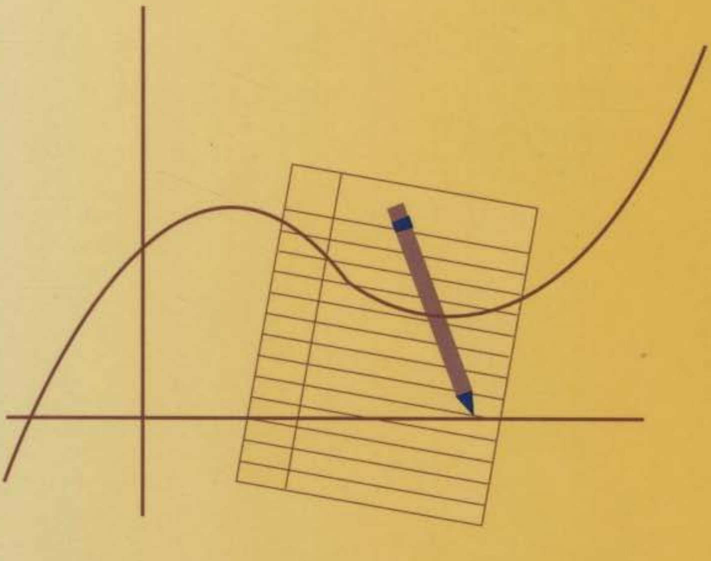
С. Н. Дорофеев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОЛНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ



Мир и Образование

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Д69

Р е ц е н з е н т ы :

Мантуров О. В. — докт. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. геометрии Московского государственного областного университета;

Данилов А. М. — докт. техн. наук, Соросовский проф. в области точных наук, зав. каф. высшей математики Пензенского университета архитектуры и строительства;

Смирнов Ю. Г. — докт. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математики и математического моделирования Пензенского государственного университета.

Дорофеев С. Н.

Д69 Высшая математика / С. Н. Дорофеев. — М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2011. — 592 с.: ил. — (Полный конспект лекций).

ISBN 978-5-94666-622-0

В данном пособии в форме лекций изложены основные теоретические сведения, определения, факты и теоремы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа. Теоретический материал лекции закрепляется большим количеством примеров.

Конспект лекций предназначен для студентов инженерных и экономических специальностей вузов, преподавателей и учителей математики, а также учащихся старших классов с углубленным изучением математики.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-94666-622-0

Содержание

1

Лекция

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Понятие комплексного числа. Сложение комплексных чисел

Как известно, уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет два решения: $x_{1,\,2} = \pm 1$. Рассмотрим уравнение $x^2 + 1^2 = 0$. Перенеся единицу из левой части в правую со знаком «минус», получим уравнение $x^2 = -1$. Из школьного курса математики мы знаем, что это уравнение на множестве вещественных чисел не имеет решений. Расширим множество вещественных чисел добавлением «нового» числа i такого, что $i^2 = -1$. Тогда данное уравнение примет вид $x^2 = i^2$, откуда находим $x_{1,2} = \pm i$. Число i называют *мнимой единицей.*

Теперь рассмотрим уравнение $x^2 + a^2 = 0$. Оно равносильно уравнению $x^2 = -a^2$ или, с учетом того, что $i^2 = -1$, уравнению $x^2 = a^2 i^2$. Чтобы это уравнение было разрешимо на некотором множестве чисел, необходимо расширить множество вещественных чисел добавлением к нему не только мнимой единицы, но и чисел вида ai, где a — любое вещественное число, а i — мнимая единица. Отсюда получаем, что в расширенном множестве вещественных чисел это уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \pm ai$.

Далее рассмотрим какое-нибудь квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом, например $x^2 + 2x + 2 = 0$. Нетрудно показать, что для данного уравнения $D = 4i^2$, откуда $\sqrt{D} = \pm 2i$. Следовательно, корнями этого уравнения являются числа $x_{1,\,2} = -1 \pm i$.

