С. П. Актершев

Задачи на максимум и минимум

bhv®

- Метод перебора при заданных ограничениях
- Применение неравенств для поиска экстремума
- Максимум и минимум в геометрических задачах
- Задачи с параметром

Сергей Ахтершев

Задачи на максимум и минимум

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 372.8(076.1)
ББК 74.26я721
А43

Актершев С. П.

А43 Задачи на максимум и минимум. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 192 с.: ил.

ISBN 5-94157-539-4

Рассмотрены разнообразные задачи элементарной математики, связанные с поиском экстремальных значений функции или выбором наилучшего (оптимального) решения при заданных ограничениях (наименьшая стоимость, кратчайший путь и т. п.). Большое внимание уделено геометрическим задачам "на экстремум" и задачам с параметром, взаимосвязи различных разделов математики, связи ее с другими науками и роли этой науки в повседневной практической деятельности людей. Все задачи приведены с подробным решением, часть задач сопровождается двумя или тремя решениями. В конце каждого раздела дана подборка задач для самостоятельной работы.

Для учащихся и преподавателей общеобразовательных и специализированных школ, лицеев, колледжей и для самообразования

УДК 372.8(076.1)
ББК 74.26я721

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Татьяна Лапина*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн серии	*Инна Тачина*
Оформление обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 25.11.04.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-539-4

Содержание

Предисловие **1**

Глава 1. Выбор наилучшего варианта **3**

1.1. О математических моделях, постановке задачи и других "скучных" вопросах 3

1.2. Метод перебора 16

1.3. Когда экстремум найти нетрудно 30

Глава 2. Экстремум находим без помощи производной **45**

2.1. Наилучшее — это то, что невозможно улучшить 46

2.2. Применение неравенств для поиска экстремумов 59

2.3. Вариации на тему неравенств 72

Глава 3. О том, как с помощью гирек построить кратчайшую транспортную сеть, и о том, как можно растянуть бычью шкуру **87**

3.1. Экстремум в геометрических задачах 87

3.2. Минимум энергии, сумма длин и "оптические" свойства экстремумов 103

3.3. Задача Дидоны и родственные ей задачи 119

Глава 4. Где быть экстремуму — диктует параметр 131
4.1. Исследуем все возможности 131
4.2. Сколько корней имеет уравнение? 153
4.3. Когда без производной не обойтись 165

Список литературы 187

Предисловие

Среди различных математических задач встречаются задачи, в которых требуется найти наилучший вариант, кратчайший путь, наибольшее число с заданными свойствами и т. п. Подобные задачи обладают своеобразной привлекательностью. По-видимому, это объясняется тем, что они чем-то похожи на наши повседневные проблемы. Мы стараемся приобрести вещи наилучшего качества по возможности за наименьшую цену; пытаемся максимально увеличить свои доходы, прилагая к этому минимальные усилия; хотим поменьше рисковать и т. д. У всех этих жизненных проблем есть одно общее свойство: необходимо добиться наилучшего результата, выполнив определенные условия. В математике таким проблемам соответствует целый класс задач, в которых при заданных ограничениях нужно отыскать наибольшее (максимальное) или наименьшее (минимальное) значение некоторой функции. Оба понятия — максимум и минимум — объединяются одним термином "экстремум".

К сожалению, задачам "на экстремум" в школьном курсе математики уделяется явно недостаточное внимание. В лучшем случае школьники старших классов умеют найти экстремум простейших функций с помощью производной. У них создается ложное впечатление, будто это единственный метод решения подобных задач. Встретившись на вступительном экзамене с нестандартно сформулированной задачей "на экстремум", многие абитуриенты совершенно теряются и не знают, как к ней подступиться. Вместе с тем, в элементарной математике имеется целый набор приемов решения подобных задач. Так, например, многие задачи достаточно просто решаются применением теорем о средних, методом перебора при заданных ограничениях, установлением области значений функции, применением зеркальной симметрии и т. д.

В этом учебном пособии рассмотрен ряд задач элементарной математики, разнообразных по содержанию, так или иначе связанных с выбором наилучшего варианта или поиском экстремальных значений функции. В нем подробно обсуждаются методы решения "экстремальных" задач, а также идеи, лежащие в их основе. Задачи приведены с подробным решением; некоторые сопровождаются двумя или тремя различными решениями. В конце каждого параграфа дана подборка задач для самостоятельного решения.

Основная часть задач рассчитана на учащихся старших классов, но диапазон уровня трудности задач довольно широк: от простейших, которые вполне по силам учащимся 8–9 классов, до задач олимпиадных. Почти все приведенные в книге решения задач "на экстремум" даже не используют понятие производной. Исключение составляет только последний параграф *главы 4*, предназначенный для учащихся физико-математических школ и классов с углубленным изучением математики. Разумеется, приведенные решения не являются единственно возможными. Читатели наверняка смогут для многих задач найти оригинальные решения, возможно даже более простые и изящные.

Большая часть задач взята из различных источников, указанных в списке литературы; многие из задач предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы. Основой материала для этой книги послужили задачи, опубликованные в журнале "Квант" в 70–90 гг. прошлого столетия (разделы "Задачник Кванта", "Избранные школьные задачи", "Читатели пишут", "В помощь абитуриенту" и др.). В те годы в "Кванте" было напечатано много замечательных статей с подборками задач, которые сейчас малодоступны современным школьникам. Стремление "извлечь на поверхность" эти "золотые россыпи" и является главной причиной создания настоящего пособия. Книга предназначена в первую очередь школьникам, но будет полезна преподавателям, студентам, а также всем интересующимся математикой и желающим расширить свой кругозор.

