

А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Часть 3

- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Кратные интегралы

Для студентов учреждений
высшего образования

А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по техническим специальностям

В пяти частях

Часть 3

**Обыкновенные дифференциальные
уравнения.**

Ряды.

Кратные интегралы



Минск
«Вышэйшая школа»
2017

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
P98

Рецензенты: кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук *В.В. Цегельник*); заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Рябушко, А.П.

P98 Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск : Вышэйшая школа, 2017. — 319 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2798-8.

Это третья часть комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной, творческой работы студентов технических университетов. Содержатся необходимые теоретические сведения, наборы задач для аудиторных и индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2798-8(ч. 3)
ISBN 978-985-06-2764-3

© Рябушко А.П., Жур Т.А., 2017
© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя комплекс учебных пособий под общим названием «Высшая математика: теория и задачи» в пяти частях содержит в своей основе существенно переработанный и дополненный материал неоднократно переиздававшегося комплекса учебных пособий «Индивидуальные задания по высшей математике» в четырех частях коллектива авторов под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.П. Рябушко (Минск, издательство «Высшая школа»).

В новом комплексе многие задачи заменены более удачными, добавлено несколько сот новых задач, увеличено количество аудиторных занятий (АЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), блочных контрольных работ (БКР), дополнительных задач к каждой главе, среди которых имеются задачи уровня НИРС (научно-исследовательская работа студентов). Номера этих задач помечены звездочкой. Во всех АЗ выделены задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать для проведения на АЗ мини-контрольных работ (МКР). К каждому ИДЗ дается письменная консультация (решение типового варианта). Чтобы сэкономить время студента при выполнении МКР, ИДЗ и других заданий, в пособие включены необходимые теоретические сведения с поясняющими их решенными примерами.

Большинство имеющихся в настоящее время учебников и учебных пособий, сборников задач и упражнений по общему курсу высшей математики для технических университетов не позволяют индивидуализировать обучение, так как содержат недостаточное количество однотипных задач и упражнений, не предусматривают выдачи каждому студенту индивидуального задания с последующим контролем и выставлением оценки. Данное пособие дает возможность перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Появляется возможность введения инновационных технологий в преподавание математики, например блочно-рейтинговой системы обучения и контроля знаний и умений студентов (см. ч. 1, прил. 6).

Комплекс написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме до 500 ч для технических специальностей университетов, но может быть использован в учреждениях образования разных профилей, где количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше (для чего из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку). Кроме того, он вполне доступен студентам вечерних и заочных отделений.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, возглавляемой доктором физико-математических наук, профессором В.В. Цегельником, а также заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, которые дали ряд полезных советов, способствовавших повышению качества комплекса.

Все отзывы и пожелания, которые авторы примут с благодарностью, просьба направлять по адресу: издательство «Высшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь теоретический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы, используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначено символом ►, а конец — ◄.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10–15 мин во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта (письменная консультация). Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера. Некоторые из них (помеченные звездочкой) могут служить темами для научно-исследовательской работы студентов.

В приложениях приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-11.1 означает, что АЗ относится к одиннадцатой главе и является первым по счету.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-11.2 означает, что ИДЗ относится к одиннадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-11.2:16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-11.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16, 5.16. При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр

ИДЗ-12.1:1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-12.1 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4 и третью – из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых технических университетов показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы в соответствии с настоящим пособием.

1. Студенческие группы по 25 человек, проводится два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра разрабатывает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыки и умения при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Последние (один вариант – на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего – при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Эти методы позволяют проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 мин с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы по 15 человек, проводится два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные 2 ч в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ,

выставить оценки некоторой части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяют контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала. Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 2–3 блока, по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла – двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа (блочный экзамен, блочная контрольная работа – БКР), в которую входит 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и БКР позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок и итоговую оценку по всем блокам семестра (учебного года).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала при любой системе обучения гарантирует студенту знания по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи из данного пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этого, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку. Эта оценка достигается, как правило, при участии студента в НИРС.

11. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Основные понятия.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод изоклин

Уравнение называется *дифференциальным* относительно некоторой искомой функции, если оно содержит хотя бы одну производную этой функции. *Порядок дифференциального уравнения* совпадает (по определению) с порядком наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция y является функцией одного аргумента x , то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если же искомая функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*. Так, например, уравнение $2xy' - 3y = 0$, где $y = y(x)$, является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а $u'_x - u'_y + xy + 1 = 0$, где $u = u(x, y)$, — дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. (В этой главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому в дальнейшем для краткости слово «обыкновенные» будем опускать.)

В общем случае *дифференциальное уравнение n -го порядка* может быть записано в виде

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (11.1)$$

Если уравнение (11.1) удастся разрешить относительно наивысшей производной, то получаем *уравнение в нормальной форме*:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (11.2)$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения*.

Решением (или *интегралом*) *дифференциального уравнения* (11.1) (или (11.2)) называется любая действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) и вместе со своими производными обращающая данное дифференциальное уравнение в тождество. (При этом производные функции $y = y(x)$ предполагаются существующими.)

Пример 1. Доказать, что функция $y = xe^{2x}$, определенная на всей числовой оси, является решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

► Подставив в данное уравнение саму функцию и ее производные $y' = e^{2x}(1 + 2x)$, $y'' = 4e^{2x}(1 + x)$, получим тождество:

$$4e^{2x}(1+x) - 4e^{2x}(1+2x) + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1+x-1-2x+x) \equiv 0. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде: $F(x, y) \equiv \ln \frac{y}{x} - 5 - xy = 0$, обращает дифференциальное уравнение $(x + x^2 y)y' = y - xy^2$ в тождество, т.е. является его решением.

► Действительно, согласно правилу дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y-1/x}{x+1/y} = \frac{y}{x} \frac{1-xy}{1+xy} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y}.$$

Подставив найденную производную y' в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество. ◀

Если функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена в неявном виде: $F(x, y) = 0$, то $F(x, y) = 0$ называется *интегралом* (а не *решением*) данного дифференциального уравнения. Так, в примерах 1 и 2 имеем соответственно решение и интеграл заданных дифференциальных уравнений.

График решения (или интеграла) дифференциального уравнения (11.1) (или (11.2)) на плоскости Oxy называется *интегральной линией*. Следовательно, каждому решению (или интегралу) соответствует интегральная линия.

Вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (11.2) разрешает приведенная ниже теорема.

Теорема 1 (существования и единственности решения). Если правая часть уравнения (11.2) является непрерывной функцией в окрестности значений

$$x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, \quad (11.3)$$

то уравнение (11.2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале (a, b) , содержащем x_0 такое, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (11.4)$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то решение $y = y(x)$ — единственное.

Числа из совокупности (11.3) называются начальными данными, а равенства (11.4) — начальными условиями.

Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (11.1) или (11.2), удовлетворяющее начальным данным (11.3), т.е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (11.4).

Любое дифференциальное уравнение (11.2) в области, удовлетворяющей теореме 1, имеет бесчисленное множество решений. Вообще говоря, это справедливо и для дифференциального уравнения (11.1). Для описания этих множеств решений вводится понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения (11.1) или (11.2) называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ или короче $y = \varphi(x, C_i)$, где C_i ($i = \overline{1, n}$) — произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения (11.1) или (11.2) при любых значениях C_i ;

2) для любых начальных данных $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i0}$ такие, что будут выполнены начальные условия $\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0, \varphi'(x_0, C_{i0}) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}$.

Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y, C_i) = 0$, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Решение (интеграл), полученное из общего решения (общего интеграла) при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i , называется частным решением (частным интегралом) дифференциального уравнения.

З а м е ч а н и е. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C_i . Такое решение (интеграл) может оказаться особым в том смысле, что в любой его точке нарушаются какие-либо условия теоремы 1. Например, дифференциальное уравнение $y'' = 3\sqrt[3]{(y' - 1)^2}$ имеет общее решение $y = x + \frac{1}{4}(x + C_1)^4 + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Функция $y = x + C$, где C — произвольная постоянная, также является

решением данного уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C_1 и C_2 . Кроме того, $y' = 1$ для любой точки решения, что приводит к нарушению условия единственности из теоремы 1, ибо частная производная правой части данного уравнения по y' при $y' = 1$ разрывна. Следовательно, решение $y = x + C$ является особым. В дальнейшем особые решения, как правило, рассматриваться не будут.