Итак, для того чтобы любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ было разрешимо на некотором множестве чисел, необходимо расширить поле вещественных чисел добавлением чисел вида $a + bi$, где a и b — любые вещественные числа, а i — мнимая единица.

Определение 1. Числа вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — мнимая единица, называют *комплексными числами*. При этом a называют *вещественной частью*, а b — *мнимой частью.*

Заметим, что все вещественные числа представляют частный случай комплексных чисел.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 3x + 9 = 0$.

△ По формуле $D = b^2 - 4ac$ найдем дискриминант данного квадратного уравнения. Имеем $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -25 = 25i^2$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25i^2}}{2} = \frac{-3 + 5i}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{25i^2}}{2} = \frac{-3 - 5i}{2}.$$

Итак, корнями данного квадратного уравнения являются комплексные числа $x_1 = \dfrac{-3 + 5i}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-3 - 5i}{2}$. ▲

Возьмем произвольно два комплексных числа $u = a + bi$ и $v = c + di$.

Определение 2. *Суммой* $u + v$ двух комплексных чисел u и v называют комплексное число $(a + c) + (b + d)i$, действительная и мнимая части которого равны суммам действительных и мнимых частей чисел u и v.

Свойства сложения комплексных чисел

1°. *Коммутативность, т.е. для любых комплексных чисел u, v справедливо равенство $u + v = v + u$.*

2°. *Ассоциативность, т.е. для любых комплексных чисел u, v, w справедливо равенство $(u + v) + w = u + (v + w)$.*

3°. *Любое комплексное число u не изменится, если к нему прибавить число 0, т.е. $u + 0 = u$.*

4°. *Для любого комплексного числа u найдется единственное число $(-u)$ такое, что $u + (-u) = 0$.*

2. Умножение комплексных чисел

Возьмем произвольно два комплексных числа $u = a + bi$ и $v = c + di$.

Определение 3. *Произведением* uv двух комплексных чисел u и v называют число $ac - bd + (ad + bc)i$.

Пример 1. Найти произведение двух комплексных чисел $u = 3 + 4i$ и $v = 5 - 6i$.

△ Имеем

$$uv = (3 + 4i)(5 - 6i) = 15 + 24 + (-18 + 20)i = 39 + 2i.$$

Таким образом, $uv = 39 + 2i$. ▲

Свойства умножения комплексных чисел

1°. *Коммутативность, т.е. для любых комплексных чисел* u, v *справедливо равенство* $uv = vu$.

❒ Пусть $u = a + bi$ и $v = c + di$. Тогда $uv = ac - bd + (ad + bc)\,i$ и $vu = ca - db + (da + cb)i$. Так как умножение вещественных чисел коммутативно, то $uv = vu$. ■

2°. *Ассоциативность, т.е. для любых комплексных чисел* u, v, w *справедливо равенство* $(uv)w = u(vw)$.

❒ Пусть $u = a + bi$, $v = c + di$, $w = m + ni$. Тогда

$$(uv)w = [(ac - bd)m - (ad + bc)n] + [(ac - bd)n + (ad + bc)m]i,$$
$$u(vw) = [a(cm - dn) - b(cn + dm)] + [a(cn + md) + b(cm - dn)]i.$$

Поскольку

$$(ac - bd)m - (ad + bc)n = a(cm - dn) - b(cn + dm),$$
$$(ac - bd)n + (ad + bc)m = a(cn + md) + b(cm - dn),$$

имеем $(uv)w = u(vw)$. ■

3°. *Дистрибутивность умножения комплексных чисел относительно сложения, т.е. для любых комплексных чисел* u, v, w *справедливо равенство* $(u + v)w = uw + vw$.

❒ Пусть $u = a + bi$, $v = c + di$, $w = m + ni$. Тогда

$$uw + vw = (am - bn) + (an + bm)i + (cm - dn) + (cn + dm)i = [(a + c)m - (b + d)n] + [(a + c)n + (b + d)m]i.$$

Так как $(u + v)w = [(a + c)m - (b + d)n] + [(a + c)n + (b + d)m]i$, то $(u + v)w = uw + vw$. ■

Пример 2. Выполнить действия:

а) $(3+7i)(-5+9i)$; б) $(2-3i)^3$; в) $(7-11i)^2(3i+5)$.

