А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Часть 4

- Криволинейные интегралы
- Элементы теории поля
- Функции комплексной переменной

Для студентов учреждений высшего образования

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Рецензенты: кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Цегельник*); заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Рябушко, А. П.

Р98 Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 4. Криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Функции комплексной переменной / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 255 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2814-5.

Это четвертая часть комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной, творческой работы студентов технических университетов. Содержатся необходимые теоретические сведения, наборы задач для аудиторных и индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2814-5(ч. 4)
ISBN 978-985-06-2764-3

© Рябушко А.П., Жур Т.А., 2017
© Оформление. УП «Издательство “Вышэйшая школа”», 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя комплекс учебных пособий под общим названием «Высшая математика: теория и задачи» в пяти частях содержит в своей основе существенно переработанный и дополненный материал неоднократно переиздававшегося комплекса учебных пособий «Индивидуальные задания по высшей математике» в четырех частях коллектива авторов под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.П. Рябушко (Минск, издательство «Вышэйшая школа»).

В новом комплексе многие задачи заменены более удачными, добавлено несколько сот новых задач, увеличено количество аудиторных занятий (АЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), блочных контрольных работ (БКР), дополнительных задач к каждой главе, среди которых имеются задачи уровня НИРС (научно-исследовательская работа студентов). Номера этих задач помечены звездочкой. Во всех АЗ выделены задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать для проведения на АЗ мини-контрольных работ (МКР). К каждому ИДЗ дается письменная консультация (решение типового варианта). Чтобы сэкономить время студента при выполнении МКР, ИДЗ и других заданий, в пособие включены необходимые теоретические сведения с поясняющими их решенными примерами.

Большинство имеющихся в настоящее время учебников и учебных пособий, сборников задач и упражнений по общему курсу высшей математики для технических университетов не позволяют индивидуализировать обучение, так как содержат недостаточное количество однотипных задач и упражнений, не предусматривают выдачи каждому студенту индивидуального задания с последующим контролем и выставлением оценки. Данное пособие дает возможность перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Появляется возможность введения инновационных технологий в преподавание математики, например блочно-рейтинговой системы обучения и контроля знаний и умений студентов (см. приложения).

Комплекс написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме до 500 ч для

технических специальностей университетов, но может быть использован в учреждениях образования разных профилей, где количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше (для чего из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку). Кроме того, он вполне доступен студентам вечерних и заочных отделений.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, возглавляемой доктором физико-математических наук, профессором В.В. Цегельником, а также заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, которые дали ряд полезных советов, способствовавших повышению качества комплекса.

Все отзывы и пожелания, которые авторы примут с благодарностью, просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

14. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.1. Криволинейные интегралы и их вычисление

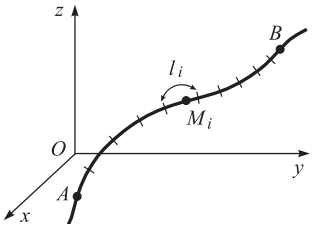

Рис. 14.1

Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги). Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана гладкая дуга L_{AB} кривой L, во всех точках которой определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Дугу L_{AB} произвольным образом разобьем на n частей l_i длиной $\Delta l_i (i = \overline{1, n})$. В каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (рис. 14.1) и составим интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

Тогда предел $\lim\limits_{\Delta l_i \to 0} I_n$ всегда существует. Он называется *криволинейным интегралом первого рода* или *криволинейным интегралом по длине дуги* L_{AB} от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy и на этой кривой задана непрерывная функция $f(x, y)$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \qquad (14.1)$$

В случае, когда гладкая кривая L задана в пространстве $\mathbf{R}^3$ параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и параметр t изменяется монотонно на отрезке $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ при перемещении по кривой L из точки A в точку B, верна формула для вычисления криволинейного интеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \quad (14.2)$$

В случае плоской кривой формула (14.2) упрощается:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \quad (14.3)$$

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ, функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho' = d\rho/d\varphi$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы (14.3), где в качестве параметра t взят полярный угол φ:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \quad (14.4)$$

(φ_A, φ_B – значения φ, определяющие на кривой точки A и B).

