

**Задачи
Санкт-Петербургской
олимпиады школьников
по математике**



Задачи
Санкт-Петербургской
олимпиады школьников
по математике
2015 года

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 51-8
ББК 22.10
315

Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике
2015 года

Составители К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Ф. В. Петров, А. И. Храбров
Электронное издание

М.: МЦНМО, 2016

128 с.

ISBN 978-5-4439-3001-5

Книга предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. Читатель найдет в ней задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года, а также открытой олимпиады ФМЛ № 239, которая, не будучи туром Санкт-Петербургской олимпиады, по характеру задач, составу участников и месту проведения является прекрасным дополнением к ней.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

В качестве дополнительного материала приводится отчет об олимпиаде «Туймаада-2014», статья о восстановлении многочленов по их значениям в нескольких точках и эссе о сюжетах задач Петербургской олимпиады по математике.

Подготовлено на основе книги: Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года / Сост. К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Ф. В. Петров, А. И. Храбров. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1001-7.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

© С. Л. Берлов, К. П. Кохась,
Ф. В. Петров, А. И. Храбров, 2016.

© МЦНМО, 2016.

ISBN 978-5-4439-3001-5

В 2014/15 учебном году в Санкт-Петербурге проводилась 81-я городская олимпиада школьников по математике. Первый тур проходил 6 декабря 2014 г., в нем приняли участие около 10 тысяч школьников Санкт-Петербурга. Победители первого тура, а также победители городской олимпиады 2014 года были приглашены на второй тур. Для 6–8 классов второй тур олимпиады проходил 8 февраля 2015 г. на математическом факультете Российского государственного педагогического университета, для 9–11 классов — 1 марта 2015 г. на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Продолжительность первого тура — 3 часа, второго тура (во всех классах, кроме 6-го) — 3 часа плюс еще час для участников, которые решили не менее трех задач из первых четырех задач варианта. В 6-м классе — 2,5 и 3,5 часа соответственно.

В составлении вариантов олимпиады участвовали:

- 6 класс: К. П. Кохась;
- 7 класс: А. А. Солянин, К. А. Сухов;
- 8 класс: А. С. Голованов, А. С. Чухнов;
- 9 класс: Д. В. Карпов, А. В. Пастор;
- 10 класс: Ф. В. Петров, А. С. Смирнов;
- 11 класс: С. Л. Берлов, Д. А. Ростовский, А. И. Храбров.

Много сил в организацию олимпиады вложили Л. А. Жигулёв, М. Н. Воронина. Проведение олимпиады было бы невозможно без помощи многочисленных энтузиастов — студентов, учителей и преподавателей вузов. Составители благодарны Ю. Ахметшину за тщательное прочтение рукописи. Задачи олимпиады и текущую информацию можно найти на нашей интернет-страничке www.pdmi.ras.ru/~olymp

В городском туре олимпиады по приглашению жюри принимали участие гости — школьники из Витебска, Вологды, Каунаса, Вильнюса, Кирова, Минска, Москвы, Переславля-Залеского, Рыбинска, Ярославля и других городов.

Победители олимпиады 2015 года

6 класс

Диплом первой степени

Березовой Михаил (5)	366
Лялинов Иван	239
Огнёв Александр	239
Слепанчук Артем	277

Диплом второй степени

Волков Иван	419
Поляничко Григорий (5)	239
Туревский Максим (4)	130

Диплом третьей степени

Жаворонков Дмитрий	239	Оксаниченко Фёдор	им. Горчакова
Зелигер Борис	239	Павленко Даниил	533
Ким Владимир	239	Плаксин Михаил	328
Кудряшов Максим (5)	239	Солнышкин Григорий (5)	610
Леонтьев Лев (5)	610	Сысоев Сергей	597
Мамыкин Максим	33	Чернова Антонина (5)	610

7 класс

Диплом первой степени

Морозов Александр	239
-------------------	-----

Диплом второй степени

Кочеткова Екатерина	г. Ярославль	Мовсин Марат	101
Кравченко Егор	239	Можаев Андрей	239
Малиновский Владимир	Балт. колл.	Петров Владимир	239