Отметим, что теория неопределенного интеграла по существу является теорией класса простейших дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$, общее решение которых

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$; C – произвольная постоянная.

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0 \tag{11.5}$$

или, если разрешить его относительно y' , в нормальной форме:

$$y' = f(x, y). \tag{11.6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (существования и единственности решения). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в ее окрестности, то существует решение $y = y(x)$ уравнения (11.6) такое, что $y(x_0) = y_0$. Если непрерывна также частная производная df/dy данной функции, то это решение единственно.*

Отметим, что иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно записывать в так называемой дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{11.7}$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку: найти решение $y = \varphi(x)$ (интеграл $\Phi(x, y) = 0$) дифференциального уравнения (11.5) или (11.6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$ ($\Phi(x_0, y_0) = 0$). С геометрической точки зрения это означает, что среди всех интегральных линий данного уравнения необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения (11.6) состоит в том, что оно в каждой точке $M(x, y)$,

принадлежащей области D , в которой выполняются все условия теоремы 2, задает направление $y' = \operatorname{tg} \alpha = k$ касательной к единственной интегральной линии уравнения (11.6), проходящей через точку $M(x, y)$, т.е. поле направлений в области D (рис. 11.1).

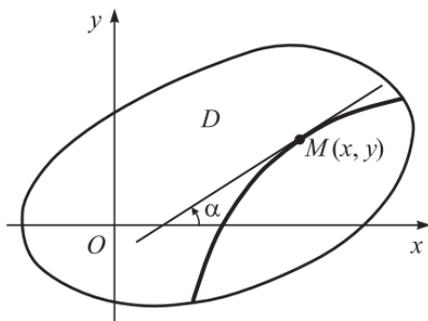


Рис. 11.1

В области D для уравнения (11.6) можно выделить однопараметрическое семейство линий $f(x, y) = k = \operatorname{const}$, каждая из которых называется *изоклиной*. Как следует из определения, вдоль каждой изоклины поле направлений постоянно, т.е. $y' = k = \operatorname{const}$.

Нахождение изоклин и направлений вдоль них позволяет упорядочить поле направлений и приближенно построить интегральные линии данного дифференциального уравнения, т.е. графически проинтегрировать это уравнение.

Пример 3. Методом изоклин приближенно построить интегральные линии дифференциального уравнения $y' = -2y/x$.

► Полагая $-2y/x = k$ ($k = \operatorname{const}$), находим изоклины $y = -\frac{k}{2}x$ данного уравнения. Они представляют собой проходящие через начало координат прямые линии, вдоль которых поле направлений определяется равенством $y' = k = \operatorname{tg} \alpha$. Придавая k различные значения, находим соответствующие изоклины, вдоль которых направление поля характеризуется углом α наклона к оси Ox касательной к интегральной линии. Необходимые вычисления запишем в виде табл. 11.1.

Таблица 11.1

k	0	$\pm 1/\sqrt{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 2	± 3	$\pm\infty$
α	0	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 64^\circ$	$\approx \pm 72^\circ$	$\pm 90^\circ$
$y = -kx/2$	$y = 0$	$y = \mp x/(2\sqrt{3})$	$y = \mp x/2$	$y = \mp\sqrt{3}x/2$	$y = \mp x$	$y = \mp 3x/2$	$x = 0$

