других, мы используем новую операцию $\oplus$ сложения чисел, а значит, и новую арифметику.

Профессор. Операция сложения $\oplus$ существенно отличается от обычной операции сложения чисел. Прежде всего, операция $\oplus$ была определена для дробей. Разумеется, любое целое число $a$ можно представить в виде дроби $a/1$. В обычной арифметике выполняется равенство $a + b = a/1 + b/1$, а в новой оно нарушается: $a/1 \oplus b/1 = (a + b)/2$. Таким образом, операция $\oplus$, применяемая к двум целым числам, дает в результате их среднее арифметическое.

В обычной арифметике дроби можно сокращать, т. е. делить числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля; при этом результат будет тем же самым числом. Заметим, что дробь в виде отношения $a/b$ еще интерпретируют как отложенное деление числа $a$ на число $b$. Например, дроби 2/3 и 4/6 выражают одно и то же число, которое в десятичной записи имеет вид 0,666… . В обычной арифметике число (2/3 + 1/4) равно числу (4/6 + 1/4), а в новой арифметике ($2/3 \oplus 1/4$) и ($4/6 \oplus 1/4$) — различные числа.

Таким образом, новая арифметика более специфична и более сложна, чем обычная. Тем не менее, вводя операции, отличные от обычных, мы можем прийти к арифметике, применимой к реальным явлениям. Производимые над числами операции выбираются так, чтобы они соответствовали некоторому интересующему нас классу явлений физического мира. Только опыт может подсказать нам, в каких случаях обычная арифметика применима к тому или иному явлению. Следовательно, мы не можем рассматривать арифметику как свод истин, применимых для описания любых физических явлений. Это заключение относится и к любым новым арифметикам. На эти вопросы в XIX веке обратил внимание выдающийся немецкий естествоиспытатель и математик Г. Гельмгольц.

## 1.1.4. Параллельная работа с разными производительностями

Профессор. Рассмотрим еще одну задачу, в которой общую работу делают несколько человек, но у каждого своя производительность, или скорость. Допустим, одна секретарша перепечатывает рукопись за 2 часа, а другая — за 3. Весь объем работы можно как-то поделить между секретаршами. Тогда за какое время они перепечатают всю рукопись, если будут работать вместе?

Простак. Я думаю, что им понадобится больше трех часов.

Зануда. Как же так? Одна из них помогает другой, следовательно, время совместной работы будет меньше наименьшего из двух данных времен.

Простак. Дело в том, что секретарши наверняка будут болтать друг с другом, из-за чего их производительность и снизится почти до нуля.

Шучу, конечно. Вопрос, я думаю, в том, чтобы правильно разделить между секретаршами объем работы. Очевидно, делить пополам не стоит, т. к. более производительная секретарша закончит свою часть работы раньше и будет "простаивать". Следовательно, если ей дать объем работы побольше, то удастся сократить общее время перепечатки всей рукописи. Так что более производительной секретарше надо дать бóльшую часть рукописи. Если обозначить объем работы (например, количество листов рукописи) для более производительной секретарши через $x_1$, а для менее производительной — через $x_2$, то отношение этих величин должно быть обратно пропорционально значениям времени, затрачиваемого ими на работу:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}.$$

Зануда. Хотя гипотеза о том, что должна выполняться данная пропорция, и разумна, она все же остается гипотезой, причем недостаточно обоснованной. А мне бы не хотелось начинать с каких-то, пусть даже правдоподобных, предположений.

Что мы имеем в качестве исходных данных? А то, что некий объем работы (обозначим его через $x$) первая секретарша выполняет со скоростью $x/t_1$, а вторая — со скоростью $x/t_2$, где $t_1 = 2$, а $t_2 = 3$.

Пусть первой секретарше поручили выполнить объем работы $x_1$, а второй — $x_2$. Чтобы найти время, затрачиваемое на выполнение работы, надо объем этой работы разделить на скорость (производительность). Далее, когда совместная работа двух секретарш завершится, обе они затратят на это одинаковое время. Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\frac{x_1}{x/t_1} = \frac{x_2}{x/t_2}.$$

Простак. Нетрудно заметить, что полученное Занудой равенство легко приводится к моему, сформулированному как гипотеза. Так что я был прав!

Зануда. Пусть так. Но теперь это равенство вполне обоснованно. Кроме того, оно содержит нужную мне переменную $x$, которая обозначает теперь весь объем работы.

Простак. Однако ее можно сократить.

Зануда. Можно, но не нужно. Дело в том, что я введу еще одно очевидное равенство:

$$x_1 + x_2 = x.$$

Простак. Теперь у нас два равенства, но три неизвестных: $x_1$, $x_2$ и $x$. Ничего хорошего в этом я не вижу.