Диплом третьей степени

Лялинов Иван (6)	239	Радивончик Дмитрий	533
Павлова Александра	533	Сукнев Дмитрий	239
Пьянков Сергей	533	Туркин Игорь	239

8 класс

Диплом первой степени

Крымский Станислав	ФТШ
Лупуляк Василий	239
Сафонов Иван	239
Толокно Изабелла	239

Диплом второй степени

Беляков Артём	533
Дидин Александр	г. Переславль-Залесский
Дидин Павел	г. Переславль-Залесский
Мильшин Владислав	239
Олейник Иван	239
Фёдоров Даниил	533

Диплом третьей степени

Дамбаев Юрий	30
Серикова Екатерина	533

9 класс

Диплом первой степени

Мигрин Виктор	239
Мильшин Владислав (8)	239

Диплом второй степени

Жуков Матвей	239
Иванов Михаил	239
Крымский Станислав (8)	ФТШ
Сафонов Иван (8)	239

Диплом третьей степени

Виравев Арсений	239	Вепрев Георгий	г. Рыбинск
Карагодин Никита	239	Долгих Сергей	г. Рыбинск
Конева Елизавета (8)	239	Панкратов Виктор	г. Долгопрудный
Лисоветин Никита	239	Пренас Владимир	г. Долгопрудный
Лупуляк Василий (8)	239	Пучинин Сергей	г. Ярославль
Максименко Дмитрий	366	Студеникина Алевтина	г. Москва
Мартынова Ольга	64	Токмачев Александр	г. Ярославль
Петров Владимир (7)	239	Шеремет Артём	г. Москва
Решетова Софья	533		
Толокно Изабелла (8)	239		
Чарковский Георгий	239		

10 класс

Диплом первой степени

Губкин Павел	239
--------------	-----

Диплом второй степени

Губкин Павел	239
Байтенов Егор	г. Рыбинск
Киракосян Александр	239
Лупуляк Ольга	239
Мосеева Татьяна	г. Ярославль

Диплом третьей степени

Алексеев Ярослав	30	Малышев Дмитрий	239
Волковьский Станислав	239	Матвеев Глеб	239
Грачева Анастасия	366	Пахомов Дмитрий	г. Омутнинск
Елфимова Олеся	ФТШ	Семёнов Никита	г. Минск
Завалишин Арсений	239	Смирдин Андрей	239
Захаров Алексей	366	Сундуков Вячеслав	533
Коненков Степан	239	Щербаков Илья	АГ
Пюккенен Армас-Пиетари	239		

11 класс

Диплом первой степени

Кузнецов Александр	239
--------------------	-----

Диплом второй степени (6 задач)

Богданов Илья	г. Москва
Макаров Владислав	450
Мягков Константин	30

Диплом второй степени (5 задач)

Гаевой Никита	30
Лосев Илья	239
Ходунов Павел	239

Диплом третьей степени (4 задачи)

Евтушевский Всеволод	239	Кутенин Даниил	г. Самара
Житнухин Николай	239	Монаков Григорий	533
Куликов Алексей	30	Охотников Артём	ФТШ
Тульчинский Эдуард	г. Самара		

Диплом третьей степени (3 задачи)

Багиров Фарид	533	Коданева Надежда	г. Сыктывкар
Гинзбург Михаил	30	Петров Степан	30
Елизаров Никита	30	Смирнов Лев	г. Вологда

Статистические данные олимпиады 2015 года

КРИТЕРИЙ ПРОПУСКА НА ВТОРОЙ ТУР ОЛИМПИАДЫ

Класс	6	7	8	9	10	11
Количество задач	3	2–	3+	2,5	2	3

ВТОРОЙ ТУР

В левой таблице по каждой задаче приведено количество решивших ее участников; также указаны общее количество приглашенных на олимпиаду и количество прошедших в выводную аудиторию*. В правой таблице указано количество участников, решивших данное количество задач.