Автор

Глава 1

Выбор наилучшего варианта

1.1. О математических моделях, постановке задачи и других "скучных" вопросах

> Физик и математик целый год вместе работают над одной задачей. Математик: "Ура! Я доказал, что решение задачи существует". Физик: "Да если бы я в этом хоть на секунду сомневался, я бы не стал этой задачей заниматься! "
>
> *Из анекдота*

Не подумайте, что анекдот в эпиграфе этого раздела про глупого математика. Это анекдот про недалекого физика. Дело в том, что на самом деле они занимаются разными задачами. Физик исследует некоторое физическое явление, которое, очевидно, существует. Математик же изучает математическую модель этого явления. Вопрос об адекватности математической модели может оказаться очень непростым. Тот факт, что математику удалось доказать существование решения математически поставленной задачи (заметьте, не найти решение, а только выяснить, что оно существует!), свидетельствует в пользу правильности выбранной модели. Окончательный вывод о пригодности модели покажет только сравнение следствий, выведенных из решения математической задачи с результатами физического эксперимента.

Однако прежде чем решить задачу, необходимо ее четко сформулировать на языке математики, т. е. правильно поставить.

Например, *найти все значения параметра, при которых данное уравнение имеет единственное действительное решение*, — это правильно поставленная задача. Здесь ясно сформулирована цель (найти значения параметра) и указаны условия, которые требуется выполнить (уравнение должно иметь решение; решение должно быть единственным и действительным). А вот задание из одноименной сказки "пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что" — это неправильно поставленная задача. Главный герой этой сказки, получив такой задание, может, не сходя с места, заявить, что он задание уже выполнил. Вопрос о правомерности его наглого заявления не может быть решен объективно. Отсюда первое правило: *задача должна быть поставлена правильно!*

Рассмотрим теперь, что такое математическая модель. Это только в школьных задачках заранее известно, что дано и что требуется получить. В жизни все гораздо сложнее.

К примеру, требуется проложить железную дорогу через горный хребет наилучшим образом. Возникает вопрос: какую дорогу считать наилучшей — самую короткую, самую дешевую или самую безопасную? Возможно, требуется, чтобы будущая железная дорога обладала всеми этими качествами (т. е. была достаточно короткая, дешевая и безопасная) и вдобавок была бы хороша в эксплуатации. Тогда надо сформулировать ограничения. Например, такие: длина дороги не должна превышать 500 км, стоимость строительства не должна превышать 100 миллиардов руб., серьезные повреждения дороги лавинами должны быть не чаще, чем раз в два года и т. д. Затем необходимо определить целевую функцию, для которой надо будет найти экстремальное значение. Такой функцией может служить, к примеру, годовая стоимость эксплуатации железной дороги или ее пропускная способность или что-нибудь иное.

При постановке задачи приходится отвечать на следующие вопросы: какие варианты маршрута удовлетворяют сформулированным требованиям? сколько их? какие величины можно считать независимыми переменными, а какие — заданными параметрами? Такими переменными могут быть количество станций, туннелей и мостов, а параметрами — максимальная протяженность туннеля, максимально допустимая крутизна участка дороги и т. п. Наконец, как зависит целевая функция от всех этих переменных и параметров? Дать четкие ответы на все эти вопросы и означает создать математическую модель поставленной задачи. Разработав математическую модель, можно заняться решением поставленной задачи, т. е. выяснить, на каких участках дороги необходимо построить мосты, туннели и станции так, чтобы целевая функция принимала экстремальное значение.

При разработке математической модели неизбежно приходится делать некоторые упрощения и предположения, иначе задача будет "неподъемной". Так, например, можно считать небольшой участок дороги отрезком прямой, крутизну и скорость движения поездов на каждом участке полагать постоянной, вероятность схода лавины некоторой постоянной величиной и т. д. Математическая модель всегда основана на некотором упрощении. Однако, заменяя реальный объект моделью, мы получаем возможность использовать для решения задачи мощные средства математики.

Помните, как в известной сказке П. П. Ершова "Конек-Горбунок" царь приказал Ивану доставить во дворец Царь-Девицу в трехнедельный срок? (Тем, кто не читал это замечательное произведение, настоятельно рекомендуем его прочесть.) Надо отдать должное царю — задачу он поставил правильно. Поставленную задачу Иван успешно решил с помощью своего четвероногого друга. Разработка же математической модели задачи — заслуга Конька-Горбунка. Тот выделил два самых важных фактора, позволивших решить задачу:

периодическое появление Царь-Девицы на берегу Моря-Окияна (два раза в год);

ее пагубное пристрастие к кондитерским изделиям (не может не клюнуть на такую приманку).

Все остальные качества Царь-Девицы оказались для решения задачи несущественными. Отсюда второе правило: *создавая модель, необходимо отбросить все второстепенные особенности реального объекта и сохранить только самые главные, без которых никак нельзя обойтись.*

Далеко не всегда заранее ясно, какие свойства объекта окажутся существенными для решения задачи, а какие — нет. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Путешественник вышел утром из своей маленькой палатки на прогулку. Сначала он прошел 1 км в южном направлении, затем повернул на восток и прошел ровно 1 км, затем повернул на север и, пройдя ровно 1 км, оказался перед входом в свою палатку. Может ли это быть?

Решение. Возьмем лист бумаги и карандаш. Представим, что бумажный лист — это план местности. Изобразим на плане маршрут прогулки. У нас получится ломаная, идущая по трем сторонам квадрата со стороной 1 км. Вывод, кажется, ясен: в конце прогулки путешественник находится на расстоянии 1 км от своей палатки.

