

Розендорн Э.Р.

Задачи по дифференциальной геометрии



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 514.752

ББК 22.151

Р 64

Розендорн Э.Р. **Задачи по дифференциальной геометрии.** — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 144 с. — ISBN 978-5-9221-0821-8.

Этот задачник содержит задачи по теории кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.

Для студентов физико-математических факультетов университетов, педагогических институтов и технических университетов.

Ил. 50. Библиогр. 14 назв.

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки ВПО 010100 Математика (010101), 010900 Механика (010901), 010200 Математика. Прикладная математика (511200), 011000 Механика. Прикладная математика (511300).

ISBN 978-5-9221-0821-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© Э. Р. Розендорн, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Предисловие к изданию 1971 года	5
Отзыв для издательства «Наука»	6
Глава 1. Пространственные кривые	7
§ 1. Предварительные замечания	7
§ 2. Вектор-функции. Параметрическое задание линий. Касательные	17
§ 3. Сопровождающий трехгранник, кривизна и кручение	22
§ 4. Натуральные уравнения. Формулы Френе	30
Глава 2. Поверхности	37
§ 5. Краткие сведения из теории поверхностей	37
§ 6. Поверхности вида $z = f(x, y)$. Формула Эйлера	50
§ 7. Параметрическое задание поверхностей. Касательная плоскость и нормаль	57
§ 8. Первая квадратичная форма поверхности	64
§ 9. Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема Родрига	71
§ 10. Нормальная и геодезическая кривизна линий. Теорема Менье	81
§ 11. Внутренняя геометрия. Теорема Гаусса	88
Глава 3. Задачи для повторения	96
Указания к задачам	110
Ответы	119
Список литературы	138
Предметный указатель	139

Предисловие

Издание 1971 года фактически было вторым: первое было выпущено в 1969 году в МГУ небольшим тиражом на ротاپринте и содержало 150 задач. Позднее задачник был переведен на испанский язык (М.: УРСС, 2002). При подготовке перевода были исправлены имевшиеся отдельные неточности и замеченные опечатки; все эти поправки учтены в данном издании. Добавлены некоторые пояснения в § 1 и в § 5, а также рисунки (часть из них выполнена при участии О. Д. Авраамовой). подбор задач и их распределение по темам полностью сохранены; но в начало каждого из § 2–4 и § 6–11 добавлены типовые примеры с подробным разбором.

При более глубоком изучении материала целесообразно дополнительно привлечь задачники [4, 10, 11] и учебники [1, 7–9, 14].

За последние десятилетия теория кривых и теория поверхностей находят все более широкие применения в различных областях техники [12, 13]. Поэтому эти разделы включены в программу математики для технических университетов. Там данный задачник тоже может быть использован.

Предисловие к изданию 1971 года

Настоящий сборник содержит 170 задач по теории кривых и поверхностей. При его подготовке использованы известные задачки и учебники, перечисленные ниже в списке литературы. Часть задач составлена специально для этого сборника. Задачи на плоские кривые и огибающие в сборник не включены, поскольку эти разделы достаточно полно представлены в задачнике [2]. Звездочкой помечены задачи, к которым даны указания. Для того чтобы усвоение материала не было формальным, целесообразно решение задач сопровождать эскизными рисунками тех геометрических фигур, которые встречаются в процессе решения.

Задачник можно использовать не только при изучении дифференциальной геометрии в качестве самостоятельного предмета, но и в тех случаях, когда теория кривых и теория поверхностей включены в виде отдельных тем в учебный план другого предмета (например, математического анализа). Параграфы 1 и 5 содержат определения, формулы и теоремы (без доказательств). Каждый из остальных параграфов (§ 2–4 и 6–11) можно использовать как тему отдельного занятия со студентами. Если есть возможность на какие-либо из этих тем использовать большее число занятий, то можно привлечь материал третьей главы, где имеются задачи тех же типов, что и в § 2–4 и 6–11, а также комбинированные задачи.

В заключение автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность всем товарищам, принимавшим участие в обсуждении задачника, особенно профессорам Н. В. Ефимову, Э. Г. Позняку, П. К. Рашевскому и Л. А. Тумаркину и доцентам И. А. Вайнштейну, О. С. Ивашеву-Мусатову, И. Х. Сабитову и З. Я. Шапиро.