Если плоская кривая задана непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией $y = y(x)$, где a, b – абсциссы точек A и B, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \quad (14.5)$$

Итак, во всех случаях вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_{L} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, где L – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

▸ Находим:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\, dt = \sqrt{2 + t^2}\, dt.$$

Тогда

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} (2t - t)\sqrt{2 + t^2}\, dt = \int\limits_{0}^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1). \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить $I=\int\limits_L \frac{dl}{x+2y+5}$, где L – отрезок прямой $y=2x-2$, заключенный между точками $A(0, -2)$, $B(1, 0)$.

▸ Находим:

$$dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+4}dx=\sqrt{5}dx.$$

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{x+2(2x-2)+5}=\sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x+1}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6. \blacktriangleleft$$

Поскольку согласно формулам (14.2)–(14.5) криволинейный интеграл первого рода выражается через определенный интеграл, укажем только те его свойства, которые обобщают свойства определенного интеграла, а также приложения криволинейного интеграла к задачам геометрического и физического содержания.

1. $\int\limits_{L_{AB}} dl=l_{AB}$, где l_{AB} – длина дуги AB (*геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

2. Если $f(x, y, z)=\delta(x, y, z)$ – линейная плотность материальной дуги L_{AB}, то ее масса m вычисляется по формуле

$$m=\int\limits_{L_{AB}} \delta(x, y, z)dl \tag{14.6}$$

(*механический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

3. Координаты центра масс материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x, y, z)$, определяются по формулам:

$$x_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} x\delta(x, y, z)dl,\ y_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} y\delta(x, y, z)dl,$$
$$z_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} z\delta(x, y, z)dl, \tag{14.7}$$

где m – масса дуги L_{AB}.

4. Моменты инерции относительно начала координат O, осей координат Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x, y, z)$, вычисляются соответственно по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&I_0 = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2+z^2)\delta dl, \quad I_x = \int\limits_{L_{AB}} (y^2+z^2)\delta dl,\\
&I_y = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+z^2)\delta dl, \quad I_z = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)\delta dl,\\
&I_{xy} = \int\limits_{L_{AB}} z^2\delta dl, \quad I_{xz} = \int\limits_{L_{AB}} y^2\delta dl, \quad I_{yz} = \int\limits_{L_{AB}} x^2\delta dl.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.8)$$

Моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z, \quad I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Если дуга L_{AB} лежит в плоскости Oxy, то рассматриваются только моменты I_0, I_x, I_y (при условии, что $z = 0$).

5. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет размерность длины и $f(x, y) > 0$ во всех точках плоской дуги L_{AB}, лежащей в плоскости Oxy. Тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = S,$$

где S – площадь части цилиндрической поверхности с образующими, которые параллельны оси Oz и проходят через точки дуги L_{AB}, ограниченной снизу дугой L_{AB}, сверху – линией пересечения цилиндрической поверхности с поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков – прямыми, проходящими через точки A и B параллельно оси Oz. На рис. 14.2 изображена описанная часть цилиндрической поверхности $ABB'A'$. Если $f(x, y) < 0$ во всех точках плоской дуги L_{AB}, то

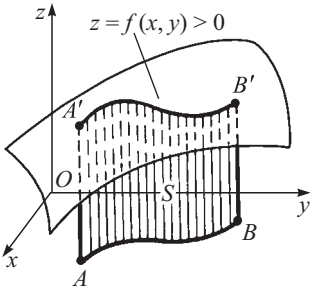

Рис. 14.2

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = -S$$

(рис. 14.3). И, наконец, в некоторых точках плоской дуги L_{AB} функция $f(x, y)$ меняет знак. Тогда интеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl$ выражает разность площадей частей описанной цилиндрической