Зануда. Позвольте мне продолжить. Итак, у нас есть следующие два равенства, легко получаемые из приведенных ранее с помощью элементарных преобразований:

$$\frac{x_1 t_1}{x} = \frac{x_2 t_2}{x};$$

$$\frac{x_1}{x} + \frac{x_2}{x} = 1.$$

Но что нам требуется найти по условию задачи? А лишь значение левой или правой части первого из равенств, поскольку они выражают время, затраченное на совместную работу. Напомню, что обе секретарши, работая вместе, затрачивают на работу одинаковое время. Так что из двух уравнений требуется сначала найти, например, $x_1/x$, а затем умножить это значение на $t_1$.

В результате этих манипуляций получим время, за которое будет напечатана рукопись параллельно работающими секретаршами:

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1{,}2.$$

Профессор. Что ж, решение верно, хотя и путь к нему не был коротким. Попробуем сократить его, используя другую модель ситуации.

Представьте себе, что секретарши печатают рукописи, так сказать, в противоположных направлениях. Одна из них начинает с первой страницы, а другая — с последней. Если они печатают на компьютере, то такое вполне осуществимо. Разумеется, производительности секретарш не одинаковы, работа в различных направлениях идет с разной скоростью. Но с какой скоростью продвигается работа в целом?

Простак. Я, кажется, понял, что надо делать! Пусть $x$ — общий объем работы (все расстояние, которое требуется пройти). Секретарши работают со скоростями $x/t_1$ и $x/t_2$. С точки зрения первой секретарши, работа идет с суммарной скоростью $x/t_1 + x/t_2$. С такой же скоростью продвигается работа и с точки зрения второй секретарши. Именно с суммарной скоростью растет пачка уже напечатанных страниц, а это и есть скорость совместной работы. В какой-то момент все страницы будут напечатаны. Это произойдет спустя время $t_0$ после начала совместной работы. Скорость совместной работы двух секретарш есть $x/t_0$.

Составим уравнение

$$\frac{x}{t_0} = \frac{x}{t_1} + \frac{x}{t_2},$$

откуда, сокращая попутно левую и правую части на $x$, получаем время совместной работы

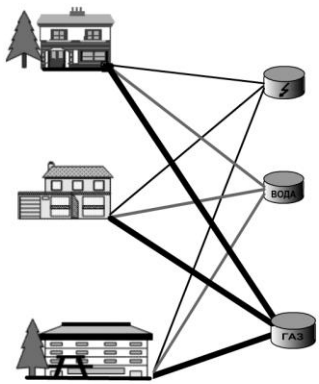
$$t_0 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Профессор. Вот видите, немного изменили взгляд на задачу, выбрали другую модель — и решение оказалось более простым!

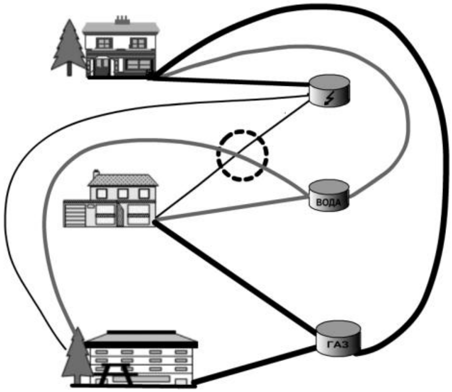
# 1.2. Геометрическая задача: обустройство дач

П р о ф е с с о р. Теперь рассмотрим задачу, связанную с геометрией. Пусть в дачном поселке слева от дороги находятся три дома, а справа — три колодца с коллекторами (водопроводным, электрическим и газовым). Требуется каждый дом соединить с каждым коллектором, но так, чтобы траншеи с линиями соединений из соображений безопасности не пересекались. Как это сделать?

П р о с т а к. Придется повозиться с чертежами. Похоже, соединительные линии не могут быть прямыми, поскольку при первом рассмотрении прямые линии пересекаются. Если же линии сделать извилистыми, то для всех линий, кроме двух, задачу решить легко, применяя обводки. Но вот развести эти оставшиеся две линии не получается. Мне кажется, что эту задачу вообще нельзя решить.




П р о ф е с с о р. Некоторые задачи могут не иметь решения, но в таких случаях это необходимо доказать. Иначе вы можете только утверждать, что вам пока не удалось найти решения из-за недостатка времени, знаний, ума или еще чего-нибудь.