Класс	Номер задачи							Всего	Вывод	Количество задач						
	1	2	3	4	5	6	7			1	2	3	4	5	6	7
6	97	31	23	34	7	24	—	130	54**	47	23	12	12	3	4	—
7	77	49	77	37	14	19	1	95	58	12	16	23	22	6	6	1
8	27	63	20	9	18	15	4	94	32**	34	6	13	2	7	0	4
9	66	82	58	27	6	3	5	117	51	13	24	26	19	4	2	0
10	65	66	27	2	3	2	0	122	33	22	38	15	4	0	1	0
11	32	24	29	7	9	9	1	100	20	9	8	6	7	3	3	1

* В начале олимпиады все участники получают карточку с условиями четырех задач. Во время олимпиады участников, решивших три задачи, переводят в отдельную (выводную) аудиторию, где они получают условия еще трех (в шестом классе — двух) задач.

** Проход в вывод по двум задачам.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Первый тур

6 класс

1. В гильдии ювелиров есть два кольца ценой 10 и 30 гулденов и 4 драгоценных камня ценой 60, 70, 80 и 90 гулденов. В гильдии можно заказать изготовление перстня Мудрости, для этого требуется кольцо и два драгоценных камня. Цена такого заказа равна произведению цен требуемых компонентов. У послушника Васи есть всего 200 000 гулденов. Сможет ли он заказать себе два перстня? (А. Храбров, К. Сухов, К. Кохась)

2. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (К. Кохась)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зеленых и фиолетовых человечков. Зеленые человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зеленый кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошел к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка. (А. Чухнов)



4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Федя взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Федя вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Федя сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Феде? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (Ф. Бахарев)

7 класс

5. См. задачу 2.

6. На новогодний праздник пришло 99 мстительных детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причем никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить огромное мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

(А. Сольнин)



7. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A , B , C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ? Не забудьте обосновать ответ.

(К. Кохась)

8. На извилистой реке расположены три города A , B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трех городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению?

(А. Сольнин)

8 класс

9. См. задачу 2.

10. Какие простые числа можно представить в виде

$$|n - 1| + |n - 2| + |n - 3| + |n - 4| + |n - 5|$$

при целых n ?

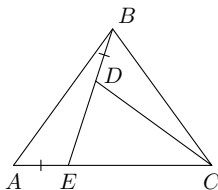
(А. Храбров, В. Франк, Д. Ростовский)

11. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыло 107 зеленых и фиолетовых человечков. Зеленые человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зеленый кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошел к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Какое наименьшее количество человечков могло не получить ни одного кактуса? (А. Чухнов)

12. См. задачу 8.

13. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E , а на отрезке BE — точка D . Известно, что $CE = CD = BE$, $BD = AE$. Докажите, что $\angle B > 60^\circ$.

(А. Смирнов)

**9 класс**

14. См. задачу 2.

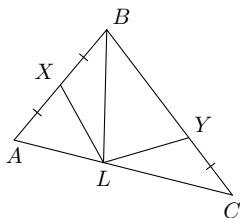
15. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000.

(С. Берлов, А. Сольнин)

16. Натуральные числа a , b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p .

(Ф. Петров)

17. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точка X — середина стороны AB , а точка Y на стороне BC такова, что $CY = AX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY . (А. Пастор)

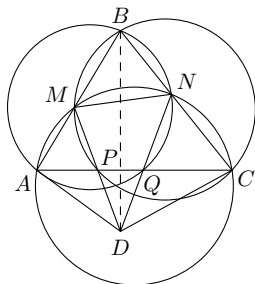


18. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ с неотрицательными коэффициентами p и q , имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1,001f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$. (А. Храбров)

10 класс

19. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000. (С. Берлов)

20. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольники $BMPC$, $BNQA$ и $AMNC$ вписанные. Докажите, что $\angle BDN = \angle BDM$. (А. Смирнов)



21. См. задачу 16.

22. У Саши на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3}, \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \sin(5x)$$

(при $x = -3/2$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране

Содержание

Победители олимпиады 2015 года	4
Статистические данные олимпиады 2015 года	8
Условия задач	9
Первый тур	9
Второй тур	14
Олимпиада 239 школы	21
Вторые варианты задач	24
Решения задач	28
Уголок олимпиадофила	77
Международная олимпиада «Туймаада–2014»	77
Восстановление многочлена по его значениям	98
Уголок олимпиадофоба	107
Санкт-Петербургская олимпиада по математике как литературный и исторический памятник <i>К. Кохась</i>	107