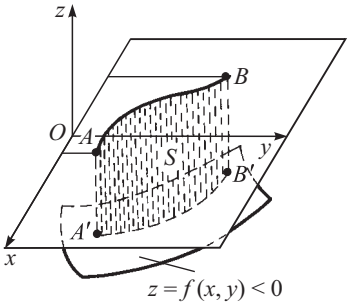

Рис. 14.3

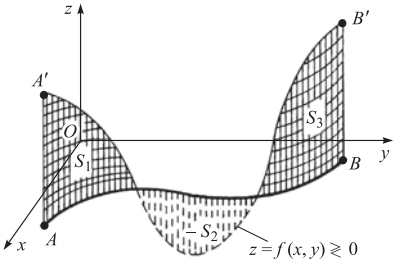

Рис. 14.4

поверхности, находящихся над плоскостью Oxy и под ней (рис. 14.4):

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = S_1 - S_2 + S_3.$$

Пример 3. Вычислить массу m и координаты центра масс x_C, y_C плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, линейная плотность которой $\delta(x, y) = y\sqrt{1+x}$.

▸ Согласно формулам (14.5) и (14.6) для случая плоской дуги имеем:

$$m = \int\limits_0^1 \delta(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{3/2}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^1 (x^{3/2} + x^{5/2})dx = \frac{16}{35}.$$

По формулам (14.7) находим:

$$x_C = \frac{35}{16}\int\limits_0^1 (x^{5/2} + x^{7/2})dx = \frac{10}{9},$$

$$y_C = \frac{35}{16}\int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{3/2}(x^{3/2} + x^{5/2})dx = \frac{35}{24}\int\limits_0^1 (x^3 + x^4)dx = \frac{21}{32}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 4$, заключенной между плоскостью Oxy и поверхностью $z = 2 + x^2/2$ (рис. 14.5).

▸ Искомая площадь S цилиндрической поверхности выражается интегралом

$$S=\int_L (2+x^2/2)dl,$$

где L – окружность в плоскости Oxy: $x^2+y^2=4$, $z=0$, уравнения которой в параметрическом виде следующие: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$. Тогда $dl=2dt$ и

$$S=\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{2}\cdot 4\cos^2 t\right)\cdot 2dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=12\pi. \blacktriangleleft$$

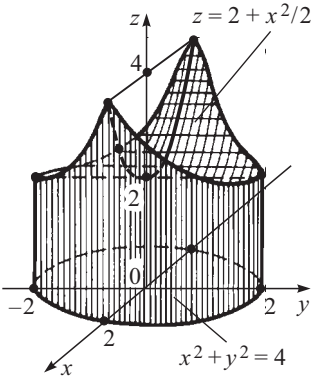

Рис. 14.5

Криволинейные интегралы второго рода (по координатам). Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задан вектор $\mathbf{a}=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+$ $+R(x, y, z)\mathbf{k}$, координаты которого – непрерывные функции в точках ориентированной кривой L_{AB}. Кривую L_{AB} разобьем в направлении от A к B на n элементарных дуг l_i и построим векторы $\overrightarrow{\Delta l_i}=\Delta x_i\mathbf{i}+\Delta y_i\mathbf{j}+\Delta z_i\mathbf{k}$, где Δx_i, Δy_i, Δz_i – проекции векторов $\overrightarrow{\Delta l_i}$ на оси координат. Начала этих векторов совпадают с началами элементарных дуг l_i, а концы – с их концами (рис. 14.6). На каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму:

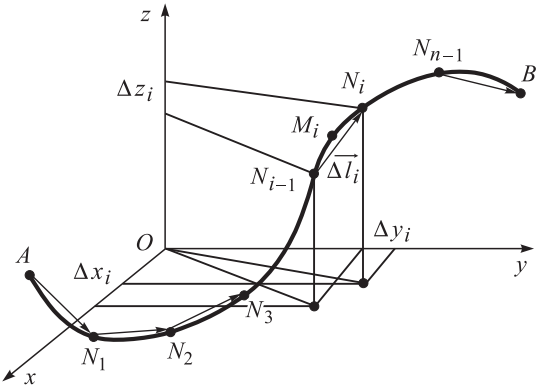

Рис. 14.6

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \overrightarrow{\Delta l_i}. \qquad (14.9)$$