Если вы еще не заметили подвоха, давайте задумаемся над вопросом: *какую модель мы используем?* План или карта — это модель поверхности Земли. Достаточно ли хороша эта модель? Конечно, мы понимаем, что Земля не плоская. Однако на расстояниях порядка километра ее можно считать плоской с хорошей точностью. Другое дело, если бы путешественник прогулялся на расстояние 1000 км! Тогда было бы необходимо учитывать кривизну поверхности Земли. Строго говоря, каждый из трех участков пути представляет собой дугу окружности (в восточном направлении путешественник шел по дуге параллели, а в южном и северном направлениях — по дугам меридианов). Изображая маршрут прогулки на плане местности, мы заменили эти дуги отрезками. Откажемся от модели плоской Земли. Возьмем в качестве модели сферу. Можно ли на поверхности сферы из двух меридиональных дуг и одной дуги параллели составить замкнутую линию? Могут ли на поверхности сферы две меридиональных дуги иметь хотя бы одну общую точку? Теперь вы наверняка отыщете такую возможность. Как видим, решение существенно зависит от выбранной модели. В модели плоской Земли ситуации, указанной в условии задачи, быть не может; если же считать Землю шарообразной, то ситуация возможна.

Вопрос

Сколько вариантов решения имеет эта задача? *Подсказка*: задача имеет не единственное решение.

Вот другой пример задачи, в решении которой важную роль играет выбранная математическая модель.

Задача 2. Двумя ударами топора разрубить подкову на максимальное число частей, не перекладывая части после удара.

Решение. Не будем хвататься за топор или бежать на улицу искать подкову. Лучше сделаем математическую модель задачи, например, следующую: *подкова — дуга окружности*; *удар топора — прямолинейный разрез.* Мы четко поставили задачу, и нетрудно убедиться, что больше пяти частей не получится (рис. 1.1). Можно ли получить шесть частей? Так и хочется заявить, что это невозможно! Не будем торопиться с заявлениями. Попробуем выбрать другую модель. У реальной подковы кроме длины есть еще и ширина. Усложним нашу модель: *подкова — это кольцо с разрезом.* Теперь можно получить шесть и даже семь частей (рис. 1.2, *а*, *б*).

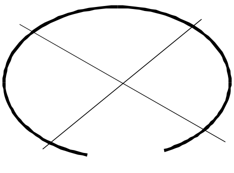

Рис. 1.1

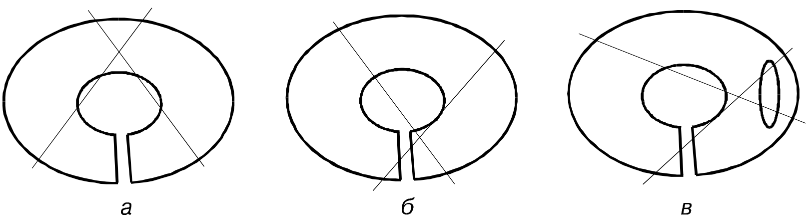

Рис. 1.2

Упражнение 1

Считая подкову кольцом с разрезом, получите восемь частей.

Продолжая в том же духе, можно догадаться, что у подковы есть толщина, а тогда *удар топора — плоский разрез.* Какое наибольшее число частей можно получить с учетом толщины подковы? А может быть частей еще больше? Что бы еще учесть? Конечно же, дырки для гвоздей! На рис. 1.2, *в* показано, как наличие дырок в подкове может увеличить число частей. Какое максимальное число частей можно получить, если учесть дырки для гвоздей? Как видите, от исходных предположений существенно зависит ответ задачи. Чем сложнее выбранная модель, тем сложнее решение. Однако не всегда, усложняя модель, мы получаем новый результат. Искусство составления модели в том и состоит, чтобы учесть самое важное, не переусложнив модель.

Сделаем еще один важный вывод: найденный ответ относится, прежде всего, к выбранной модели и только косвенно — к реальному объекту.

Вот еще пример задачи-головоломки, решение которой помогает найти хорошая математическая модель.

Задача 3. Возьмите жесткую, например, деревянную палочку длиной 20–30 см и прочную нитку. Сделайте на конце нити широкую петлю и наденьте ее на конец палочки. Возьмите пиджак (можно жилет, рубашку, кофточку — лишь бы были на пуговицах) и, продев свободный конец нити в пуговичную петлю, привяжите его к другому концу палочки так, чтобы нить не соскальзывала (для этого на конце палочки сделайте небольшую зарубку). В результате палочка окажется прицепленной к пиджаку, как показано на рис. 1.3. В этом состоянии длина нити должна быть чуть меньше длины палочки так, чтобы петлю невозможно было снять с палочки. Теперь попробуйте отцепить палочку от пиджака (разумеется, не разрывая нити, не ломая палочку и не разрезая пиджака).

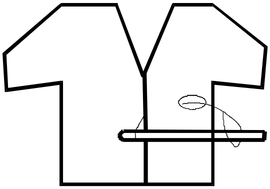

Рис. 1.3

Указание

Если ваши попытки окажутся безрезультатными и вы решите, что вам подсунули задачу, не имеющую решения, сделайте хорошую математическую модель пиджака. Обдумайте, какие свойства пиджака совершенно необходимы для решения задачи, а какие только мешают решению? Можно ли выделить одно, самое главное для решения свойство и отбросить все остальные? Обдумав эти вопросы, изготовьте физическую модель пиджака из небольшого ненужного лоскута или листка бумаги. Решите задачу на этой модели.

Рассмотрим еще один вопрос: *когда задачу можно считать решенной?* Например, такую: *найти простые числа, у которых сумма цифр (в десятичной системе) равна двум*. Первое "подвернувшееся под руку" простое число 2 как раз подходит. Можно ли считать задачу решенной? Увы, нет! Решить задачу — значит найти *все* ее решения и доказать, что других решений нет. Например, простые числа 11 и 101 тоже удовлетворяют условию. Доказать, что поставленная задача не имеет решения — это тоже означает *решить задачу*!

Упражнение 2

Найдите еще несколько простых чисел, у которых сумма цифр равна двум. Существует ли наибольшее такое число?