△ а) Используя правило $uv = ac - bd + (ad + bc)i$ умножения комплексных чисел, находим $(3+7i)(-5+9i) = -78-8i$.

б) Применяя формулу $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ куба разности двух выражений и учитывая, что $i^2 = -1, i^3 = -i$, получаем

$$(2-3i)^3 = 8 - 36i + 54i^2 - 27i^3 = -46 - 9i.$$

в) Согласно формуле квадрата разности двух выражений, получаем $(7-11i)^2 = 49 - 154i + 121i^2$. Так как квадрат мнимой единицы равен (−1), то $(7-11i)^2 = -72-154i$. Далее, используя правило умножения комплексных чисел, находим

$$(7-11i)^2(3i+5) = (-154i-72)(3i+5) =$$

$$= 462 - 216i - 770i - 360 = 102 - 986i. \ \blacktriangle$$

3. Понятие группы. Примеры групп

Определение 4. Непустое множество G, состоящее из элементов произвольной природы, называют *группой,* если на этом множестве можно определить внутреннюю бинарную алгебраическую операцию $*$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) для любых элементов a, b, c, принадлежащих множеству G, выполняется равенство $(a*b)*c = a*(b*c)$;

2) в множестве G существует нейтральный элемент e такой, что для любого элемента $a \in G$ имеет место равенство $a*e = e*a = a$;

3) для любого элемента a из множества G в этом множестве всегда найдется элемент a' такой, что $a*a' = a'*a = e$.

Пусть внутренняя бинарная алгебраическая операция, определенная на множестве G, удовлетворяет еще одному условию:

4) для любых элементов a, b, принадлежащих группе G, выполняется равенство $a*b = b*a$ (коммутативность).

Тогда группу G называют *коммутативной.*

Примерами коммутативных групп служат: множество комплексных чисел относительно сложения; множество ненулевых комплексных чисел относительно умножения; множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где a и b — произвольные вещественные числа, относительно сложения; множество направленных отрезков (векторов) плоскости или пространства относительно сложения векторов; множество многочленов от одной переменной степени не выше чем n относительно операции сложения многочленов. Можно показать, что в любой группе существует только один нейтральный элемент и для любого элемента a из группы в ней имеется один и только один ему противоположный (обратный). Если множество G является группой по сложению, то обычно такую группу называют *аддитивной*; если множество G является группой по умножению, то такую группу называют *мультипликативной.*

Нетрудно показать, что в аддитивной группе G однозначно разрешимо уравнение вида $a + x = b$, где a и b — произвольные элементы из G, а в мультипликативной группе G однозначно разрешимо уравнение вида $ax = b$ для любых элементов a и b из группы G.

Свойства группы

1°. *В группе G существует один и только один нейтральный элемент.*

❒ Предположим противное. Пусть в группе G имеются два нейтральных элемента e и e'. Так как e' — нейтральный элемент, то $e * e' = e$. Далее, по предположению, элемент e также нейтральный, значит, $e * e' = e'$. Таким образом, $e * e = e * e'$, откуда следует, что $e = e'$. ■

2°. *В группе G для любого элемента a существует только один элемент a' такой, что $a * a' = e$.*

❒ Предположим противное. Пусть в группе G для некоторого ее элемента a существуют два элемента b и b' таких, что $a * b = b * a = e$, $b' * a = a * b' = e$. Поэтому

$$b = e * b = (a * b') * b = b' * (a * b) = b' * e = b',$$

откуда следует, что $b = b'$. ■

4. Деление комплексных чисел

Рассмотрим уравнение вида $ax = b$, где a и b — вещественные числа. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$. Пусть теперь хотя бы один из коэффициентов данного уравнения является комплексным числом, тогда уравнение примет вид $uz = v$. Если $u \neq 0$, то $z = \frac{v}{u} = \frac{c+di}{a+bi}$. Покажем, что частное двух комплексных чисел есть число комплексное. Имеем

$$z = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i.$$

Итак, если $a + bi \neq 0$, то решением уравнения $(a + bi)z = c + di$ является число $z = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$. Это означает, что всякое ненулевое комплексное число имеет обратное, причем единственное. Таким образом, из определения операции умножения комплексных чисел, ее свойств и того факта, что любое ненулевое комплексное число имеет обратное, следует, что *множество комплексных чисел является еще и мультипликативной группой.*