Предел суммы (14.9), найденный при условии, что все $\left|\overrightarrow{\Delta l_i}\right| \to 0$, называется *криволинейным интегралом второго рода* или *криволинейным интегралом по координатам* от вектор-функции $\mathbf{a}(x, y, z)$ по кривой L_{AB} и обозначается

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \mathbf{dl} = \int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \lim_{\overline{\Delta l_i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \overrightarrow{\Delta l_i}. \qquad (14.10)$$

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в точках гладкой кривой L_{AB}, то предел суммы (14.9) существует, т.е. существует криволинейный интеграл второго рода (14.10).

Криволинейные интегралы второго рода обладают основными свойствами определенных интегралов (линейность, аддитивность). Непосредственно из определения криволинейного интеграла второго рода следует, например, что он зависит от направления интегрирования вдоль кривой, т.е. меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = -\int_{L_{BA}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}.$$

Если кривая интегрирования L замкнута, то криволинейные интегралы второго рода обозначают $\oint_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}$. В этом случае через кривую L проводится ориентированная поверхность и за положительное направление обхода по L принимается такое направление, при котором область поверхности, ограниченная кривой L, находится слева, если двигаться вдоль L по выбранной стороне указанной поверхности (т.е. обход контура L совершается против хода часовой стрелки).

Если плоскую область D, ограниченную кривой L, разбить на части, не имеющие общих внутренних точек и ограниченные замкнутыми кривыми L_1 и L_2, то

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \oint_{L_1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} + \oint_{L_2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl},$$

где направления обхода по контурам L, L_1 и L_2 всюду либо положительные, либо отрицательные.

Если гладкая кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ – соответственно начальная и конечная точки этой кривой, то верна следующая формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$
$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt. \qquad (14.11)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy, $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, то $R(x, y, z) = 0$, $z(t) = 0$ и формула (14.11) упрощается:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t)), y(t))x'(t) +$$
$$+ Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \qquad (14.12)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) +$$
$$+ Q(x, f(x))f'(x))dx. \qquad (14.13)$$

Пример 5. Вычислить

$$I = \int\limits_{L_{AB}} ydx + (x + z)dy + (x - y)dz,$$

где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой AB: $x = 1 + t$, $y = -1 + 4t$, $z = 1 + 3t$. На отрезке $|AB|$ параметр $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому согласно формуле (14.11)

$$I = \int\limits_{0}^{1} ((-1 + 4t) + (2 + 4t) \cdot 4 + (2 - 3t) \cdot 3)dt = \int\limits_{0}^{1} (13 + 11t)dt = 18{,}5. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Вычислить $I=\oint\limits_L ydx-x^2dy+(x+y)dz$, если L – кривая пересечения цилиндра $x^2+y^2=4$ с плоскостью $x+y-z=0$, «пробегаемая» в положительном направлении относительно выбранной верхней стороны данной плоскости.

▸ Найдем параметрические уравнения кривой L. Так как проекция кривой L на плоскость Oxy есть окружность $x^2+y^2=4$, $z=0$, то можно записать, что $x=2\cos t$, $y=2\sin t$. Тогда из уравнения плоскости находим, что $z=2(\cos t+\sin t)$. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=2(\cos t+\sin t),\ t\in[0,2\pi], \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} dx=-2\sin tdt, \\ dy=2\cos tdt, \\ dz=2(-\sin t+\cos t)dt. \end{array}\right.$$