Несколько советов о том, как решать задачи

Никогда не лишайте себя возможности (и удовольствия) самостоятельно найти решение задачи. Прежде чем прочитать решение, затратьте некоторое время на попытку "подобрать ключ" к задаче. Даже если ваша попытка будет неудачной, она не является бесполезной. Во-первых, вы поймете, в чем состоит трудность задачи и какие препятствия необходимо преодолеть на пути к ответу. Это понимание поможет вам разобраться в приведенном ниже решении. Во-вторых, вы приобретете нечто весьма ценное: опыт самостоятельного исследования проблемы (этот опыт нигде невозможно купить ни за какие деньги). Рано или поздно этот накопленный опыт приведет вас к успеху.

Принято считать, что в математике надо не угадывать ответ, а доказывать некоторые утверждения, ссылаясь на другие ранее доказанные утверждения (теоремы). Вообще говоря, это верно. Сам по себе ответ, не подтвержденный какими-либо рассуждениями, не представляет ценности: как знать, а вдруг он неверный? Однако прежде чем что-то доказывать, необходимо *догадаться*, что именно надо доказать. Решая задачу, мы, прежде всего, делаем более или менее правдоподобное предположение, т. е. догадку. Догадка лежит в основе всякого решения, поэтому прежде всего надо учиться делать правдоподобное предположение. Затем нужно выяснить, верно ли оно. Для этого рассмотрите частные и предельные случаи.

Рассмотрим, например, следующее предположение: *любая прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника, делит его на две равновеликие части.*

Рассмотрим следующие частные случаи выпуклого четырехугольника:

прямоугольник;

параллелограмм;

равнобочная трапеция.

В первых двух случаях предположение подтверждается. В случае трапеции гипотеза подтверждается, только если прямая является осью симметрии. Однако если прямая является диагональю, то легко видеть, что гипотеза неверна (докажите это). Предположение оказалось неверным.

Если же ваша догадка подтверждается на различных частных случаях, вы обретаете все большую уверенность в ее правильности и начинаете ее обосновывать. Изучите следствия, которые можно вывести из вашего предположения. Установите связь этих следствий с другими известными вам фактами. Выясните, какие свойства объектов, с которыми вы работаете (геометрических фигур, функций и т. п.), обеспечивают правильность вашего предположения. Попробуйте найти объекты, для которых гипотеза будет неверна. Исследуйте предельные случаи. Если вы работаете с функцией, рассмотрите случай, когда переменная принимает очень большие или предельно возможные значения и т. п. Рассуждения такого типа называются наводящими соображениями. Поясним сказанное на двух примерах.

Пример 1. Через точку пересечения диагоналей произвольной трапеции провести прямую так, чтобы разделить трапецию на две равновеликие части.

Решение. Возьмем частный случай равнобедренной трапеции. Эта фигура имеет ось симметрии, которая и будет искомой прямой, т. к. точка пересечения диагоналей лежит на оси симметрии. А если трапеция неравнобедренная?

Приглядимся внимательней к частному случаю. Ось симметрии проходит через середины оснований трапеции. Возникает предположение, что это свойство искомой прямой верно для любой трапеции. Проверим его.

Возьмем предельный случай: одно основание трапеции равно нулю (трапеция в этом случае вырождается в треугольник). Тогда точка пересечения диагоналей вырожденной трапеции совмещается с вершиной треугольника. Теперь нужно провести прямую через вершину треугольника так, чтобы разделить его на равновеликие части. Очевидно, что искомой прямой будет медиана треугольника. Искомая прямая проходит через середину основания вырожденной трапеции, т. е. в этом предельном случае предположение подтверждается.

Если наше предположение верно, тогда середины обоих оснований трапеции и точка пересечения диагоналей должны лежать на одной прямой! Возьмем другой частный случай: основание AD трапеции ABCD вдвое больше другого основания BC. Продолжим боковые стороны AB и CD до их пересечения в точке E. Диагонали трапеции являются медианами треугольника AED (докажите это). Тогда третья медиана, проведенная из вершины E, проходит через точку пересечения диагоналей и середину основания BC (почему?). Предположение опять подтверждается.

Упражнение 3

Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины обоих оснований лежат на одной прямой. Докажите, что эта прямая делит трапецию на две равновеликие части.

Пример 2. Два поселка A и B расположены на одном берегу реки. Почтальон должен доставить из A в B телеграмму и вернуться обратно. Он может пойти пешком либо плыть по реке туда и обратно на лодке. Скорость лодки в стоячей воде и скорость, с которой почтальон идет по берегу, одинаковы. Какой способ передвижения следует выбрать почтальону, чтобы проделать весь путь за наименьшее время?

Решение. Предположим, что река довольно быстрая и скорость лодки только чуть-чуть больше скорости течения (предельный случай). Тогда скорость лодки вниз по течению будет почти вдвое превышать скорость передвижения почтальона по берегу. Однако когда почтальон станет грести против течения, он будет продвигаться очень медленно (если скорость течения равна скорости лодки, то почтальон просто будет торчать на месте). Очевидно, что выигрыш во времени на пути по течению не сможет скомпенсировать катастрофический проигрыш на обратном пути. Напрашивается гипотеза: почтальон должен идти пешком. Проверим ее.

Пусть U — скорость лодки в стоячей воде, V — скорость течения ($U > V$), l — расстояние между поселками. Пешком весь путь будет проделан за время $2l/U$, а на лодке — за время $l/(U+V)+l/(U-V)$. Мы предполагаем, что верно неравенство

$l/(U+V)+l/(U-V)>2 \cdot l/U$. Упрощая его, видим, что неравенство верно, поэтому предположение было правильным.

В замечательной книге Д. Пойа "Как решать задачу" сформулированы "правила исследователя". Процитируем некоторые из них.