Отзыв для издательства «Наука»

Книжечка представляет собой очень небольшой по объему, но с большим вкусом подобранный сборник задач по элементарному курсу дифференциальной геометрии. Задачам предпосылается конспект по соответствующей теории, очень сжатый, но точный и аккуратный.

В необходимых случаях задачи (отмеченные звездочками) снабжены указаниями, помещенными в отдельном разделе (после задач). В последнем разделе приведены ответы.

Автор удачно избежал обеих возможных крайностей: когда задачи слишком трудны и требуют творческой изобретательности, недоступной для среднего студента, и когда они банальны и сводятся к механическому применению формул. Задачи достаточно интересны и, в то же время, доступны для студента. Часть задач — оригинальные, другая часть заимствована из указанной автором литературы.

Думаю, что издание задачника в «Науке» весьма желательно.

Профессор МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктор физ.-матем. наук
Петр Константинович Рашевский,
1971 г.

Глава 1

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

§ 1. Предварительные замечания

1.1. Ниже часто встречаются векторы и вектор-функции. Буквы, обозначающие векторные величины, выделены жирным шрифтом. Нулевой вектор обозначен буквой **0**.

В записи вида $\mathbf{A} = \{x, y, z\}$ всегда будет подразумеваться, что x, y, z — координаты вектора $\mathbf{A}$ в некоторой декартовой прямоугольной системе координат.

Радиус-вектор текущей точки кривой чаще всего обозначается буквой $\mathbf{r}$.

Операции над векторами обозначены следующим образом:

$|\mathbf{A}|$ — *модуль вектора $\mathbf{A}$* ;

$\mathbf{AB} = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ — *скалярное произведение*;

$\mathbf{A}^2$ — *скалярный квадрат* вектора $\mathbf{A}$ (т. е. $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{A}) = |\mathbf{A}|^2$);

$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ — *векторное произведение*;

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ — *смешанное произведение*.

Пусть x, y, z — декартовы координаты; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты координатных осей. Далее всюду считаем, что они образуют правую тройку, т. е. из конца вектора $\mathbf{e}_3$ кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ виден против часовой стрелки.

Рассмотрим векторы

$$\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{B} = \{b_1, b_2, b_3\} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3.$$

Угол между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначим α . Из аналитической геометрии известно, как векторные операции выражаются в координатах; напомним это.

Модуль вектора $\mathbf{A}$	Число $ \mathbf{A} $, равное длине этого вектора	$ \mathbf{A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Скалярное произведение $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	Число $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cos \alpha$	$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Векторное произведение $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$	Вектор, ортогональный плоскости векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$; $ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin \alpha$. Тройка векторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ — правая	$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$. Если $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, то $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{0}$
Смешанное произведение $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$	Число $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = ([\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \mathbf{C}) = (\mathbf{A}, [\mathbf{B} \times \mathbf{C}])$	$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

1.2. Напомним еще две формулы, известные из векторной алгебры: *тождество Лагранжа*

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{A}, \mathbf{A}) & (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \\ (\mathbf{B}, \mathbf{A}) & (\mathbf{B}, \mathbf{B}) \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

и формулу для *двойного векторного произведения*

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = (\mathbf{A}, \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) упрощают выкладки при решении некоторых геометрических задач.

1.3. Производная вектор-функции вычисляется по координатам:

$$\text{если } \mathbf{A}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, \text{ то } \mathbf{A}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}.$$

Неопределенные и определенные интегралы вектор-функций тоже вычисляются по координатам, например:

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \left\{ \int x(t) dt, \int y(t) dt, \int z(t) dt \right\}.$$

1.4. Говорят, что функция или вектор-функция принадлежит классу C^0 (или, что то же самое, классу C) в некоторой области изменения ее аргумента (или аргументов), если она непрерывна в этой области; принадлежит классу C^n ($n = 1, 2, \dots$), если непрерывны все ее производные до порядка n включительно; принадлежит классу C^∞ , если непрерывны ее производные всех порядков.

Класс регулярности вектор-функции не зависит от выбора декартовых координат в пространстве.