Отсюда по формуле (14.11) имеем:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}(-4\sin^2 t-8\cos^3 t+4(\cos^2 t-\sin^2 t))dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(-2+2\cos 2t-8\cos t+8\sin^2 t\cos t+4\cos 2t)dt=-4\pi. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Вычислить $I=\int\limits_{L_{AB}} xydx+(x^2+y)dy$, если линия L_{AB} – дуга параболы $y=x^2$, расположенная между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

▸ Поскольку в данном случае $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $x\in[0,2]$, то согласно формуле (14.13) получаем:

$$I=\int\limits_0^2(xx^2+(x^2+x^2)\cdot 2x)dx=\int\limits_0^2 5x^3dx=\frac{5}{4}x^4\Big|_0^2=20. \blacktriangleleft$$

14.2. Приложения криволинейных интегралов

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно вычислять длину дуги кривой, массу материальной дуги, ее центр масс, площади цилиндрических поверхностей и другие величины.

Пример 1. Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x=t^2/2$, $y=t$, $z=t^3/3$, $0\leqslant t\leqslant 2$, если в каждой ее точке плотность $\delta=\sqrt{1+4x^2+y^2}$.

▸ Согласно формуле (14.6) искомая масса m выражается интегралом

$$m=\int_L \sqrt{1+4x^2+y^2}\,dl=\int_0^2 \sqrt{1+t^4+t^2}\sqrt{t^2+1+t^4}\,dt=$$

$$=\int_0^2 (1+t^2+t^4)dt=116/15. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первом квадранте, и моменты инерции I_0, I_x, I_y.

▸ Так как прямая $y=x$ является осью симметрии дуги окружности, то $x_C=y_C$. Для нахождения x_C используем первую из формул (14.7):

$$x_C=\int_L x\delta dl \Big/ \int_L \delta dl=\int_L x dl \Big/ \int_L dl,$$

поскольку $\delta=\text{const}$. Интеграл

$$\int_L dl=\frac{1}{2}\pi R$$

определяет длину четверти рассматриваемой окружности. Вычислим $\int_L x dl$, где $x=R\cos t$; $y=R\sin t$; $0\leqslant t\leqslant \pi/2$;

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=Rdt.$$

Следовательно,

$$\int_L x dl=\int_0^{\pi/2} R\cos t R dt=R^2\sin t\Big|_0^{\pi/2}=R^2.$$

Окончательно имеем:

$$x_C=y_C=\frac{R^2}{\pi R/2}=\frac{2R}{\pi}.$$

При вычислении I_0, I_x, I_y воспользуемся формулами (14.8), а затем (14.3) для случая плоской дуги ($z\equiv 0$) и учтем, что $I_x=I_y$:

$$I_0=\int_L (x^2+y^2)\delta dl=\delta\int_0^{\pi/2} R^2 R dt=R^3\delta\pi/2,$$

$$I_x=\int_L y^2\delta dl=\delta\int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 t R dt=\frac{R^3\delta}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt=\pi R^3\delta/4. \blacktriangleleft$$

Криволинейный интеграл второго рода (14.9) в случае, когда $\mathbf{a} = \mathbf{F}$ – сила, под действием которой перемещается тело, определяет работу силы $\mathbf{F}$ на пути L_{AB}. В этом заключается *физический смысл криволинейного интеграла второго рода*.

Пример 3. Вычислить работу A силы $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ вдоль отрезка прямой BC, если $B(1, 1, 1)$ и $C(2, 3, 4)$.

▸ Запишем параметрические уравнения прямой BC: $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 3t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда работа A силы $\mathbf{F}$ на пути BC вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{L_{BC}} yzdx + xzdy + xydz =$$

$$= \int\limits_0^1 (1+2t)(1+3t)dt + (1+t)(1+3t)\cdot 2dt + (1+t)(1+2t)\cdot 3dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (18t^2 + 22t + 6)dt = 23. \blacktriangleleft$$

Теорема (Грина). *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в замкнутой односвязной области D, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной кусочно-гладкой кривой L, то*

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (14.14)$$

где интегрирование по контуру L выполняется в положительном направлении.

