А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Часть 5

- Операционное исчисление
- Элементы теории устойчивости
- Теория вероятностей
- Математическая статистика

Для студентов учреждений высшего образования

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Цегельник*); заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*

Рябушко, А. П.

Р98 Высшая математика : теория и задачи : учебное пособие. В 5 ч. Ч. 5. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2018. – 335 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2815-2.

Это пятая часть комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной, творческой работы студентов технических университетов. Содержатся необходимые теоретические сведения, наборы задач для аудиторных и индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2815-2 (ч. 5)
ISBN 978-985-06-2764-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя комплекс учебных пособий под общим названием «Высшая математика: теория и задачи» в пяти частях содержит в своей основе существенно переработанный и дополненный материал неоднократно переиздававшегося комплекса учебных пособий «Индивидуальные задания по высшей математике» в четырех частях коллектива авторов под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.П. Рябушко (Минск, издательство «Вышэйшая школа»).

В новом комплексе многие задачи заменены более удачными, добавлено несколько сот новых задач, увеличено количество аудиторных занятий (АЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), блочных контрольных работ (БКР), дополнительных задач к каждой главе, среди которых имеются задачи уровня НИРС (научно-исследовательская работа студентов). Номера этих задач помечены звездочкой. Во всех АЗ выделены задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать для проведения на АЗ мини-контрольных работ (МКР). К каждому ИДЗ дается письменная консультация (решение типового варианта). Чтобы сэкономить время студента при выполнении МКР, ИДЗ и других заданий, в пособие включены необходимые теоретические сведения с поясняющими их решенными примерами.

Большинство имеющихся в настоящее время учебников и учебных пособий, сборников задач и упражнений по общему курсу высшей математики для технических университетов не позволяют индивидуализировать обучение, так как содержат недостаточное количество однотипных задач и упражнений, не предусматривают выдачи каждому студенту индивидуального задания с последующим контролем и выставлением оценки. Данное пособие дает возможность перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Появляется возможность введения инновационных технологий в преподавание математики, например блочно-рейтинговой системы обучения и контроля знаний и умений студентов (см. приложения).

Комплекс написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме до 500 ч для технических специальностей университетов, но может быть использован в учреждениях образования разных профилей, где количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше (для чего из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку). Кроме того, он вполне доступен студентам вечерних и заочных отделений.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, возглавляемой доктором физико-математических наук, профессором В.В. Цегельником, а также заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, которые дали ряд полезных советов, способствовавших повышению качества комплекса.

Все отзывы и пожелания, которые авторы примут с благодарностью, просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

17. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

17.1. Оригинал и изображение по Лапласу

Начальной функцией или *оригиналом* называют функцию $f(t)$ действительной переменной t, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) существуют вещественные числа $M > 0$ и s такие, что

$$\left|f(t)\right| \leqslant Me^{st} \text{ при } t \geqslant 0; \qquad (17.1)$$

3) $f(t)$ – кусочно-непрерывная и интегрируемая на любом конечном отрезке изменения t.

Точная нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых выполняется неравенство (17.1), называется *показателем роста функции* $f(t)$.

Если существует несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad (17.2)$$

где $p = a + bi$; $\mathrm{Re}\, p = a > 0$; $\mathrm{Im}\, p = b$, то функцию $F(p)$ комплексной переменной p называют *изображением функции* $f(t)$ *по Лапласу*, или ее *лапласовым изображением*, или просто *изображением*.

Правило (17.2) получения по заданному оригиналу $f(t)$ изображения $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа*.

Если $\mathrm{Re}\, p = a \geqslant s > s_0$ и выполняется условие (17.1), то можно доказать, что несобственный интеграл (17.2) абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в полуплоскости $a > s_0$ (рис. 17.1). При этом

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p \to +\infty} F(p) = 0. \qquad (17.3)$$

Если $F(p)$ – лапласово изображение $f(t)$, то кратко это записывается в виде $F(p) \risingdotseq f(t)$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Можно доказать, что всякому изображению $F(p)$, удовлетворяющему условию (17.3), соответствует единственная начальная функция (оригинал). Принятые обозначения: $f(t) \risingdotseq F(p)$ или $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

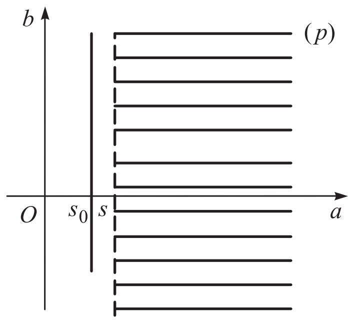

Рис. 17.1

Пример 1. Найти изображение единичной *функции Хевисайда*

$$\sigma_0(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 1 & \text{при } t\geqslant 0.\end{cases}$$

График функции $\sigma_0(t)$ приведен на рис. 17.2.