1.5. Говорят, что линия $\mathcal{L}$ принадлежит классу регулярности C^n ($n = 1, 2, \dots$), если ее можно задать формулой вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где вектор-функция $\mathbf{r}(t) \in C^n$, причем $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Линия называется *гладкой* или C^1 -гладкой, если она принадлежит классу C^1 , и C^n -гладкой, если принадлежит классу C^n ($n = 2, 3, \dots, \infty$). Рассматриваемые ниже линии предполагаются гладкими.

Вместо термина «линия» ниже часто употребляется термин «кривая»; при этом прямая линия рассматривается как частный случай кривой.

1.6. Если линия $\mathcal{L}$ класса C^1 задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, то касательная к ней в точке $t = t_0$ параллельна вектору $\mathbf{r}'(t_0)$. *Орт* (т. е. *единичный вектор*) касательной, направленный в сторону возрастания параметра t , обозначается через $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 1).

Линия $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t)$ называется *сферической индикатрисой касательных* линии $\mathcal{L}$. Следует иметь в виду, что сферическая индикатриса касательных $\mathcal{L}_1$ гладкой линии $\mathcal{L}$ сама, вообще говоря, не является гладкой (рис. 2).

Плоскость, проходящая через данную точку кривой и ортогональная касательной, называется *нормальной плоскостью*. Любая прямая, пересекающая линию $\mathcal{L}$ ортогонально касательной, называется *нормалью* линии $\mathcal{L}$ (рис. 3).

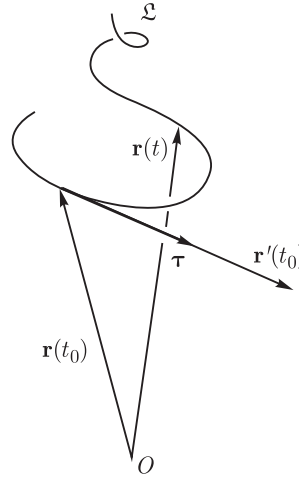


Рис. 1

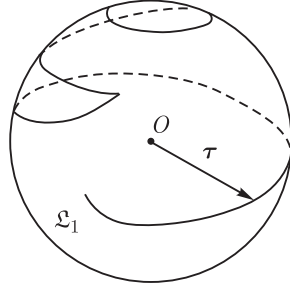


Рис. 2

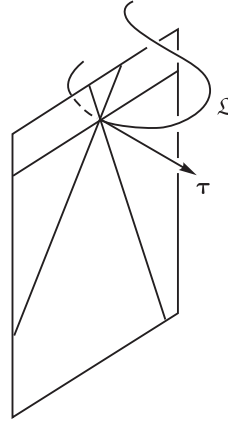


Рис. 3

1.7. Длина дуги $t_1 \leq t \leq t_2$ на кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ равна интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Параметр на кривой называется *натуральным*, если, с точностью до постоянного слагаемого, он равен длине дуги этой кривой, отсчитываемой (со знаком) от какой-либо ее точки в каком-нибудь выбранном направлении.

Натуральный параметр будем обозначать буквой s .

Производную какой-либо величины по натуральному параметру заданной кривой будем обозначать не штрихом, а точкой сверху.

В частности, $\tau(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$.

1.8. Если $\mathcal{L} \in C^2$, то определена *кривизна* k кривой $\mathcal{L}$, вычисляемая по формуле

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (1.3)$$

Точки, где $k = 0$, называются *точками распрямления* кривой.

ПРИМЕР 1.1. Кубическая парабола $y = x^3$, $z = 0$ имеет точку распрямления в начале координат (рис. 4).

Согласно (1.3), по определению, кривизна неотрицательна ($k \geq 0$). Однако для плоской кривой удобно приписать знак кривизне. Чтобы разъяснить, в чем здесь дело, предположим сначала, что линия на плоскости задана как график функции $y = y(x)$, и $\alpha = \alpha(x)$ — угол между положительной полуосью x и касатель-

ной к этому графику в точке $(x, y(x))$ (рис. 5, $\alpha = \arctg y'$). Будем считать, что на этом графике натуральный параметр s возрастает вместе с абсциссой x ; кривизна со знаком определяется как

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}. \quad (1.4)$$

Таким образом, $k > 0$, если около рассматриваемой точки график обращен выпуклостью «вниз» ($k < 0$, если выпуклость обращена «вверх»). При переходе к параметрическому заданию $x = x(t)$, $y = y(t)$ вместо (1.5) будем иметь

$$k = \frac{1}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Взяв величину (1.5) по модулю и считая, что $z(t) = 0$ тождественно, приходим к частному случаю формулы (1.3).