Формула (14.14) называется *формулой Грина*.

Если в некоторой области D выполнены условия теоремы Грина, то равносильны приведенные ниже утверждения.

1. $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$, *если L – любой замкнутый контур L, расположенный в области D.*

2. *Интеграл* $\oint\limits_{L_{AB}} Pdx + Qdy$ *не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B, где $L_{AB} \in D$.*

3. $Pdx + Qdy = du(x, y)$, *где $du(x, y)$ – полный дифференциал функции $u(x, y)$.*

4. *Во всех точках области D справедливо равенство*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (14.15)$$

Из формулы Грина следует, что площадь S области D можно вычислить также с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L -ydx + xdy,$$

где интегрирование по контуру L производится в положительном направлении.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ (рис. 14.7).

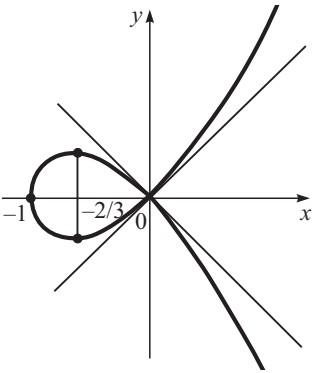

Рис. 14.7

▸ Из уравнения кривой получим, что $y = \pm x\sqrt{x+1}$, т.е. кривая симметрична относительно оси Ox и пересекает ее в точках $x = 0$ и $x = -1$; обе функции $y = \pm x\sqrt{x+1}$ определены при $x \geqslant -1$, а $y \to \pm\infty$ при $x \to \infty$. Перейдем к параметрическим уравнениям данной кривой, положив $y = xt$. Подставив $y = xt$ в уравнение $x^3 + x^2 - y^2 = 0$, получим: $x^3 + x^2 = x^2t^2$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, где для петли $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-(t^3 - t)\cdot 2t + (t^2 - 1)(3t^2 - 1))dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1)dt = \frac{8}{15}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Вычислить

$$I = \oint_L y(1 - x^2)dx + (1 + y^2)xdy,$$

где контур L – окружность $x^2 + y^2 = 4$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода.

▸ Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Грина (14.14):

$$I = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2)dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

где D – круг, определяемый неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Имеем:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\left|\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2 \end{array}\right|=$$

$$=\iint\limits_D \rho^3 d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 \rho^3 d\rho=8\pi. \blacktriangleleft$$

С помощью теории криволинейных интегралов второго рода можно решить следующую задачу. Известно дифференциальное выражение $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$, которое является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Требуется найти эту функцию.

Решение данной задачи определяется формулой

$$u(x, y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy+C \qquad (14.16)$$

или

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy+C, \qquad (14.17)$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ принадлежат области D, в которой $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные являются непрерывными функциями; C – произвольная постоянная.

Пример 6. Показать, что дифференциальное выражение

$$\frac{x}{y}dy+\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln|y|\right)dx$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, и найти эту функцию.

▸ Поскольку

$$P(x, y)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln|y|,\quad Q(x, y)=\frac{x}{y},$$

то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y}$. Значит, во всех точках плоскости Oxy, исключая точки, лежащие на осях координат, данное дифференциальное выражение в силу равенства (14.14) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$.

Теперь воспользуемся общей формулой (14.16) или (14.17), где можно взять $M_0(1, 1)$, так как $M_0(1, 1)\in D$. По формуле (14.16) имеем:

$$u(x,y)=\int_1^x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^y\frac{x}{y}dy+C=$$

$$=(\operatorname{arctg}x-\ln|x|)\Big|_1^x+x\ln|y|\Big|_1^y+C=\operatorname{arctg}x-\ln|x|+x\ln|y|+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Проверим правильность найденной функции $u(x, y)$. Для этого убедимся, что $\partial u/\partial x = P(x, y)$, $\partial u/\partial y = Q(x, y)$. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln|y|=P(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}=Q(x,y),$$

т.е. результат (ответ) правильный. ◄

14.3. Аудиторные занятия к гл. 14

АЗ–14.1

1. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, если L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$. (*Ответ*: $\sqrt{5}\ln 2$.)