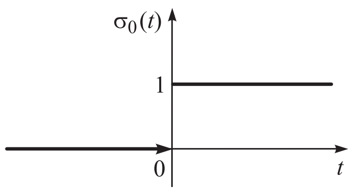

Рис. 17.2

▸ Очевидно, что $\sigma_0(t)$ удовлетворяет всем условиям оригинала и $s_0=0$. По формуле (17.2) имеем:

$$L\{\sigma_0(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p},$$

так как $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty}e^{-pt}=0$. Следовательно, $L\{\sigma_0(t)\}=\dfrac{1}{p}$, т.е. $\sigma_0(t)\doteqdot\dfrac{1}{p}$. ◂

Пример 2. Найти изображение $F(p)$ функции $e^{\alpha t}$, где $\alpha\in\mathbf{R}$.

▸ Имеем:

$$L\{e^{\alpha t}\}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-\alpha)t}dt=-\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-\alpha},$$

если $\operatorname{Re} p>\alpha=s_0$.

Следовательно, $e^{\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p-\alpha}$. ◀

З а м е ч а н и е. Из определения оригинала следует, что не всякая функция $f(t)$ является оригиналом. Например, при невыполнении условия (17.1) нет гарантии сходимости интеграла (17.2). Если интеграл (17.2) расходится, то говорят, что функция $f(t)$ не является оригиналом. Нетрудно показать, например, что функции $f(t)=1/t$, $f(t)=e^{t^3}$, $f(t)=e^{1/t^2}$ не являются оригиналами, так как интеграл (17.2) для них расходится.

Перечислим *основные свойства оригиналов и изображений.*

1. *Свойство линейности.* Если $F_k(p) \doteqdot f_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p), \tag{17.4}$$

где c_k – любые действительные или комплексные числа.

2. *Теорема смещения.* Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого комплексного числа α имеем:

$$e^{\alpha t} f(t) \doteqdot F(p-\alpha), \quad \operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha. \tag{17.5}$$

3. *Теорема подобия.* Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\lambda > 0$, то

$$f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{17.6}$$

4. *Теорема о дифференцировании изображения.* Если $f(t) \doteqdot$ $\doteqdot F(p)$, то

$$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \doteqdot t^n f(t). \tag{17.7}$$

5. *Теорема о дифференцировании оригинала.* Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\left.\begin{aligned} f'(t) &\doteqdot pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(t) &\doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

Если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p)$.

6. *Теорема запаздывания*. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для $t_0 > 0$

$$f(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0} F(p). \tag{17.9}$$

Сверткой двух функций $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$, обозначаемой $f_1(t) * f_2(t)$, называется функция, определяемая равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Если $f_1(t)$, $f_2(t)$ – оригиналы, т.е. $f_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau > t$, то их свертка представима в следующем виде:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \tag{17.10}$$

Свертка двух оригиналов является оригиналом. Для нее справедливы следующие свойства:

1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность);

2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность);

3) $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * f_3 = c_1 (f_1 * f_3) + c_2 (f_2 * f_3)$ (линейность).

7. *Теорема Бореля, или теорема свертывания*. Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p) F_2(p). \tag{17.11}$$

Формула (17.11) называется *формулой умножения изображений*. Она часто применяется для восстановления оригинала по его изображению.

8. *Теорема об интегрировании оригинала*. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{17.12}$$

9. *Теорема об интегрировании изображения*. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int_p^{+\infty} F(z) dz$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty} F(z) dz. \tag{17.13}$$

10. *Теорема об изображении периодической функции*. Пусть $f(t)$ – периодическая функция периода T и $f(t) \doteqdot F(p)$. Если

$F_0(p)$ – изображение функции $f(t)(\sigma_0(t)-\sigma_0(t-T))$, т.е. $F_0(p)=\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt$, то

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}},\ \operatorname{Re} p>0. \qquad (17.14)$$

С целью проверки правильности полученных результатов в операционном исчислении часто используют *предельные соотношения*.

11. *Теорема о предельных соотношениях*. Если $f(t)$, $f'(t)$ – оригиналы и $f(t)\doteqdot F(p)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=\lim_{t\to\infty} f(t), \qquad (17.15)$$

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to +\infty} pF(p)=\lim_{t\to 0+} f(t)=f(0). \qquad (17.16)$$

Соотношения (17.15) и (17.16) называются *предельными соотношениями связи между изображением и оригиналом*.

12. *Формула Дюамеля*. При решении ряда практических задач используется формула Дюамеля

$$pF_1(p)F_2(p)\doteqdot f_1(t)f_2(0)+\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau, \qquad (17.17)$$

где $f_1(t)$ – непрерывная функция; $f_2(t)$ имеет непрерывную производную; $F_1(p)\doteqdot f_1(t)$; $F_2(p)\doteqdot f_2(t)$.