Те точки плоской кривой, где ее кривизна имеет экстремум (вообще говоря, локальный), называются ее *вершинами*.

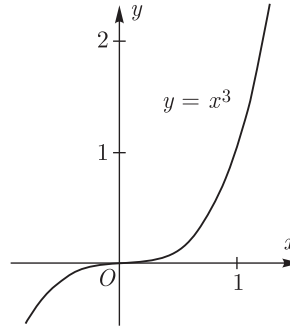


Рис. 4

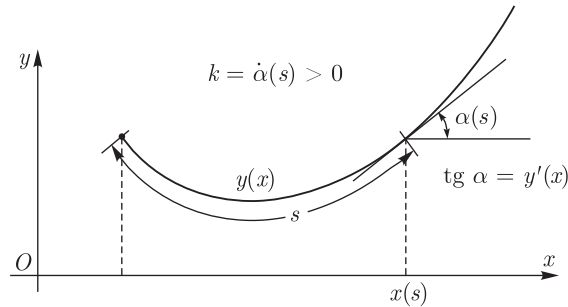


Рис. 5

ПРИМЕР 1.П. У эллипса его вершинами являются концы его большой и малой осей.

Если кривая является плоской, то геометрическое место ее центров кривизны называется ее *эволютой*. О распространении понятия эволюты на пространственные кривые см. ниже задачу 26*.

Полезно наглядно представлять себе соприкасающиеся окружности и расположение кривизны для хорошо знакомых линий.

ПРИМЕР 1.III. Парабола $y^2 = 2px$ и соприкасающаяся окружность в ее вершине показаны на рис. 6.

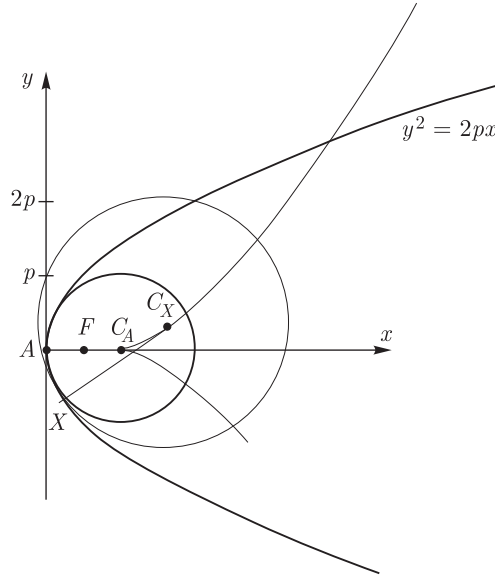


Рис. 6

ПРИМЕР 1.IV. На рис. 7 изображена ветвь равнобочной гиперболы $xy = a^2$, $x > 0$, с соприкасающимися окружностями. Более яркой линией (как и на рис. 6) показана соприкасающаяся окружность в вершине.

На каждом из рисунков 6–7 вершины кривых обозначены буквой A , текущая точка — X ; центры кривизны, построенные для A и X , соответственно C_A и C_X ; кроме того, для наглядности помечены фокусы F этих линий второго порядка.

ПРИМЕР 1.V. Синусоида $y = \sin x$ в точке максимума ($x = \pi/2$, $y = 1$) имеет соприкасающуюся окружность радиуса единица; ее центр — на оси x (рис. 8).