2. Вычислить $\oint\limits_L xydl$, если L – контур прямоугольника с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$. (*Ответ*: -8.)

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, если L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$. (*Ответ*: $4\pi a\sqrt{a}$.)

4. Вычислить $\int\limits_L xyzdl$, если L – отрезок прямой между точками $A(1, 0, 1)$ и $B(2, 2, 3)$. (*Ответ*: 12.)

5. Вычислить площадь боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2=Rx$, заключенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. (*Ответ*: $4R^2$.)

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} (x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$. $\left(\textit{Ответ}\text{: } 40\frac{19}{30}.\right)$

7. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x+y-1)dz$, где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$. (*Ответ*: 13.)

8. Вычислить $\int\limits_{L} yzdx + zxdy + xydz$, где L – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at/(2\pi)$ от точки пересечения линии с плоскостью $z = 0$ до точки ее пересечения с плоскостью $z = a$. (*Ответ*: 0.)

9. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y-x)dy$, если линия L_{AB}, соединяющая точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, задана уравнением: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y^2 = x$; г) $y = x^3$. (*Ответ*: а) 1/3; б) 1/12; в) 17/30; г) $-1/20$.)

10. Найти координаты центра масс первой полуарки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$. (*Ответ*: $4a/3$; $4a/3$.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить:

а) $\int\limits_{L} xdl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0, 0)$ и $B(1, 2)$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$, если L_{AB} – дуга параболы $y = x^2$, лежащая между точками $A(-1, 1)$ и $B(1, 1)$.
(*Ответ*: а) $\sqrt{5}/2$; б) 2.)

2. Вычислить:

а) $\int\limits_{L} x^2 ydl$, если L – часть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в первом квадранте;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x-y)dx + (x+y)dy$, если L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(2, 3)$ и $B(3, 5)$.
(*Ответ*: а) 27; б) 23/2.)

3. Вычислить:

а) $\int\limits_{L} \frac{dl}{x+y}$, если L – отрезок прямой $y = x + 2$, соединяющий точки $A(2, 4)$ и $B(1, 3)$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (y + x^2)dx + (2x - y)dy$, если L_{AB} – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная между точками $A(1, 1)$ и $B(3, -3)$.
(*Ответ*: а) $\sqrt{2}/2$; б) 12.)

А3–14.2

1. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$ плотностью $\delta = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями x: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{8}$. (*Ответ*: 19/3.)

2. Вычислить площадь поверхности, которую вырезает из кругового цилиндра радиусом R такой же цилиндр, если оси этих цилиндров пересекаются под прямым углом. (*Ответ*: $8R^2$.)

3. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

б) первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

(*Ответ*: а) $3\pi a^2/8$; б) $3\pi a^2$.)

4. Найти функции $u(x, y)$ по их полным дифференциалам:

а) $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$;

б) $du = (2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$;

в) $du = ((3y - x)dx + (y - 3x)dy)/(x + y)^3$.

5. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + 1)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ вдоль дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$. (*Ответ*: 7/3.)

6. Применив формулу Грина, вычислить

$$\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ и $C(0, 3)$. (*Ответ*: 18.)

7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(4x^3y^3 - y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy = 0$. (*Ответ*: $x^4y^3 - xy^2 = C$.)

Самостоятельная работа

1. 1. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. (*Ответ*: 1/3.)

2. Найти функцию $u(x, y)$, если

$$du(x, y) = (2xy + x^3 - 5)dx + (x^2 - y^3 + 5)dy.$$

2. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и дугой эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, расположенной в первом квадранте. (*Ответ*: $\pi ab/4$.)

2. Найти функцию $u(x, y)$, если

$$du(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy.$$

3. 1. Вычислить работу силы $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, совершаемую на пути, соединяющем точки $A(0, 0)$ и $B(2, 1)$. (*Ответ*: 4.)