Пример 3. Найти изображения оригиналов $f(t)=\sin t$ и $f(t)=\cos t$.

▸ Известно, что $\sin t=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ и $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. Тогда из свойства 1 следует:

$$\sin t\doteqdot\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{1}{2i}\frac{2i}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1},$$

$$\cos t\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right)=\frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}.$$

Итак, $\sin t\doteqdot\dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t\doteqdot\dfrac{p}{p^2+1}$. ◂

Пример 4. Записать изображения указанных функций-оригиналов: $\sin\beta t$, $\cos\beta t$, $\operatorname{sh}\beta t$, $\operatorname{ch}\beta t$.

▸ Поскольку известны изображения для $\sin t$ и $\cos t$, то изображения $\sin\beta t$ и $\cos\beta t$ могут быть найдены с помощью теоремы подобия (см. формулу (17.6)):

$$\sin\beta t \doteqdot \frac{1}{\beta}\frac{1}{(p/\beta)^2+1}=\frac{1}{\beta}\frac{\beta^2}{p^2+\beta^2}=\frac{\beta}{p^2+\beta^2},$$

$$\cos\beta t \doteqdot \frac{1}{\beta}\frac{p/\beta}{(p/\beta)^2+1}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\beta^2 p}{p^2+\beta^2}=\frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

Далее:

$$\operatorname{sh}\beta t=\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2},\quad \operatorname{ch}\beta t=\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}.$$

Тогда из примера 2 и свойства линейности следует:

$$\operatorname{sh}\beta t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta}-\frac{1}{p+\beta}\right)=\frac{\beta}{p^2-\beta^2},$$

$$\operatorname{ch}\beta t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta}+\frac{1}{p+\beta}\right)=\frac{p}{p^2-\beta^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти изображения оригиналов $e^{\alpha t}\sin\beta t$ и $e^{\alpha t}\cos\beta t$.

▸ Поскольку $\sin\beta t \doteqdot \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$, $\cos\beta t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$, то из теоремы смещения следует, что

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\quad e^{\alpha t}\cos\beta t \doteqdot \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти изображения оригиналов: t, t^n, $t^n e^{\alpha t}$, $t\sin\beta t$, $t\cos\beta t$.

▸ Известно, что $\sigma_0(t)\doteqdot 1/p$. Тогда по правилу дифференцирования изображения находим:

$$t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^2},\quad t^2 \doteqdot (-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{2!}{p^3},$$

$$t^3 \doteqdot -\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{2!}{p^3}\right)=\frac{3!}{p^4},\ \ldots,\ t^n \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{(n-1)!}{p^n}\right)=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Из теоремы смещения следует, что

$$t^n e^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

Зная изображения $\sin\beta t$ и $\cos\beta t$, из теоремы о дифференцировании изображения получаем:

$$t\sin\beta t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right)=\frac{2\beta p}{(p^2+\beta^2)^2},$$

$$t\cos\beta t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\beta^2}\right)=-\frac{p^2+\beta^2-2p^2}{(p^2+\beta^2)^2}=\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти изображения оригиналов:

а) $e^{-5t}\sin\pi t$; б) $\operatorname{ch}2t\cos 3t$; в) $\sin 5t\cos 2t$.

▶ а) Так как $\sin\pi t \doteqdot \frac{\pi}{p^2+\pi^2}$, то по свойству смещения

$$e^{-5t}\sin\pi t \doteqdot \frac{\pi}{(p+5)^2+\pi^2}.$$

б) Поскольку $\operatorname{ch}2t\cos 3t=\frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})\cos 3t$, то из свойства линейности и теоремы смещения следует, что

$$\operatorname{ch}2t\cos 3t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{(p-2)^2+9}+\frac{p+2}{(p+2)^2+9}\right).$$

в) Так как $\sin 5t\cos 2t=\frac{1}{2}(\sin 7t+\sin 3t)$, то из свойства линейности следует, что

$$\sin 5t\cos 2t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{7}{p^2+49}+\frac{3}{p^2+9}\right). \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти изображения оригиналов:

а) $\int\limits_0^t (e^{-5z}\operatorname{ch}2z+e^{3z}\sin 4z)dz$; б) $\int\limits_0^t (z^5-4z^4+3z^2-2z)e^{2z}dz$.