ПРИМЕЧАНИЕ. Тонкой линией на рисунках 6–8 показаны эволюты. Построив к кривой на плоскости нормаль в какой-либо ее точке и продолжив нормаль до пересечения с эволютой, найдем

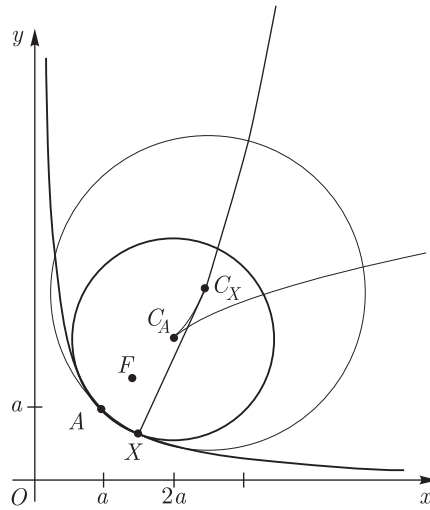


Рис. 7

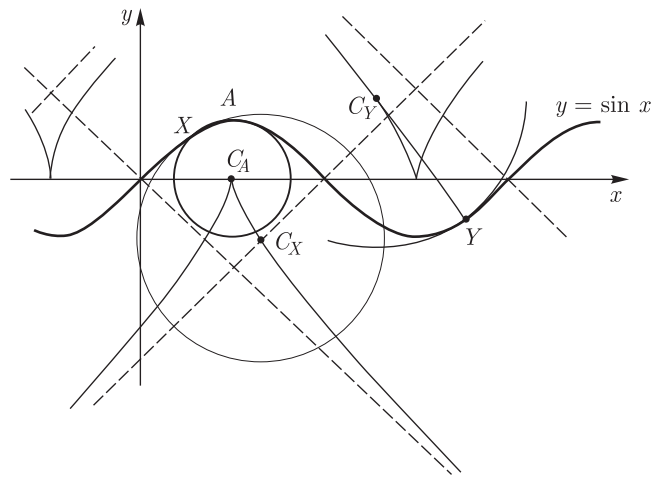


Рис. 8

центр кривизны, а заодно и отрезок, который служит радиусом соприкасающейся окружности.

В точках распрямления центр кривизны уходит в бесконечность; там — асимптота эволюты. На рис. 8 асимптоты эволюты показаны пунктиром.

На всех рисунках 6–8 вершинам кривых соответствуют особые точки их эволют (точки возврата); это — типичное явление [8].

1.9. Пусть $\mathfrak{L} \in C^2$, $k \neq 0$ (т.е. $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \neq 0$). Тогда для каждой точки кривой существует соприкасающаяся окружность. Ее радиус $\mathfrak{R} = 1/k$ называется *радиусом кривизны*, а ее центр — *центром кривизны* линии в рассматриваемой точке (рис. 9).

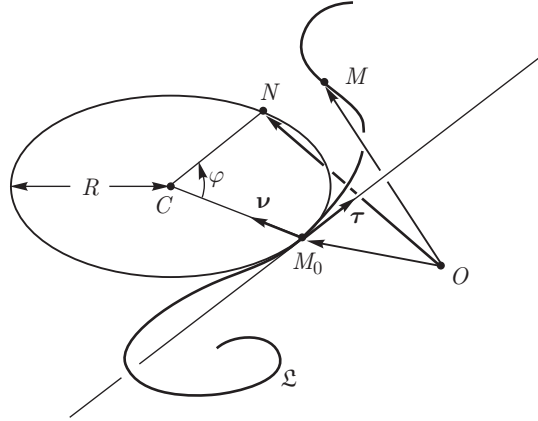


Рис. 9

Нормаль, проходящая через данную точку кривой и центр кривизны, называется *главной нормалью*. Орт главной нормали, направленный от данной точки кривой в сторону центра кривизны, будем обозначать через ν .

Нормаль, ортогональная главной нормали, называется *бинормалью*. Орт бинормали будем обозначать через β , считая, что $\beta = \tau \times \nu$.

Тройка векторов τ, ν, β называется *репером Френе*. Для нахождения этих векторов полезны формулы

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \beta = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} \quad (1.6)$$

и

$$\nu = \beta \times \tau = -\frac{\mathbf{r}' \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']}{|\mathbf{r}'| \cdot |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}. \quad (1.7)$$

1.10. Радиус-вектор центра кривизны $\mathbf{r}_c$ выражается формулой

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \mathfrak{R}\nu = \mathbf{r} + \frac{1}{k}\nu. \quad (1.8)$$