Начните с частных случаев (они могут оказаться легче).

Рассмотрите полученные результаты.

Наблюдайте, обобщайте, проверяйте.

Проанализируйте метод решения, расчлените его и посмотрите, какие его части могут быть перенесены на общий случай.

Подойдите к задаче с разных сторон, исследуйте различные детали; исследуйте одни и те же детали, но с разных точек зрения; попытайтесь усмотреть в каждой детали некоторую новую интерпретацию задачи.

Ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями.

Попытайтесь увидеть знакомое в том, что вы исследуете, и полезное в том, что оказалось знакомым.

Вглядитесь в метод, попытайтесь увидеть в нем главное. Постарайтесь улучшить его.

Наконец, последний совет. Приступая к решению, выясните, существует ли в рамках принятой модели решение? Вопрос не праздный — решения может и не быть. Вы сэкономите время и усилия, если не будете искать то, чего нет.

Упражнение 4

Выясните, существует ли прямоугольник единичной площади с наибольшим периметром? Существует ли правильная треугольная пирамида единичного объема с наибольшей площадью поверхности?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Из трех одинаковых отрезков можно составить равносторонний треугольник. Из пяти одинаковых отрезков нетрудно составить два равносторонних треугольника (как?). Можно ли из шести одинаковых отрезков составить четыре равносторонних треугольника?

Задача 2. Можно ли тремя разрезами разделить торт на восемь частей?

Задача 3. Арбуз разрезали на четыре части и мякоть съели; осталось пять корок. Может ли такое быть?

Задача 4. Вечный и Неутомимый Путешественник решил все время двигаться строго на северо-восток. Окончится ли когда-нибудь его путешествие? Если да, то в какой точке? Где следует разыскивать этого упрямца, если с момента начала путешествия прошло много времени?

Задача 5. Из листа жести вырезан кусок неправильной формы. Каким образом по возможности точнее определить его площадь, если у Вас имеется в запасе квадратный лист такой жести? (Поверхность вырезанного куска может быть не плоской, и выпрямить ее вы не можете.)

Задача 6. В комнате на столе находятся три электрические лампы накаливания, а в коридоре три выключателя. Каждым выключателем можно зажечь или погасить одну из ламп. Вам позволяется зайти в комнату только один раз. Можно ли определить, какой выключатель соответствует каждой из ламп? Свет от ламп не проникает в коридор; вначале все лампы погашены.

Задача 7. Можно ли на плоскости расположить четыре треугольника так, чтобы каждый из них имел общую границу с тремя остальными? Любая общая граница должна быть отрезком.

Задача 8. Две точки A и B движутся так, что в любой момент скорость точки A больше скорости точки B (по модулю), а направление векторов скорости одинаково. Может ли расстояние между A и B оставаться неизменным?

Задача 9. Существует ли такой многоугольник площадью один квадратный сантиметр, который невозможно накрыть никаким прямоугольником площадью один квадратный километр?

Задача 10. Ученики одной из московских школ совершили автобусную экскурсию в г. Волоколамск. После экскурсии один из школьников нарисовал картинку (рис. 1.4). Куда на этой картинке едет автобус — в Москву или Волоколамск?

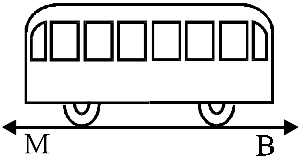

Рис. 1.4

Задача 11. Можно ли вырезать из целого прямоугольного листа бумаги фигуру, изображенную на рис. 1.5? Приклеивать части нельзя.

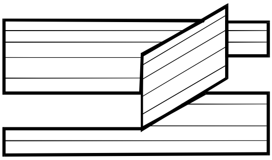

Рис. 1.5

Задача 12. В городе, окруженном прямоугольной стеной, живут три враждующих между собой князя. Каждый из них имеет свой терем и владеет одними из трех городских ворот. На рис. 1.6 ворота и терем каждого князя помечены одним и тем же номером; терем № 1 примыкает к городской стене. Каждый из князей решил проложить дорожку от своего терема к своим воротам так, чтобы она не пересекалась с дорожками остальных князей. Смогут ли князья осуществить задуманное?

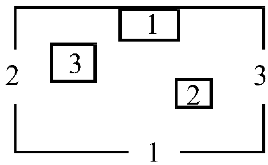

Рис. 1.6

Задача 13. Два состава по 4 вагона каждый идут по одному пути навстречу друг другу. Между ними расположен тупик, в котором помещается локомотив и два вагона. Смогут ли поезда разойтись?

Задача 14. Математический удав представляет собой цилиндр, закрытый с одного торца и открытый с другого. Толщина стенки цилиндра равна нулю; поверхность цилиндра может как угодно деформироваться и сминаться, не разрываясь. Этот удав начал заглатывать свой собственный хвост. Каков будет результат этого захватывающего процесса? Можете ли вы описать, как будет выглядеть удав, проглотивший сам себя, в разрезе?

1.2. Метод перебора

Навозну кучу разгребая,
Петух нашел жемчужное зерно.

И. А. Крылов

В математическом фольклоре можно встретить забавную задачу, которую мы перескажем в следующей формулировке.

Задача 1. Математик Иванов случайно встретил на улице своего знакомого Петрова, с которым не виделся много лет. "А у меня уже три сына подрастают", — гордо объявил Петров. "Какого же возраста твои парни? " — поинтересовался Иванов. "Если возрасты всех троих сложить, то получится 13, если эти три числа перемножить, то получится 36, — ответил Петров и ехидно добавил: — Ты же у нас математик, вот и реши сам, сколько им лет". "Этой информации мне недостаточно, чтобы определить возраст твоих детей", — смущенно признался Иванов после минутного размышления. "Да, забыл тебе сказать, что у старшего сына волосы рыжие", — сообщил ценные сведения Петров. "Ну, теперь я все понял!" — обрадовался Иванов и тут же правильно назвал возраст всех трех детей. Какого возраста сыновья Петрова?