▶ а) Найдем изображение оригинала $f(t)=e^{-5t}\operatorname{ch}2t+e^{3t}\sin 4t$. Из свойства линейности и теорем подобия и смещения получаем:

$$e^{-5t}\operatorname{ch}2t+e^{3t}\sin 4t \doteqdot \frac{p+5}{(p+5)^2-4}+\frac{4}{(p-3)^2+16}.$$

Тогда согласно правилу интегрирования оригинала имеем:

$$\int_0^t (e^{-5z}\operatorname{ch}2z+e^{3z}\sin 4z)dz \doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{p+5}{(p+5)^2-4}+\frac{4}{(p-3)^2+16}\right).$$

б) Найдем изображение оригинала:

$$t^5-4t^4+3t^2-2t \doteqdot \frac{5!}{p^6}-\frac{4\cdot 4!}{p^5}+\frac{6}{p^3}-\frac{2}{p^2}.$$

Тогда по теореме смещения

$$(t^5-4t^4+3t^2-2t)e^{2t} \doteqdot \frac{5!}{(p-2)^6}-\frac{4\cdot 4!}{(p-2)^5}+\frac{6}{(p-2)^3}-\frac{2}{(p-2)^2}.$$

Использовав теорему об интегрировании оригинала, получим:

$$\int_0^t (z^5-4z^4+3z^2-2z)e^{2z}dz \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{120}{(p-2)^6}-\frac{96}{(p-2)^5}+\frac{6}{(p-2)^3}-\frac{2}{(p-2)^2}\right). ◀$$

Пример 9. Найти оригиналы следующих изображений:
а) $\dfrac{1}{p(p^2+9)}$; б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$; в) $\dfrac{1}{(p+2)^3}$.

▶ а) Поскольку $\dfrac{1}{p^2+9}=\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{p^2+9}\doteqdot\dfrac{1}{3}\sin 3t$, то по теореме об интегрировании оригинала

$$\frac{1}{p(p^2+9)} \doteqdot \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3z dz = -\frac{1}{9}\cos 3z\Big|_0^t = \frac{1}{9}(1-\cos 3t).$$

б) На основании формулы (17.12) с учетом результатов, полученных в п. «а», имеем:

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2+9} \doteqdot \int_0^t \frac{1}{9}(1-\cos 3z)dz = \frac{1}{9}\left(z-\frac{1}{3}\sin 3z\right)\Big|_0^t = \frac{1}{9}\left(t-\frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

в) Поскольку $t^2 \doteqdot \dfrac{2!}{p^3}$, то $\dfrac{1}{p^3} \doteqdot \dfrac{t^2}{2!}$. На основании теоремы смещения получаем:

$$\frac{1}{(p+2)^3} \doteqdot e^{-2t}\frac{t^2}{2!}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{1-\cos 2t}{t}e^{-5t}$.

▸ Поскольку функция $f(t)$ непрерывна при всех $t>0$ и

$$\lim_{t\to+0} f(t)=\lim_{t\to+0}\frac{1-\cos 2t}{t}e^{-5t}=\lim_{t\to+0}2\frac{\sin t}{t}\cdot\sin t\cdot e^{-5t}=0,$$

то она является оригиналом. Очевидно, что $1-\cos 2t \doteqdot \dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4}$. Из правила интегрирования изображения следует, что

$$\frac{1-\cos 2t}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)dz=\lim_{\beta\to\infty}\int_p^{\beta}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)dz=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln z-\frac{1}{2}\ln(z^2+4)\right)\Bigg|_p^{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}\ln\frac{z}{\sqrt{z^2+4}}\Bigg|_p^{\beta}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4}}-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right)=\ln 1+\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$$

Применив теорему смещения, получим:

$$\frac{1-\cos 2t}{t}e^{-5t} \doteqdot \ln\frac{\sqrt{(p+5)^2+4}}{p+5}=\ln\frac{\sqrt{p^2+10p+29}}{p+5}. \blacktriangleleft$$

Пример 11. Найти изображение оригинала $\cos(2t-\pi)$, $t \geqslant \pi/2$.

▸ Известно, что $\cos 2t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+4}$ (см. пример 4). Тогда на основании теоремы запаздывания получаем:

$$\cos(2t-\pi)=\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \doteqdot e^{-\pi p/2}\frac{p}{p^2+4}. \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти свертку оригиналов $\cos 3t$ и $\sin t$ и изображение свертки.

▸ Согласно определению свертки

$$\cos 3t * \sin t = \int_0^t \cos 3\tau \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sin(t+2\tau)+\sin(t-4\tau)\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(t+2\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{4}\cos(t-4\tau)\Big|_0^t \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos t \right) = -\frac{1}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t.$$

Следовательно, $\cos 3t * \sin t = -\frac{1}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t$.