2. Найти функцию $u(x, y)$, если

$$du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$$

14.4. Индивидуальные домашние задания к гл. 14

ИДЗ–14.1

Вычислить криволинейные интегралы.

1

1.1. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$. (*Ответ*: –6.)

1.2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (*Ответ*: $3\sqrt[3]{2}\pi/8$.)

1.3. $\int\limits_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где L_{OA} – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$. (*Ответ*: 4/3.)

1.4. $\oint\limits_{L} (x + 2y)dx + (x - y)dy$, где L – окружность $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, при положительном направлении обхода. (*Ответ*: -4π.)

1.5. $\oint\limits_{L} (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$, где L – дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, при положительном направлении обхода. (*Ответ*: $-7{,}5\pi$.)

1.6. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 ydy$, где L_{AB} – дуга эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (*Ответ*: 5/6.)

1.7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx - x^2 dy$, где L_{OBA} – ломаная OBA; $O(0, 0)$; $B(2, 0)$; $A(2, 1)$. (*Ответ*: –4.)

1.8. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - y^2)dx + xydy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB; $A(1, 1)$; $B(3, 4)$. $\left(\textit{Ответ}: 11\frac{5}{6}.\right)$

1.9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos ydx - \sin xdy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB; $A(2\pi, -2\pi)$; $B(-2\pi, 2\pi)$. (*Ответ*: 0.)

1.10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, где L_{AB} – отрезок прямой AB; $A(1, 2)$; $B(3, 6)$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{4}{5}\ln 3.\right)$

1.11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$, где L_{AB} – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$. (*Ответ*: –1/20.)

1.12. $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, где L_{ABC} – ломаная ABC; $A(1, 2)$; $B(3, 2)$; $C(3, 5)$. $\left(\textit{Ответ}: 64\frac{2}{3}.\right)$

1.13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 zdy$, где L_{OB} – отрезок прямой OB; $O(0, 0, 0)$; $B(-2, 4, 5)$. (*Ответ*: 91.)

1.14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx + xdy$, где L_{OA} – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$; $O(R, 0)$; $A(0, R)$. (*Ответ*: 0.)

1.15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, где L_{OA} – дуга параболы $y^2 = x$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$. (*Ответ*: 17/30.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Методические рекомендации 5

14. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 8

14.1. Криволинейные интегралы и их вычисление 8
14.2. Приложения криволинейных интегралов 16
14.3. Аудиторные занятия к гл. 14 21
14.4. Индивидуальные домашние задания к гл. 14 24
14.5. Дополнительные задачи к гл. 14 44

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ 47

15.1. Векторная функция скалярного аргумента. Производная по направлению и градиент 47
15.2. Скалярные и векторные поля 53
15.3. Поверхностные интегралы 55
15.4. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля 62
15.5. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля 66
15.6. Дифференциальные операции второго порядка. Классификация векторных полей 71
15.7. Аудиторные занятия к гл. 15 76
15.8. Индивидуальные домашние задания к гл. 15 85
15.9. Дополнительные задачи к гл. 15 107

16. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 109

16.1. Основные понятия 109
16.2. Основные элементарные функции комплексной переменной 111
16.3. Дифференцирование функций комплексной переменной 119
16.4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформное отображение 126
16.5. Интегрирование функций комплексной переменной 129
16.6. Интегральная формула Коши и ее приложения 135
16.7. Числовые и функциональные ряды в комплексной области 139
16.8. Степенные ряды с отрицательными степенями. Ряды Тейлора и Лорана 145

16.9. Нули и изолированные особые точки функций комплексной переменной 160
16.10. Вычеты функций и их приложения 167
16.11. Аудиторные занятия к гл. 16 179
16.12. Индивидуальные домашние задания к гл. 16 200
16.13. Дополнительные задачи к гл. 16 224

Приложения 226

Рекомендуемая литература 253