Решение. Представим число 36 произведением простых сомножителей и единицы: $36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ (единица всегда готова служить сомножителем перед чем угодно). Эти "кирпичики" нужно скомбинировать в три сомножителя так, чтобы в результате сумма всех трех была 13. Перебрав все возможные комбинации, видим, что подходящих вариантов только два: $36 = 1 \cdot 6 \cdot 6$ и $36 = 9 \cdot 2 \cdot 2$. В первом варианте есть младший сын, но нет старшего; во втором варианте есть старший сын. Дополнительная информация о цвете волос старшего сына позволяет выбрать единственный вариант.

В этой задаче использован метод перебора — видимо, самый древний и самый простой метод решения задач, в которых искомая величина принимает только целочисленные значения. Этот метод очень удобен, когда количество возможных вариантов невелико. Такой перебор легко осуществить "вручную". Когда же вариантов тысячи или миллионы, то перебор можно поручить компьютеру. Известны серьезные задачи, которые математики не могут решить иначе, чем методом перебора. Конечно, любой перебор, который можно осуществить практически, — это перебор *конечного* числа вариантов, и никакая вычислительная техника этого не изменит. Так, например, перебором невозможно точно решить такую простейшую геометрическую задачу: *найти на прямой l точку, наименее удаленную от заданной точки O, не лежащей на прямой l.* Количество точек на прямой l — бесконечное множество, и никакой суперкомпьютер тут не поможет. Единственный недостаток метода перебора — его трудоемкость при большом количестве вариантов. Однако и этого недостатка можно избежать, если правильно организовать перебор. Рассмотрим применение этого метода в следующих задачах.

Задача 2. Купили несколько одинаковых книг и несколько одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 р. 56 коп. Известно, что книг купили на шесть больше, чем альбомов, а цена книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома. Сколько купили книг?

Решение. Из условия видно, что книг купили не менее семи и цена книги больше одного рубля. Отсюда следует, что книг не более десяти (иначе за них заплатили бы больше 11 руб.). Таким образом, количество купленных книг — одно из чисел 7, 8, 9, 10. Кроме того, цена одной книги в копейках — натуральное число, следовательно, 1056 делится нацело на одно из чисел 7, 8, 9, 10. Из них только число 8 является делителем числа 1056, значит, купили 8 книг.

Замечание

Здесь, прежде всего надо было заметить, что количество книг — натуральное число. Цена одной книги в копейках — тоже натуральное число. Этот факт не очень заметен в условии задачи. Предполагается, что читатель из личного опыта знает о том, что копейка — самая мелкая денежная единица. Важно на начальном этапе решения выявить все ограничения на значения целочисленной переменной, которые заложены в условии задачи. На эти ограничения указывают сведения о количестве книг (больше шести) и цене одной книги (больше 1 рубля). Ограничения устанавливают небольшое количество возможных вариантов, и далее вступает в действие перебор этих вариантов.

Задача 3. Рыбаки поймали несколько рыб (больше 30, но меньше 100 штук). Оказалось, что 48 % из них окуни. Пять самых мелких рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали, и оказалось, что среди оставшихся рыб 50 % составляют окуни. Сколько рыб было поймано? Сколько окуней было среди отпущенных рыб?

Решение. Пусть было поймано n рыб. Тогда количество окуней среди них $0{,}48 \cdot n = 12 \cdot n / 25$. Поскольку количество окуней — натуральное число, то число n должно нацело делиться на 25. С учетом ограничений, указанных в условии, число n может принимать только два возможных значения: 50 и 75. После того как пять рыб были отпущены в озеро, должно остаться четное число рыб (половина оставшихся рыб — натуральное число). Этому условию удовлетворяет единственный вариант: было поймано 75 рыб, среди них было $0{,}48 \cdot 75 = 36$ окуней. Среди оставшихся рыб $0{,}5 \cdot 70 = 35$ окуней, поэтому среди отпущенных рыб был один окунь.

Задача 4. Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество больше 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез на 18, то берез станет больше. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез было посажено?

Решение. Пусть было посажено x лип и y берез. По условию задачи, натуральные числа x и y удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 14 < x + y, \\ 2x < y + 18, \\ 2y < x. \end{cases}$$

Используя второе и третье неравенства, получаем $4y < 2x < y + 18$. Отсюда $3y < 18$. Умножая первое неравенство на два и складывая его со вторым неравенством, получаем $28 < 3y + 18$. Отсюда $10 < 3y < 18$. Число $3y$ кратно трем, поэтому его возможные значения — это 12 или 15. Рассмотрим первый вариант. Пусть $y = 4$, тогда из первого неравенства исходной системы получаем $10 < x$, а из второго неравенства получаем $x < 11$. Этот вариант не подходит. Пусть теперь $y = 5$. Из третьего неравенства системы получаем $10 < x$, а из второго неравенства получаем $x < 23/2$. Этим условиям удовлетворяет только число 11. Итак, было посажено 11 лип и 5 берез.

Задача 5. Для того чтобы купить в харчевне полпорции жареных пескарей, коту Базилио не хватает 3 сольдо, а лисе Алисе — 10 сольдо. Они сложили свои деньги, закопали их на Поле Чудес, и на следующий день их совместный капитал утроился. Смогут ли теперь кот Базилио и лиса Алиса купить полную порцию жареных пескарей на двоих?