Изображение полученного оригинала находим с учетом свойства линейности и теоремы подобия:

$$\cos 3t * \sin t \doteqdot -\frac{1}{8}\frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{8}\frac{p}{p^2+1} =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{-p^3 - p + p^3 + 9p}{(p^2+9)(p^2+1)} = \frac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}.$$

Тот же результат можно получить другим путем. Известно, что $\cos 3t \doteqdot \frac{p}{p^2+9}$, $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$ (см. пример 4). На основании теоремы Бореля имеем:

$$\cos 3t * \sin t \doteqdot \frac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}. \blacktriangleleft$$

Пример 13. Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}.$$

▸ Представим изображение в виде

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+4}.$$

Поскольку $\frac{1}{p^2+4} \doteqdot \frac{1}{2}\sin 2t$, $\frac{p}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t$, то на основании формулы (17.11)

$$\frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t * \frac{1}{2}\sin 2t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2\tau \sin(2t-2\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t (\sin 2t + \sin(2t-4\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tau \sin 2t\Big|_0^t + \frac{1}{4}\cos(2t-4\tau)\Big|_0^t\right) = \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 2t =$$

$$= \frac{1}{4}t\sin 2t = f(t). \blacktriangleleft$$

Пример 14. Найти изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2-t, & 1 \leqslant t < 2, \end{cases}$$

периодически продолженного на интервал $[0, +\infty)$ с периодом $T = 2$ (рис. 17.3).

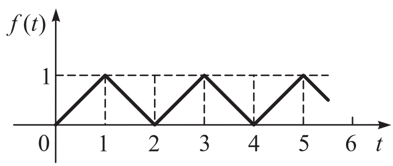

Рис. 17.3

$\blacktriangleright$ Поскольку оригинал периодический, то согласно формуле (17.14)

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}F_0(p),$$

где $T = 2$; $F_0(p) = \int_0^2 f(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 te^{-pt}dt + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}dt.$

Интегрируя по частям, находим:

$$\int_0^1 te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}te^{-pt}dt\Big|_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt =$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1 = -\frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p},$$

$$\int_1^2 (2-t)e^{-pt}dt = -(2-t)\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{p}e^{-pt}dt =$$

$$= \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^2 = \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-p}.$$

Следовательно,

$$F_0(p) = -\frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-p} =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}.$$

Изображением для $f(t)$ будет функция

$$F(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-2p})} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-2p})} = \frac{1}{p^2}\frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}. ◀$$

Пример 15. Найти изображение периодической системы импульсов, приведенных на рис. 17.4.

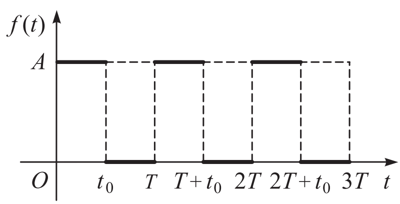

Рис. 17.4

▶ Заданную графически периодическую функцию $f(t)$ с периодом T можно с помощью единичной функции Хевисайда $\sigma_0(t)$ представить аналитически:

$$f(t) = \begin{cases} A\sigma_0(t) & \text{при } 0 \leqslant t < t_0, \\ 0 & \text{при } t_0 \leqslant t < T, \end{cases}$$

поэтому

$$F_0(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{t_0} Ae^{-pt}dt = -\frac{A}{p}e^{-pt}\Big|_0^{t_0} = \frac{A}{p} - \frac{Ae^{-pt_0}}{p}.$$

Тогда из формулы (17.14) следует, что

$$f(t) \risingdotseq \frac{A}{p(1-e^{-pT})}(1-e^{-pt_0}) = \frac{A(1-e^{-pt_0})}{p(1-e^{-pT})}. \blacktriangleleft$$

Пример 16. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = \frac{5p^2}{(p^2+4)^2}.$$

$\blacktriangleright$ Представим $F(p)$ в виде произведения $5p\dfrac{p}{p^2+4}\dfrac{1}{p^2+4}$. Поскольку $\dfrac{p}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t$, $\dfrac{1}{p^2+4} \risingdotseq \dfrac{1}{2}\sin 2t$, то по формуле Дюамеля (17.17) получим:

$$5p\frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+4} \risingdotseq 5\frac{d}{dt}\left(\cos 2t * \frac{1}{2}\sin 2t\right) = 5\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos 2\tau \cdot \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau)d\tau\right) =$$

$$= 5\int_0^t \cos 2\tau \cdot \cos 2(t-\tau)d\tau = \frac{5}{2}\int_0^t (\cos 2t - \cos(2t-4\tau))d\tau =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\tau\cos 2t + \frac{1}{4}\sin(2t-4\tau)\right)\Bigg|_0^t = \frac{5}{2}\left(t\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(t\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) = f(t). \blacktriangleleft$$

Пример 17. Записать изображение дифференциального выражения $2f''(t) - 3f'(t) + f(t)$, если $F(p) \risingdotseq f(t)$ и $f(0)=1$, $f'(0)=-1$.