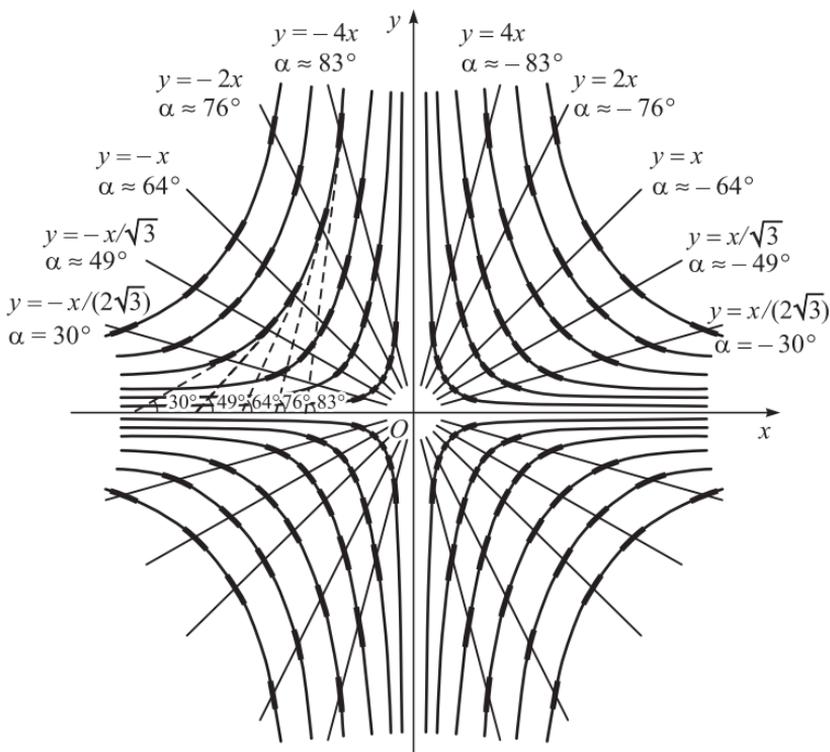


Рис. 11.2

По данным табл. 11.1 строим поле направлений (рис. 11.2) и затем приблизительно вычерчиваем интегральные линии. Положительное или отрицательное значение угла α указывает на то, что он отсчитывается от оси Ox против хода или по ходу часовой стрелки соответственно. ◀

11.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

Уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (11.8)$$

называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*. Его общим интегралом будет

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C, \quad (11.9)$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (11.10)$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad (11.11)$$

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнению (11.10) или (11.11), называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Разделение переменных в уравнениях (11.10), (11.11) выполняется следующим образом. Предположим, что $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$, и разделим обе части уравнения (11.10) на $N_1(y)M_2(x)$. Обе части уравнения (11.11) умножим на dx и разделим на $f_2(y) \neq 0$. В результате получим уравнения с разделенными переменными (т.е. уравнения вида (11.8)):

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0, \quad f_1(x)dx - \frac{dy}{f_2(y)} = 0,$$

которые интегрируются согласно формуле (11.9).

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0. \quad (1)$$

► Предположив, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, и разделив обе части данного уравнения на xy , получим уравнение с разделенными переменными:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Интегрируя его, согласно формуле (11.9) последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\ln|C|$):

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = \ln|C|,$$

$$x + \ln|x| + y + \ln|y| = \ln|C|,$$

$$\ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|C|, \quad xy e^{x+y} = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом уравнения (1). При его нахождении были приняты ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$, однако функции $x = 0$ и $y = 0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется. Но эти функции получаются из общего интеграла при $C = 0$. Следовательно, $x = 0$, $y = 0$ – частные решения уравнения (1). ◀

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

▶ Запишем данное уравнение в дифференциальной форме (см. формулу (11.7)):

$$(1 + e^{2x})y^2 dy - e^x dx = 0.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2 dy - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2 dy - \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \frac{C}{3}, \quad \frac{y^3}{3} - \arctg e^x = \frac{C}{3}, \quad y = \sqrt[3]{C + 3\arctg e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Использував начальное условие, определим значение произвольной постоянной:

$$1 = \sqrt[3]{C + \frac{3}{4}\pi}, \quad C = 1 - \frac{3}{4}\pi.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}\pi + 3\arctg e^x}. \quad \blacktriangleleft$$

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией порядка α* относительно аргументов x и y , если равенство $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ справедливо для любого $t \in \mathbf{R}$, при котором функция $f(tx, ty)$ определена, $\alpha = \text{const}$. Например, функция $f(x, y) = 3x^4 - x^2 y^2 + 5y^4$ является однородной четвертого порядка ($\alpha = 4$), так как

$$f(tx, ty) = 3(tx)^4 - (tx)^2 (ty)^2 + 5(ty)^4 = t^4(3x^4 - x^2 y^2 + 5y^4) = t^4 f(x, y).$$

Функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}$ является однородной порядка $\alpha = 2/3$, поскольку

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^2} - 2\sqrt[3]{(tx)(ty)} + 4\sqrt[3]{(ty)^2} = \\ = \sqrt[3]{t^2} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}) = t^{2/3} f(x, y).$$

Если $\alpha = 0$, то функция будет однородной нулевого порядка.