Пример 1. Найти значение выражения $\frac{7-9i}{11+i}$.

△ Умножим числитель и знаменатель данного выражения на комплексное число, сопряженное знаменателю. Используя правило умножения комплексных чисел и учитывая, что квадрат мнимой единицы равен (-1), получаем

$$\frac{7-9i}{11+i} = \frac{(7-9i)(11-i)}{121+1} = \frac{77-99i-7i-9}{122} = \frac{68}{122} - \frac{106}{122}i = \frac{34}{61} - \frac{53}{61}i. \ ▲$$

Пример 2. Решить уравнение $(2+5i)z = 3-2i$.

△ Имеем

$$z = \frac{3-2i}{2+5i} = \frac{-4-19i}{29} = -\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i.$$

Следовательно, решением данного уравнения является число $z=-\frac{4}{29}-\frac{19}{29}i$. ▲

Определение 5. Числа вида $a + bi$ и $a - bi$ называют *сопряженными*.

Очевидно, что всякое вещественное число сопряжено само с собой.

5. Понятие поля. Примеры полей

Рассмотрим непустое множество P, состоящее из элементов произвольной природы. На этом множестве определим две так называемые внутренние алгебраические операции, которые любым двум элементам из множества P ставят в соответствие некоторый третий элемент, также принадлежащий множеству P. Одну из этих операций обычно называют «сложением», а другую – «умножением». Для обозначения операции сложения элементов из множества P обычно используют символ « + », а для обозначения операции умножения элементов из множества P – символ « · ». Таким образом, если $a \in P, b \in P$, то $a + b \in P$ и $a \cdot b \in P$.

Определение 6. Непустое множество P, состоящее из элементов произвольной природы называют *полем*, если на этом множестве определены две внутренние алгебраические операции «сложение» и «умножение» элементов из P, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для любых элементов $a \in P$ и $b \in P$ справедливо равенство $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

2) для любых трех элементов $a \in P, b \in P, c \in P$ имеет место равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

3) в множестве P существует нулевой элемент 0 такой, что $a + 0 = a$ для любого элемента a из множества P;

4) для любого элемента $a \in P$ существует ему противоположный $(-a) \in P$ такой, что выполняется равенство $a + (-a) = 0$;

5) для любых двух элементов $a \in P, b \in P$ из поля P имеет место равенство $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

6) для любых трех элементов $a \in P, b \in P, c \in P$ имеет место равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

7) в множестве P существует так называемый единичный элемент e такой, что для любого $a \in P$ справедливы равенства $a \cdot e = e \cdot a = a$;

8) для любого ненулевого элемента a из множества P существует ему обратный a^{-1} такой, что $a \cdot a^{-1} = e$;

9) для любых трех элементов $a \in P$, $b \in P$, $c \in P$ имеет место равенство $(a + b)\, c = ac + bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Примерами полей являются множество рациональных чисел, множество вещественных чисел и множество комплексных чисел. Однако множество целых чисел полем не является, поскольку в этом множестве не выполняется условие 8 определения поля. Заметим, что всякое поле является как аддитивной, так и мультипликативной группой.