Решение. Пусть полпорции жареных пескарей стоит x сольдо. Тогда у Базилио первоначально было $(x - 3)$ сольдо, а у Алисы $(x - 10)$ сольдо. Заметим, что $x > 10$, т. к. иметь при себе отрицательную сумму денег невозможно. После того как совместный капитал Алисы и Базилио чудесным образом утроился, на руках у них оказалось $6x - 39$ сольдо. Они смогут купить жареной рыбки, если верно неравенство $6x - 39 > 2x$, т. е. $x > 39/4$. Это неравенство верно, т. к. $x > 10$, и остается только пожелать коту Базилио и лисе Алисе приятного аппетита.

Задача 6. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 1700 до 1950 руб. Все внесли одинаковую сумму денег, однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 10 руб. больше. Сколько стоил магнитофон и сколько студентов участвовали в покупке?

Решение. Пусть в покупке участвовали n студентов и каждый из них внес x руб. Тогда стоимость магнитофона составляет $n\,x$ руб. Первоначально собирались участвовать $(n + 2)$ человека, и каждый вносил $(x - 10)$ руб. Отсюда следует равенство: $n\,x = (n + 2)\,(x - 10)$. Упрощая это уравнение, получаем $x = 5(n + 2)$. Таким образом, магнитофон стоит $5n(n + 2)$ руб. По условию $1700 < 5n(n + 2) < 1950$. Поделим это двойное неравенство на пять и прибавим ко всем частям единицу. В результате получим $341 < (n + 1)^2 < 391$. Из всех квадратов натуральных чисел в диапазоне от 341 до 391 находится только квадрат числа 19. Таким образом, $n = 18$, $x = 100$. Магнитофон стоит 1800 руб.

Задача 7. Малыш может съесть торт за 10 мин., порцию мороженого — за 6 мин., а пакет молока выпить за 4 мин. Карлсон может сделать все это вдвое быстрее. За какое наименьшее время они вместе смогут покончить с завтраком, состоящим из двух тортов, одной порции мороженого и двух пакетов молока? Каждое блюдо поедается только одним членом этой дружной команды.

Решение. Условие задачи не позволяет Малышу и Карлсону одновременно есть одно блюдо. Поэтому тот, кто покончит со своей долей завтрака раньше, вынужден дожидаться своего напарника. Вот если бы им позволялось помогать друг другу, это был бы самый быстрый завтрак в мире! Посчитаем, за какое время был бы съеден завтрак в таком случае. В одиночку Малыш покончил бы с завтраком за 34 мин. Помогая друг другу, они сделают эту работу в три раза быстрее (Карлсон ест за двоих Малышей), т. е. за 34/3 мин. Это тот самый идеал, к которому надо стремиться. По условию задачи время в минутах, затраченное на завтрак, должно быть натуральным числом. Наименьшее такое число, которое больше, чем 34/3, — это число 12. Проверим, можно ли уложиться в этот срок. Вполне! Для этого один пакет молока и оба торта надо отдать лучшему в мире пожирателю тортов — Карлсону. Малышу достанется другой пакет молока и порция мороженого.

Вопрос

Нет ли других вариантов распределения блюд, дающих такое же значение времени?

Задача 8. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа — 40 деталей, ящик третьего типа — 25 деталей. Стоимость пересылки ящиков первого, второго и третьего типов соответственно 200 руб., 100 руб., 70 руб. Какого типа ящики и в каких количествах нужно использовать, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Решение. Поставьте себя на место начальника отдела пересылки (мысленно). Вам надо сэкономить как можно больше (за это вам будет денежная премия). Какой вопрос, прежде всего, придет вам в голову? Нет, не вопрос *"как велика премия?"*, а вопрос *"какие ящики самые выгодные?"*. Стоимость пересылки одной детали в ящиках первого типа (крупные ящики) $20/7$ руб.; в ящиках второго типа (средние ящики) — $5/2$ руб.; в ящиках третьего типа (мелкие ящики) — $14/5$ руб. Самыми выгодными оказываются средние ящики, а самые невыгодными — крупные. Следовательно, средних ящиков надо использовать как можно больше. Наибольшее возможное количество средних ящиков — 25. В них можно разместить 1000 деталей. Если же средних ящиков взять 26, то остальные 60 деталей нельзя разместить ни в мелких, ни в крупных ящиках. Остается 100 деталей, которые, очевидно, можно разместить в четырех мелких ящиках. Стоимость пересылки при этом будет $25 \cdot 100 + 4 \cdot 70 = 2780$ руб. Приведенные рассуждения правдоподобны, но все же мы не перебрали все возможные варианты. Приведем более строгое решение.

Пусть все детали разместились в n средних, x мелких и y крупных ящиках. Тогда

$$40 \cdot n + 25 \cdot x + 70 \cdot y = 1100. \qquad (1.1)$$

Десятая часть стоимости пересылки при этом равна

$$S_1 = 10n + 7x + 20y. \qquad (1.2)$$

Выразим из (1.1) количество самых выгодных ящиков и, подставив в (1.2), получим $S_1 = 275 + (3 \cdot x + 10 \cdot y) / 4$. Величина S_1 должна быть натуральным числом (почему?), поэтому выражение $(3 \cdot x + 10 \cdot y)$ должно делиться на 4 и при этом иметь наименьшее возможное значение. Если взять $y = 0$, то выражение $(3x + 10y)$ при различных натуральных x принимает значения 3, 6, 9, 12, ... Наименьшее значение, которое делится на 4, — это 12. Если же взять $y = 1$, то $(3 \cdot x + 10 \cdot y)$ при целых неотрицательных x принимает значения 10, 13, 16, ... Наименьшее среди них значение, которое делится на 4, — это 16. Если же $y \geq 2$, то $3x + 10y \geq 20$. Таким образом, наилучший вариант будет $y = 0$, $x = 4$. Остается убедиться, что в этом случае n принимает натуральное значение ($n = 25$). Стоимость пересылки при этом $S = 2780$ руб.