З а н у д а. Да, я слышал, что графы (множество точек, соединенных линиями) могут иметь или не иметь так называемое свойство планарности. У планарного графа, расположенного в одной плоскости, соединительные линии не пересекаются. Планарные графы применяются при разработке печатных плат для электронных устройств. Действительно, нельзя допустить, чтобы неизолированные проводники электрического тока пересекались. Так что надо доказать возможность построения соответствующего нашей задаче графа, обладающего свойством планарности. Или, наоборот, доказать, что такой граф не возможен. Однако для этого требуются специальные знания, которых у нас нет. Разумеется, я бы мог разыскать подходящий учебник, но там наверняка много комбинаторики, чего я не люблю. Как бы то ни было, данная задача мало похожа на головоломку. Для ее решения больше нужны конкретные знания, чем смекалка и здравый смысл, которых обычно вполне достаточно для разрешения головоломок.

Профессор. Прекрасно, что вы оба решили сначала создать математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. Сам собой напрашивается подход: надо заменить дома точками одного сорта, а коллекторы — точками другого сорта. Тогда, как будто, задача сводится к поиску требуемых соединений разносортных точек. Первые эксперименты привели Простака к неудаче. Но, может, он просто провел мало экспериментов? А может быть решения просто не существует, что, однако, нельзя доказать сколь угодно длительными неудачными экспериментами. Недостаток ваших специальных знаний из теории графов я компенсирую тем, что подскажу: для принятой модели планарный граф не существует. Но что из этого следует?

Простак. Ваш вопрос, Профессор, по меньшей мере странен. Вы же только что сами на него ответили: задача не имеет решения.

Зануда. Как-то не верится, что с виду незамысловатая инженерная задача, наверняка уже встречавшаяся проектировщикам дачных поселков, неразрешима. Что же получается, мы должны отказать заказчику в выполнении проекта?

Профессор. Не спешите с окончательным ответом. Что мы установили? Только то, что задача неразрешима в рамках принятой модели. Интуиция подсказывает нам, что исходная практическая задача должна иметь решение — ведь разнородные коммуникации как-то разводят, причем даже в более сложных случаях. Например, часто требуется добавить еще телефонные и телевизионные кабели, а также выделенные линии связи с Интернетом, не говоря уже о канализации.

Простак. Я кажется понял, в чем дело. Надо прокладывать линии на разных уровнях по глубине или высоте. Странно, что я раньше об этом не догадался.

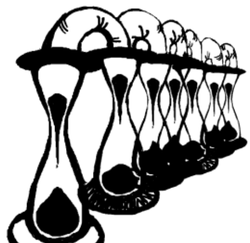
Зануда. Но это уже не математическая задача.

П р о ф е с с о р. Уважаемый Простак сразу же решил задачу практически, но, надо признать, после некоторых околоматематических мытарств. А Вы, уважаемый Зануда, как будто потеряли интерес к задаче, едва почувствовав, что ее решение находится вне математики. Давайте еще раз зафиксируем то, что мы получили в попытках решить задачу с помощью математики. Мы приняли некоторую математическую модель и убедились, что в ее рамках задача неразрешима. А какова наша модель? Кроме условного изображения домов точками одного сорта, коллекторов — точками другого, а траншей между ними — линиями, мы еще неявно предположили, что результат решения должен располагаться в одной плоскости. Если вполне естественно допустить, что дома и коллекторы находятся в одной плоскости, то разве в условии задачи требовалось, чтобы траншеи проходили в этой же плоскости? Как и в случае первой задачи о числах, вы невнимательно отнеслись к формулировке условия. Если бы явно требовалась планарность графа соединений домов с коллекторами, то ваша модель была бы вполне подходящей к данной практической задаче, и ее решение выглядело бы несколько необычно для обычных людей: решение не существует. В подобных случаях, как правило, заказчика просят как-то изменить условия задачи, чтобы она была, по крайней мере, разрешима. Теперь, я надеюсь, вы согласитесь, что рассмотренная задача все же относится к головоломкам, поскольку требует для своего решения только внимания и немного смекалки.

# 1.3. Алгоритмические задачи

## 1.3.1. О песочных часах

П р о ф е с с о р. Предположим, у нас есть двое песочных часов, позволяющих отмерить соответственно 7 и 11 минут. Возможно ли с их помощью отмерить временной интервал в 15 минут? Если да, то как?



П р о с т а к. К сожалению, мы не можем отмерить с помощью одних часов половину или какую-нибудь другую часть того интервала, на который они рассчитаны. Поэтому мы можем отмерить только 7, 11 и 7 + 11 = 18 минут.