Приведем еще один очень важный пример поля. Рассмотрим множество, состоящее из двух чисел 0 и 1. Определим операцию сложения следующим образом: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Умножение чисел определим как обычно: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Можно показать, что определенные таким образом операции сложения и умножения на множестве из чисел 0 и 1 удовлетворяют всем требованиям, приведенным в определении поля. Значит, множество из чисел 0 и 1 относительно специальным образом определенных операций сложения и умножения есть поле. Аналогично можно показать, что конечное множество, состоящее из чисел $0, 1, 2, \ldots, m$, также является полем относительно специальным образом определенных операций сложения и умножения. Такие поля называют *конечными*.

Свойства поля

1°. *В поле P существует один и только один нулевой элемент.*

Это следует из того, что поле является группой по сложению.

2°. *В поле P для любого элемента a существует только один ему противоположный.*

Это следует из того, что поле является группой по сложению.

3°. *В поле P существует только один единичный элемент.*

Это следует из того, что поле является группой по умножению.

4°. *В поле P для любого ненулевого элемента a существует единственный ему обратный.*

Это также следует из того, что поле является группой по умножению.

5°. *В поле P всякое уравнение вида $a + x = b$, где a и b — произвольные элементы из поля P, имеет единственное решение.*

❒ Прибавив к обеим частям данного уравнения элемент $(-a)$, противоположный для a, получим уравнение $a + (-a) + x = b + (-a)$. Так как $a + (-a) = 0$, то $x = b - a$. ■

6°. *В поле P всякое уравнение вида $ax = b$, где a и b — произвольные элементы из поля P, причем $a \neq 0$, имеет единственное решение.*

❒ Умножив обе части данного уравнения на элемент a^{-1}, обратный к a, получим уравнение $(a \cdot a^{-1}) \cdot x = b \cdot a^{-1}$. Так как $a \cdot a^{-1} = e$ и $e \cdot x = x$, то $x = b \cdot a^{-1}$. ■

6. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Возьмем произвольно комплексное число $u = a + bi$. Рассмотрим упорядоченную пару $(a; b)$ вещественных чисел a и b. Очевидно, что установленное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством упорядоченных пар вещественных чисел взаимно однозначно. Как известно, между точками координатной плоскости и между множеством упорядоченных пар вещественных чисел также существует взаимно однозначное соответствие. Это означает, что каждому комплексному числу $u = a + bi$ на координатной плоскости соответствует единственная точка $M(a; b)$. Рассмотрим радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M. Обозначим через φ угол, который образует радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M с положительным направлением Ox. Число φ называют *аргументом* комплексного числа $u = a + bi$, а положительное число r, равное длине $|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}|$ радиуса-вектора точки M, называют его *модулем*. Обычно для обозначения аргумента и модуля комплексного числа u используют следующие символы:

$$\varphi = \operatorname{Arg}(u), \ r = \operatorname{mod}(u).$$

Отметим, что $0 \leq \varphi < 360°$, $0 \leq r < +\infty$.

Для нахождения аргумента комплексного числа $u = a + bi$ необходимо знать

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

где $\sqrt{a^2+b^2}$ — модуль комплексного числа u.

Рассмотрим ненулевое комплексное число $u = a + bi$. Умножим и разделим его правую часть на одно и то же выражение $\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда получим

$$u = \frac{(a+bi)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right).$$

Но $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|u| = \sqrt{a^2+b^2}$, поэтому

$$u = |u|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi).$$

Такую форму комплексного числа называют *тригонометрической.*

Возьмем произвольно два комплексных числа

$$u_1 = |u_1|(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1),\ u_2 = |u_2|(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2),$$

заданных в тригонометрической форме. Найдем их произведение:

$$u_1\cdot u_2 =$$

$$= |u_1|\cdot|u_2|\cdot\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)i\right) =$$

$$= |u_1|\cdot|u_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Итак,

$$u_1\cdot u_2 = |u_1|\cdot|u_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Аналогично можно показать, что произведение n комплексных чисел $u_1 = |u_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$, $u_2 = |u_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$, ...,

$u_n = |u_n| \cdot (\cos\varphi_n + i \cdot \sin\varphi_n)$, заданных в тригонометрической форме, выражается формулой

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n =$$
$$= |u_1| \cdot |u_2| \cdot \ldots \cdot |u_n| \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\right).$$

В частности, для n-й степени комплексного числа $u = |u| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ справедлива формула

$$u^n = |u|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

Пример. Возвести в степень $\left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)^{11}$.