Вопрос

Почему бы не взять $y = 0$, $x = 0$? Ведь тогда выражение $(3 \cdot x + 10 \cdot y)$ кратно 4 и принимает наименьшее значение!

Задача 9. Какое наибольшее и наименьшее натуральные числа, в десятичной записи которых нет нулей и единиц, а сумма цифр равна 67?

Решение. Найдем сначала наибольшее такое число. В записи этого числа надо использовать максимальное количество цифр. Для этого надо разбить сумму цифр на самые мелкие возможные слагаемые. Нули и единицы использовать нельзя, поэтому самое мелкое возможное слагаемое — это двойка. Наибольшее количество двоек, которое можно использовать, — это 32 (если взять 33 двойки, то останется одна единица, которую использовать нельзя). Таким образом, искомое число состоит из 32 двоек и одной тройки. Для того чтобы искомое число было наибольшим, тройка должна стоять на первом месте. Итак, наибольшее искомое число — это $322\cdots22$.

Теперь найдем наименьшее число. Для этого надо использовать минимальное количество цифр, т. е. надо использовать самые крупные возможные слагаемые, — девятки. Наибольшее количество девяток, которое можно использовать, — это семь. Остается еще одна четверка, которая, очевидно, должна стоять на первом месте. Итак, наименьшее искомое число — это 49999999.

Замечание

Если в условии задачи идет речь о цифрах в десятичной записи некоторого числа, то ограничения довольно очевидны: наибольшая цифра — 9, наименьшая — 0; первая цифра не может быть нулем.

Рассмотрим еще несколько задач такого типа.

Задача 10. Сколько нужно взять слагаемых в сумме, $1+2+...+n$, чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

Решение. Трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, можно представить в виде $a \cdot 111$, где $a \le 9$ — натуральное число. Сумма всех слагаемых равна $n\cdot(n+1)/2$. Нам нужно найти a и n из равенства $n\cdot(n+1)=2\cdot111\cdot a$. Заметим, что $111 = 37 \cdot 3$. Число 37 простое, поэтому либо n или $(n + 1)$ делится на 37, т. е. имеет вид $37 \cdot k$, где k — натуральное число.

Установим наибольшее возможное значение числа k. Заметим, что $2\cdot111\cdot a\le1998$, значит $n\cdot(n+1)\le1998$. Поскольку $n^2<n\cdot(n+1)$, получаем $n^2<1998$, т. е. $n<45$. Отсюда $k = 1$. Остаются два варианта: либо $n = 37$, либо $n + 1 = 37$. В первом варианте сумма равна 703, а во втором варианте сумма равна 666. Итак, нужно взять 36 слагаемых.

Задача 11. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

1. Первая цифра в три раза меньше последней;

2. Сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8.

Решение. Перебирать все трехзначные числа, проверяя для каждого наличие свойств 1 и 2, — дело хлопотное и неинтересное. Мы начнем решать эту задачу алгебраически и прибегнем к перебору только тогда, когда ее удастся свести к немногим случаям.

Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков искомого числа. Тогда цифра его единиц будет $3x \le 9$, т. е. $x \le 3$. Поскольку нулем первая цифра быть не может, то возможные значения x — это числа один, два или три. Согласно свойству 2, число $(100x + 10y + 3x) + (100x + 30x + y)$ делится на 8 без остатка. Выделим в этой сумме слагаемые, кратные 8, и запишем это число в виде $(232x + 8y) + (x + 3y)$. Отсюда видно, что $(x + 3 \cdot y)$ тоже делится на 8. Теперь можно перебрать по очереди все три варианта.

Вариант 1: $x = 1$. Тогда $3 \cdot y = 8 \cdot k - 1$, где k — натуральное число. Поскольку $3y \le 27$, то $k \le 28/8$, т. е. k может быть равно 1, 2 или 3. При $k = 1$ и $k = 3$ не получается целых значений y, а при $k = 2$ находим $y = 5$. Получаем искомое число 153.

Вариант 2: $x = 2$. Тогда $3 \cdot y = 8 \cdot k - 2$. При $k = 1$ находим $y = 2$, а при $k = 2$ и $k = 3$ целых значений y нет. Получаем искомое число 226.

Вариант 3: $x = 3$. Тогда $3 \cdot y = 8 \cdot k - 3$. При $k = 3$ находим $y = 7$, других целых значений нет. Получили искомое число 379. Все варианты рассмотрены, задача решена. Найдены три решения: 153, 226, 379.

Не всегда ограничения, заложенные в условии задачи, достаточно очевидны. Но их можно обнаружить, если только предположить, что среди нескольких чисел существует *наибольшее* или *наименьшее.* Поясним эту мысль на примере следующей задачи.

Задача 12. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Решение. Одно из решений угадывается довольно просто. В левой части уравнения неизвестные x, y, z равноправны. Предположим, что $x = y = z$ и получаем решение (3, 3, 3). Есть ли другие решения? За что бы здесь "зацепиться"? Да за уже угаданное решение! В угаданном решении все три числа равны. Если существует другое решение, то в тройке чисел x, y, z найдутся наименьшее и наибольшее числа. Допустим, что $x \le y \le z$. Как велико может быть наименьшее число x? Предположим, что $x > 3$. Тогда

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{z} \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Получаем противоречие с условием задачи. Итак, x может принимать значения 1, 2 или 3. Рассмотрим эти варианты.

Пусть $x = 1$, тогда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0,$$

чего не может быть при натуральных y, z.

Пусть $x = 3$, тогда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}.$$

Если при этом $3 < y \le z$, то в этом случае опять получаем противоречие:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Случай $y = 3$ уже найден угадыванием. Остается единственная возможность: $x = 2$. Тогда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Продолжим в том же духе. Предположим, что $y > 4$. Тогда

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$