$\blacktriangleright$ По формулам (17.8) имеем:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - 1, \quad f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - p + 1.$$

Тогда из свойства линейности следует, что

$$2f''(t) - 3f'(t) + f(t) \risingdotseq 2p^2F(p) - 2p + 2 - 3pF(p) + 3 + F(p) =$$
$$= (2p^2 - 3p + 1)F(p) - 2p + 5. \blacktriangleleft$$

Основные свойства изображений Лапласа приведены в прил. 1, наиболее часто встречающиеся при решении задач оригиналы и их изображения – в прил. 2.

В математике и различных ее приложениях, например в механике, электротехнике, теории автоматического регулирования, широко используются так называемые *импульсные функции* и их изображения. Рассмотрим функцию

$$\sigma_1(t,\ h) = \frac{1}{h}(\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1/h & \text{при } 0 \leqslant t < h, \\ 0 & \text{при } h \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

график которой приведен на рис. 17.5.

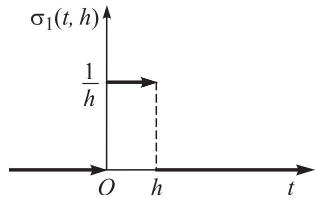

Рис. 17.5

Если данную функцию интерпретировать как силу, действующую в промежуток времени от 0 до h, а в остальное время равную нулю, то очевидно, что импульс этой силы равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(t,\ h)dt = 1.$

Поскольку изображение функции Хевисайда $\sigma(t)$ известно, то, пользуясь свойством линейности изображения, получаем:

$$\sigma_1(t,\ h) \doteqdot \frac{1}{p}\frac{e^{-ph}}{h}.$$

В механике часто рассматривают силы, действующие в очень короткий промежуток времени (или, как говорят, «мгновенно») и имеющие конечный импульс, поэтому была введена функция $\delta(t) = \lim\limits_{h \to 0} \sigma_1(t,\ h),$ которая называется *единичной импульсной функцией* или *дельта-функцией Дирака*.

Изложенное выше позволяет считать, что по определению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$. Последнее равенство можно записать также в виде $\int\limits_{0}^{0} \delta(t)dt = 1$. Тогда

$$\delta(t) \doteqdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\frac{1 - e^{-ph}}{p} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{p}\frac{pe^{-ph}}{1} = 1.$$

Здесь при нахождении предела было применено правило Лопиталя.

Рассмотрим $\delta(t)$ как силу, действующую на материальную точку единичной массы. Для этого найдем решение дифференциального уравнения $s''(t) = \delta(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$. Его операторное уравнение $p^2\tilde{s}(p) = 1$, откуда $\tilde{s}(p) = \dfrac{1}{p^2}$, $s(t) = t$, $v(t) = 1$. Таким образом, функцию $\delta(t)$ можно трактовать как силу, сообщающую материальной точке единичной массы в момент времени $t = 0$ скорость, равную единице.

Функцию $\delta(t - t_0) \doteqdot e^{-pt_0}$ можно считать импульсной силой, действующей в момент времени t_0.

Рассмотрим уравнение $s''(t) = f(t) + \delta(t)$ с начальными условиями $s(0) = s'(0) = 0$. Его операторное уравнение

$$p^2\tilde{s}(p) = F(p) + 1, \quad \tilde{s}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2},$$

откуда $s(t) = \int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau + t$. Очевидно, что к такому же результату придем, решив уравнение $s''(t) = f(t)$ при других начальных условиях: $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$.

Из определения $\delta(t)$ следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

т.е. $\sigma_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$ – единичная функция Хевисайда. Дифференцируя обе части последнего равенства, получаем: $\delta(t) = \sigma_0'(t)$.

Введем функцию

$$\delta_{1,h}(t) = (\delta_h(t-h))' = \begin{cases} 1/h^2 & \text{при } 0 \leqslant t < h, \\ -1/h^2 & \text{при } h \leqslant t < 2h, \\ 0 & \text{при } -\infty < t < 0,\ 2h \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

изображенную на рис. 17.6. Для нее определим *импульсную функцию второго порядка* $\delta_1(t)$ по формуле $\delta_1(t) = \lim\limits_{h \to 0} \delta_{1,h}(t)$. Функция $\delta_1(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\delta_1(t) = 0$ при $t \neq 0$;

2) $\delta_1(-0) = -\infty$, $\delta_1(+0) = +\infty$;

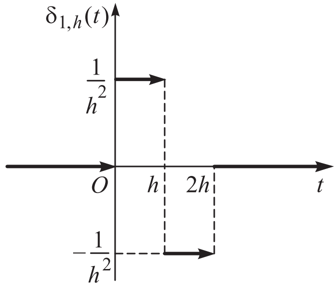

Рис. 17.6

3) $\int\limits_{-\infty}^{t}\delta_1(\tau)d\tau=\delta(t),\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_1(t)dt=0,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\int\limits_{-\infty}^{t}\delta_1(\tau)d\tau=1.$