△ Рассмотрим комплексное число $u = 1 + \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент. Имеем $|u| = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\varphi = 60°$. Таким образом, согласно формуле возведения в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, получаем

$$u^{11} = 2^{11}(\cos 11 \cdot 60° + i \cdot \sin 11 \cdot 60°) = 2^{11}(\cos 60° - i \cdot \sin 60°) =$$
$$= 2^{11} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1024 - 1024\sqrt{3}i. \ ▲$$

7. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме

Рассмотрим алгебраическое уравнение $z^n = u$ степени n, где z — неизвестная переменная, а u — комплексное число, заданное в тригонометрической форме, т.е. $u = |u|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Представим z в виде $z = |z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$. Для того чтобы найти значение неизвестной z, достаточно найти ее аргумент φ_1 и модуль $|z|$. Имеем

$$|z|^n (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)^n = |u|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

или

$$|z|^n \cdot (\cos n\varphi_1 + i \cdot \sin n\varphi_1) = |u| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

откуда

$$|z|^n \cos n\varphi_1 = |u|\cos\varphi, \ \ |z|^n \sin n\varphi_1 = |u|\sin\varphi .$$

Решив совместно последние два уравнения, находим

$$|z| = \sqrt[n]{|u|}, \ \ \varphi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \ \ k = 0, 1, 2, \ \dots, \ n-1 .$$

Таким образом, решение уравнения $z^n = u$ на множестве комплексных чисел представляется набором из n комплексных чисел вида

$$z = \sqrt[n]{|u|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ \dots, \ n-1$.

П р и м е р 1. Извлечь корень $\sqrt[3]{i}$.

△ Рассмотрим комплексное число $u = i$. Найдем его модуль и аргумент. Имеем $|u| = 1, \ \sin\varphi = 1, \ \cos\varphi = 0$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, значения выражения $\sqrt[3]{i}$ находят по формуле

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), \ k = 0, 1, 2 ,$$

или, более подробно:

$$k = 0, \ \ z = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ,$$

$$k = 1, \ \ z = \cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ,$$

$$k = 2, \ \ z = \cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = -i. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Решить уравнение $z^1 - 1 = 0$.

△ Имеем $z = \sqrt[3]{1}$. Так как $u = 1,\ a = 1,\ b = 0,\ |u| = 1$, то $\cos\varphi = 1,\ \sin\varphi = 0$, откуда $\varphi = 0$. Следовательно, решениями данного уравнения являются значения

$$z = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi k}{3}\right) \text{ при } k = 0,\ 1,\ 2,$$

или

$$z_1 = 1,\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad ▲$$

2, 3

Лекции

МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. Понятие матрицы. Сложение матриц

Определение 1. *Матрицей* называют таблицу, составленную из m строк и n столбцов вещественных или комплексных чисел.

Например, таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей порядка 3×5. Она состоит из трех строк и пяти столбцов. Вещественные или комплексные числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{34}, a_{35}$ называют *элементами* матрицы. При этом говорят, что элементы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ образуют первую строку матрицы, элементы $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}$ — вторую строку, а элементы $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}$ — третью строку; элементы a_{11}, a_{21}, a_{31} образуют первый столбец матрицы, элементы a_{12}, a_{22}, a_{32} — второй столбец и т.д., наконец, элементы a_{15}, a_{25}, a_{35} образуют пятый столбец матрицы.

Для обозначения матрицы, состоящей из m строк и n столбцов, принято использовать следующую запись:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{......................} \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 2. Матрицу называют *квадратной*, если число ее строк равно числу ее столбцов.