Например, $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \ln\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)$ – однородная функция нуле-

вого порядка, так как

$$f(tx, ty) = \frac{tx-ty}{tx+ty} \ln\left(\frac{(tx)^2}{(ty)^2} + 1\right) = \frac{t(x-y)}{t(x+y)} \ln\left(\frac{t^2 x^2}{t^2 y^2} + 1\right) = \\ = \frac{x-y}{x+y} \ln\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = f(x, y),$$

где $t \neq 0$.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (11.12)$$

называется *однородным* относительно переменных x и y , если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка относительно своих аргументов, т.е.

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же порядка α , т.е. $P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^\alpha Q(x, y)$. Действительно, переписав его в нормальной форме:

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y),$$

легко заключаем, что $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(tx, ty) = -\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = -\frac{t^\alpha P(x, y)}{t^\alpha Q(x, y)} = f(x, y).$$

Поскольку однородное дифференциальное уравнение (11.12) в нормальной форме всегда можно записать в виде $y' = f(x, y) = f(tx, ty)$, то, положив $t = 1/x$, получим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Следовательно, уравнение (11.12) с помощью замены $y = xu$ ($u = y/x$, $y' = u + xu'$) сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $u(x)$:

$$u + xu' = \varphi(u), \quad x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x^2 y' = x^2 + y^2$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

► Функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ – однородные второго порядка, поэтому данное уравнение – однородное. Сделаем замену $y = xu$, $y' = u + xu'$. Тогда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2, \quad 2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2).$$

Полагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2 . Далее имеем:

$$2u + 2x \frac{du}{dx} = 1 + u^2, \quad 2x du = (1 + u^2 - 2u) dx.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\int \frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{2x}, \quad \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2} \ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln C, \quad 1 = (1-u) \ln(C\sqrt{|x|}).$$

В последнее выражение вместо u подставим значение y/x . Получим общий интеграл:

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \ln(C\sqrt{|x|}), \quad x = (x-y) \ln(C\sqrt{|x|}).$$

Разрешив его относительно y , найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = x - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Методические рекомендации	5
11. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	8
11.1. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод изоклин	8
11.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения	13
11.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли	18
11.4. Уравнения в полных дифференциалах	23
11.5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	24
11.6. Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков	30
11.7. Системы дифференциальных уравнений	44
11.8. Аудиторные занятия к гл. 11	58
11.9. Индивидуальные домашние задания к гл. 11	67
11.10. Дополнительные задачи к гл. 11	115
12. РЯДЫ	118
12.1. Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов ...	118
12.2. Функциональные и степенные ряды	126
12.3. Формулы и ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды	134
12.4. Степенные ряды в приближенных вычислениях	139
12.5. Ряды Фурье	145
12.6. Аудиторные занятия к гл. 12	153
12.7. Индивидуальные домашние задания к гл. 12	161
12.8. Дополнительные задачи к гл. 12	235
13. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	237
13.1. Двойные интегралы и их вычисление	237
13.2. Замена переменных в двойном интеграле. Двойные интегралы в полярных координатах	245
13.3. Приложения двойных интегралов	248
13.4. Тройной интеграл и его вычисление	255
13.5. Приложения тройных интегралов	261
13.6. Аудиторные занятия к гл. 13	265
13.7. Индивидуальные домашние задания к гл. 13	272
13.8. Дополнительные задачи к гл. 13	303
Приложения	305
Рекомендуемая литература	318

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович
Жур Татьяна Антоновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Учебное пособие

В пяти частях

Часть 3

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Ряды.

Кратные интегралы

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *М.В. Горецкой*

Подписано в печать 29.06.2017. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «Ньютон». Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 16,5.
Тираж 600 экз. Заказ 1960.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.

Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.

Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.