Изображение $\delta_1(t)$ находим как предел при $h\to 0$ изображения функции $\delta_{1,h}(t)$, которое определяется формулой

$$\delta_{1,h}(t)\doteqdot\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2e^{-ph}}{p}+\frac{e^{-2ph}}{p}\right)=\frac{1}{h^2p}(1-e^{-ph})^2,$$

т.е. $L\{\delta_1(t)\}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2p}(1-e^{-ph})^2=p,\ \delta_1(t)\doteqdot p.$

Найдем, например, решение дифференциального уравнения $s''(t)=\delta_1(t)$ при нулевых начальных условиях. Имеем соответствующее операторное уравнение $p^2\tilde{s}(p)=p$. Далее $\tilde{s}(p)=1/p$, $s(t)=1\ (t>0)$. Это означает, что импульсная сила второго порядка $\delta_1(t)$ сообщает материальной точке единичной массы мгновенное перемещение на единицу длины без дальнейшего движения.

17.2. Нахождение оригиналов по изображениям

В предыдущем параграфе описана методика получения изображений многих элементарных функций, т.е. установлено соответствие оригиналов и их изображений, а также на простейших примерах показано, как по изображению найти оригинал.

Следующей важной задачей операционного исчисления является нахождение функций-оригиналов по их изображениям. В общем случае эта задача является достаточно сложной.

Как известно, для того чтобы функция $F(p)$ была изображением некоторой функции $f(t)$, достаточно выполнения следующих условий:

1) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = a > S_0$;

2) $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$, если $\operatorname{Re} p > s_0$;

3) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(a+bi)|db$ сходится.

При выполнении указанных условий справедливы формулы:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{17.18}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int\limits_{a-bi}^{a+bi} F(p)e^{pt}dp, \tag{17.19}$$

где $p = a+bi$; $i = \sqrt{-1}$.

Формулы (17.18) и (17.19) называются соответственно *прямым* и *обратным преобразованиями Лапласа*. Для практических целей формула (17.19) малопригодна, так как требует знания методов нахождения интегралов от известных аналитических функций комплексной переменной $p = a+bi$, где $-\infty < b < +\infty$, поэтому чаще используют *вторую теорему о разложении*, которая приведена ниже.

Теорема. *Если* $F(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, *где* $P_m(p)$ *и* $Q_n(p)$ *являются многочленами комплексной переменной* p *степеней* m *и* n $(m < n)$; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– корни многочлена* $Q_n(p)$ *кратностей* $l_1, l_2, \ldots, l_k$ *соответственно* $(l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n)$, *то*

$$f(t) = \sum_{r=1}^{k}\frac{1}{(l_r-1)!}\lim_{p\to p_r}\frac{d^{l_r-1}}{dp^{l_r-1}}((p-p_r)^{l_r}F(p)e^{pt}). \tag{17.20}$$

В частности, если все корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *многочлена* $Q_n(p)$ *простые, то*

$$f(t) = \sum_{r=1}^{k}\frac{P_m(p_r)}{Q_n'(p_r)}e^{p_r t}. \tag{17.21}$$

З а м е ч а н и е. В том случае, когда число корней целой функции бесконечно велико, суммы (17.20) и (17.21) становятся бесконечными, т.е. функциональными рядами ($k=\infty,\ n=\infty$).

Пример 1. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p+2)}$.

▶ Корни многочлена $Q_3(p)=p(p-1)(p+2)$ – простые и $p_1=0,\ p_2=1$, $p_3=-2$. Находим:

$$Q_3'(p)=(p-1)(p+2)+p(p+2)+p(p-1),$$
$$Q_3'(0)=-2,\quad Q_3'(1)=3,\quad Q_3'(-2)=6.$$

Тогда из формулы (17.21) следует, что

$$f(t)=-\frac{1}{2}e^{0\cdot t}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}. ◀$$

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

▶ Знаменатель $Q_4(p)=p^2(p^2+1)$ имеет один действительный корень $p_1=0$ кратности $l_1=2$ и два простых комплексных корня: $p_2=i$, $p_3=-i$. Находим:

$$\lim_{p\to p_1}\frac{d}{dp}\left(p^2\frac{1}{(p^2+1)}e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\left(-\frac{2p}{(p^2+1)^2}e^{pt}+\frac{te^{pt}}{p^2+1}\right)=t.$$

Поскольку $Q_4'(p)=2p(p^2+1)+2p^3$, то из формулы (17.20) следует, что

$$f(t)=t+\frac{1}{4i^3+2i}e^{it}+\frac{1}{4(-i)^3-2i}e^{-it}=t+\frac{i}{4-2}e^{it}-\frac{i}{4-2}e^{-it}=$$
$$=t+\frac{1}{2}i(\cos t+i\sin t)-\frac{1}{2}i(\cos t-i\sin t)=t-\sin t. ◀$$

Пример 3. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{\operatorname{ch} p}{p\operatorname{sh} p}$.