Например, матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

является квадратной матрицей порядка n. Элементы c_{11}, c_{22}, c_{33}, ..., c_{nn} образуют главную диагональ матрицы. При $n = 2$ получаем квадратную матрицу второго порядка, которая имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

главная диагональ этой матрицы определяется двумя элементами c_{11}, c_{22}; при $n = 3$ получаем квадратную матрицу третьего порядка, которая имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

главная диагональ этой матрицы определяется тремя элементами c_{11}, c_{22}, c_{33}.

Определение 3. Число $c_{11} + c_{22} + c_{33} + \dots + c_{nn}$, равное сумме элементов, находящихся на главной диагонали матрицы C, называют ее *следом*. Для обозначения следа матрицы используют символ $\mathrm{Tr}\ C$. Таким образом,

$$\mathrm{Tr}\ C = c_{11} + c_{22} + c_{33} + \dots + c_{nn}.$$

Приведем примеры матриц второго и третьего порядка. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

является матрицей второго порядка с вещественными элементами и следом $\mathrm{Tr}\ A = 4$; матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$$

является матрицей второго порядка с комплексными элементами и следом Tr B = 2. Примером матрицы третьего порядка с комплексными элементами служит матрица

$$C = \begin{pmatrix} 2+5i & 4 & i-1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1-2i & 3-i & 5 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что Tr $C = 9 + 5i$.

Определение 4. Квадратную матрицу вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называют *единичной матрицей.*

Определение 5. Квадратную матрицу вида

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называют *нулевой матрицей.*

Определение 6. Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, называют *верхней треугольной матрицей.*

Определение 7. Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю, называют *нижней треугольной матрицей.*

Определение 8. Квадратные матрицы A и B называют *транспонированными*, если первый столбец матрицы A совпадает с первой строкой матрицы B, второй столбец матрицы A совпадает со второй строкой матрицы B и т.д., наконец, n-й столбец матрицы A совпадает с n-й строкой матрицы B.

Если матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то транспонированной к ней матрицей $A^{\text{т}}$ или A' является матрица вида

$$A^{\text{т}} = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Возьмем любые две матрицы одного и того же порядка $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 9. *Суммой* $A + B$ двух *матриц* A и B одного и того же порядка называют матрицу вида

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1-i & 4 \\ 2 & 5 & 2+3i \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1+i & i \\ -2 & 1 & 2-3i \end{pmatrix}$ — две матрицы порядка 2×3. Тогда их суммой является матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4+i \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

1°. *Сложение матриц коммутативно, т.е.* $A + B = A + B$ *для любых матриц* A *и* B *одного и того же порядка.*

❒ Пусть матрицы A и B имеют соответственно вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц A и B будет иметь вид

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как сложение вещественных и комплексных чисел коммутативно, то

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \dots & b_{2n}+a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \dots & b_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}
$$

Следовательно, $A + B = B + A$. ■

2°. *Сложение матриц ассоциативно, т.е. для любых трех матриц одного и того же порядка справедливо равенство*

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

❒ Возьмем произвольно три матрицы

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},
$$

$$
C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$(A + B) + C =$$

$$
= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} & \dots & (a_{1n}+b_{1n})+c_{1n} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} & \dots & (a_{2n}+b_{2n})+c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}+b_{m1})+c_{m1} & (a_{m2}+b_{m2})+c_{m2} & \dots & (a_{mn}+b_{mn})+c_{mn} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) & \dots & a_{1n}+(b_{1n}+c_{1n}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) & \dots & a_{2n}+(b_{2n}+c_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+(b_{m1}+c_{m1}) & a_{m2}+(b_{m2}+c_{m2}) & \dots & a_{mn}+(b_{mn}+c_{mn}) \end{pmatrix} =
$$

$$= A + (B + C).$$

3°. *Если к любой матрице A прибавить нулевую матрицу, то она не изменится, т.е.*

$$A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = A.$$

4°. *Для любой матрицы A существует единственная матрица B такая, что A + B = 0.*

❒ Если матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то в качестве матрицы B можно взять матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \ldots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что существует еще одна матрица D такая, что

$$A + D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

то из равенств $A = -D$, $A = -B$ следует, что $D = B$. ■