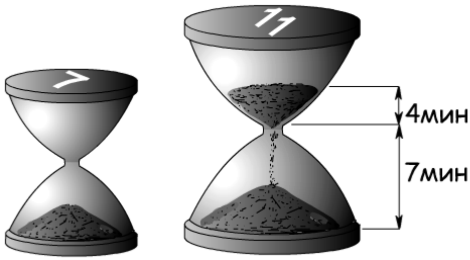
З а н у д а. Не только. Кроме того, мы можем отмерить еще и интервал, равный 11 – 7 = 4 минутам. Для этого достаточно запустить двое часов одновременно, и как только весь песок в 7-минутных часах высыпется, в 11-минутных его еще останется на 4 минуты. В этот момент вы можете положить часы набок, чтобы прекратить утечку песка, а затем, когда понадобится, снова поставить их в вертикальное положение. При этом остаток песка на 4 минуты, разумеется, должен находиться в верхней полуколбе часов.

Простак. Но этот 4-минутный остаток песка находится в 11-минутных часах. Следовательно, мы не сможем сначала отмерить 11 минут и вслед за этим еще 4 минуты, чтобы в сумме получилось 15.

Зануда. Значит необходимо "перенести" этот 4-минутный остаток в 7-минутные часы.

Простак. А как это сделать?

Зануда. Просто запустить 7-минутные часы заново, когда в 11-минутных часах в верхней колбе останется песка на 4 минуты. Как только весь песок в 11-минутных часах окажется в нижней полуколбе, в 7-минутных часах внизу будет песка ровно на 4 минуты. Можете положить эти часы набок, чтобы сохранить их состояние до нужного момента. Теперь все готово к тому, чтобы отмерить 15 минут. Для этого следует сначала запустить 11-минутные часы, а после, когда весь их песок окажется внизу, привести в действие 7-минутные часы с остатком песка в верхней полуколбе на 4 минуты. Вот и все!




Профессор. Отлично! Теперь я знаю, что вам не составит особого труда отмерить 10 минут. Попробуйте на досуге разработать соответствующий алгоритм.

## 1.3.2. Поиск фальшивой монеты: одна из восьми

Профессор. Пусть среди восьми с виду одинаковых монет находится одна фальшивая, которая легче настоящих. Как выявить фальшивую монету, используя рычажные весы не более двух раз?

Простак. Очевидно, что взвешивая пару монет (на каждой чаше весов по одной монете), мы можем ограничиться всего лишь одним взвешиванием, но только если нам повезет: фальшивая монета окажется в выбранной для взвешивания паре. В худшем случае нам потребуется четыре взвешивания. Я где-то слышал о решении похожей задачи, которая, кажется, называется "поиск льва в пустыне". Там вся пустыня разбивалась на две одинаковых области и по рыку льва определялось, в какой из областей он находится. Эта область, откуда разносился рык, делилась пополам и снова определялась подобласть, где обретается лев. Данная процедура продолжалась до тех пор, пока область разбиения не оказывалась настолько малой, чтобы мы могли с уверенностью сказать: "Вот лев." Не кажется ли вам, что между поисками льва и фальшивой монетой есть аналогия?

Зануда. Если воспользоваться аналогией Простака, то требуется разбить множество из восьми монет на два подмножества из четырех монет и сравнить их веса. Выбрать самое легкое подмножество (именно там находится фальшивая монета) и разбить его пополам, чтобы затем сравнить эти половины на весах. Аналогичным образом следует поступать до тех пор, пока на чашах весов не окажется по одной монете. На этом последнем этапе взвешивание и выявит фальшивую, более легкую, монету. Нетрудно подсчитать, что данная стратегия потребует трех взвешиваний, а не двух, как указано в задаче. Так что либо "поиск льва в пустыне" — плохой метод, либо поставленная задача неразрешима.

Простак. Я вспомнил о методе поиска льва потому, что он был самым быстрым. Поэтому я склонен считать, что либо двумя взвешиваниями нельзя определить одну фальшивую монету из восьми, либо аналогия между задачами о льве и взвешиваниях недостаточно полна, чтобы лучший метод для первой задачи оказался лучшим и для второй.

Профессор. Я вижу, что рассмотрение предыдущих задач не прошло для вас даром.

Зануда. Я не могу отказаться от использования, хотя бы частичного, аналогии с задачей о льве. Может быть, попробовать делить множество монет не на два, а на большее количество подмножеств? Что будет, если разбить множество монет на три подмножества?

Простак. Конечно, можно попробовать. Но сравнивать по весу мы можем только два подмножества. Более того, сравнивать надо только подмножества, содержащие одинаковое количество монет. При этом сравниваемые множества могут оказаться и равными по весу, в отличие от случая деления пополам. Наконец, разбить множество из восьми монет на три подмножества можно несколькими способами. Какой из них выбрать?