▶ Целая функция $Q(p)=p\operatorname{sh} p$ имеет один действительный корень $p_0=0$ кратности $l=2$ и счетное число мнимых корней $p_k=\pm k\pi i$, $k=1,2,\ldots$. Тогда находим: $Q'(p)=\operatorname{sh} p+p\operatorname{ch} p$ и $Q'(p_k)=\pm k\pi i\operatorname{ch}(k\pi i)=$ $=\pm k\pi i\cos k\pi=\pm k\pi i(-1)^k$, поэтому из формулы (17.21) следует, что мнимым корням знаменателя изображения соответствуют в оригинале слагаемые

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k\pi i(-1)^k}e^{k\pi it}+\frac{(-1)^k}{-k\pi i(-1)^k}e^{-k\pi it}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ik\pi}(e^{k\pi it}+e^{-k\pi it})=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}2\sin k\pi t=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi t.$$

Слагаемое оригинала, соответствующее корню $p_0=0$ кратности $l=2$, равно

$$\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(p^2\frac{\operatorname{ch}p}{p\operatorname{sh}p}e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch}p}{\operatorname{sh}p}e^{pt}-e^{pt}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 p}p+\frac{p\operatorname{ch}p}{\operatorname{sh}p}te^{pt}\right)=$$

$$=\lim_{p\to 0}\left(\frac{p}{\operatorname{sh}p}\operatorname{ch}pte^{pt}+e^{et}\frac{\operatorname{ch}p\operatorname{sh}p-p}{\operatorname{sh}^2 p}\right)=$$

$$=t\lim_{p\to 0}\operatorname{ch}p+\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{ch}^2 p+\operatorname{sh}^2 p-1}{2\operatorname{sh}p\operatorname{ch}p}=t+\lim_{p\to 0}\frac{2\operatorname{sh}p+1-1}{2\operatorname{sh}p\operatorname{ch}p}=t.$$

(Для раскрытия неопределенностей было использовано правило Лопиталя.)

Таким образом, искомый оригинал $f(t)=t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi t.$ ◂

На практике вместо формул (17.20) и (17.21) часто пользуются теоремой о разложении правильных рациональных дробей $F(p)=\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$ в сумму простейших рациональных дробей, как это делали при интегрировании рациональных дробей. Изображение в данном случае можно разложить в сумму простейших рациональных дробей указанных ниже типов.

I. $\frac{A}{p-\alpha}$.

II. $\frac{A}{(p-\alpha)^k}$, $k\geqslant 2$.

III. $\frac{Bp+C}{p^2+a_1p+a_2}$, $a_1^2-4a_2<0$.

IV. $\frac{Bp+C}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$.

Для нахождения оригиналов, соответствующих дробям I–III типа, используют следующие формулы:

для дроби типа I

$$\frac{A}{p-\alpha}\doteqdot Ae^{\alpha t}; \qquad (17.22)$$

для дроби типа II

$$\frac{A}{(p-\alpha)^k}\doteqdot\frac{A}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\alpha t}; \qquad (17.23)$$

для дроби типа III

$$\frac{Bp+C}{p^2+a_1p+a_2} \doteqdot e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(B\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{C-\frac{Ba_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right). \quad (17.24)$$

Оригинал, соответствующий дроби IV типа, весьма громоздкий, поэтому мы его не приводим. В некоторых случаях он может быть получен более простым путем с использованием свойств оригиналов и их изображений.

Пример 4. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{3p-2}{p(p-1)(p+3)}$.

▸ Функция $F(p)$ разложима в сумму простейших дробей вида

$$F(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+3}.$$

Дроби в правой части последнего равенства приводим к общему знаменателю. Числитель полученной дроби приравниваем к $3p-2$:

$$3p-2=A(p-1)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p-1).$$

При $p=0$ имеем уравнение $-2=-3A$, $A=2/3$, при $p=1$ – уравнение $1=4B$, $B=1/4$, а при $p=-3$ – уравнение $-11=12C$, $C=-11/12$. Следовательно,

$$F(p)=\frac{2/3}{p}+\frac{1/4}{p-1}+\frac{11/12}{p+3}.$$

По формуле (17.22) находим оригинал:

$$f(t)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}e^{t}-\frac{11}{12}e^{-3t}.$$

Пример 5. Найти оригинал по изображению

$$F(p)=\frac{p+3}{p^4+5p^2+4}.$$

▸ Данное изображение представим в виде

$$\frac{p+3}{p^4+5p^2+4}=\frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