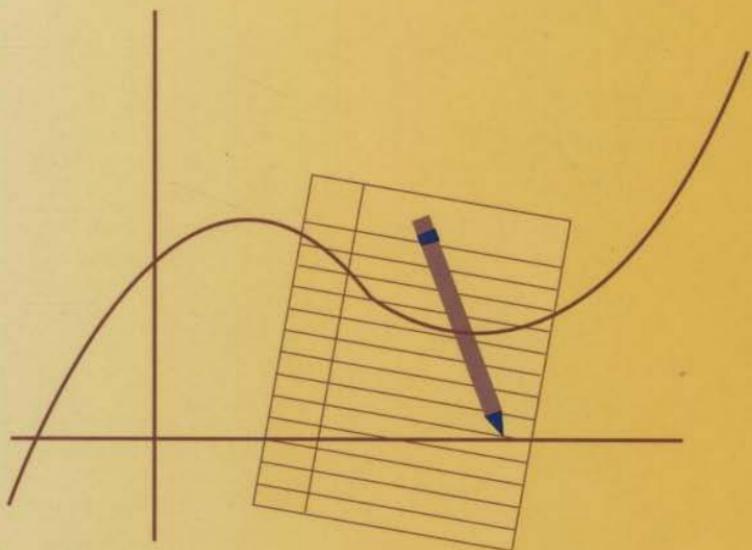


С. Н. Дорофеев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОЛНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ



Мир и Образование

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Д69

Р е ц е н з е н т ы :

Мантуров О. В. — докт. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. геометрии
Московского государственного областного университета;

Данилов А. М. — докт. техн. наук, Соросовский проф. в области точных наук,
зав. каф. высшей математики Пензенского университета архитектуры и строительства;

Смирнов Ю. Г. — докт. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математики
и математического моделирования Пензенского государственного университета.

Дорофеев С. Н.

Д69 Высшая математика / С. Н. Дорофеев. — М.: ООО «Изда-
тельство «Мир и Образование», 2011. — 592 с.: ил. — (Полный
конспект лекций).

ISBN 978-5-94666-622-0

В данном пособии в форме лекций изложены основные теоретиче-
ские сведения, определения, факты и теоремы линейной алгебры,
аналитической геометрии и математического анализа. Теоретический
материал лекции закрепляется большим количеством примеров.

Конспект лекций предназначен для студентов инженерных и эконо-
мических специальностей вузов, преподавателей и учителей мате-
матики, а также учащихся старших классов с углубленным изучением
математики.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-94666-622-0

© Дорофеев С. Н., 2011
© ООО «Издательство «Мир и Образование», 2011

Содержание

Предисловие	11
Лекция 1. Комплексные числа	
1. Понятие комплексного числа. Сложение комплексных чисел	14
2. Умножение комплексных чисел	16
3. Понятие группы. Примеры групп	17
4. Деление комплексных чисел	19
5. Понятие поля. Примеры полей	20
6. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме	22
7. Извлечение корня n -й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме	24
Лекции 2, 3. Матрицы. Действия над матрицами	
1. Понятие матрицы. Сложение матриц	27
2. Умножение матрицы на число	34
3. Умножение матриц	35
4. Понятие кольца. Примеры колец	38
Лекция 4. Определители	
1. Понятие определителя второго порядка	41
2. Понятие определителя третьего порядка	43
3. Понятие определителя n -го порядка	45
4. Характеристическое уравнение и собственные числа матрицы	48
Лекция 5. Системы линейных уравнений	
1. Правило Крамера	50
2. Матричный способ решения системы линейных уравнений	53
3. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений	56
Лекция 6. Векторные пространства	
1. Понятие векторного пространства.	63
2. Линейная зависимость векторов	64
3. Понятие базиса. Координаты вектора	66
4. Линейные операторы в векторном пространстве. Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора	71

Лекции 7, 8. Системы координат на плоскости и в пространстве

1. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве.
Координаты точки 76
2. Деление отрезка в данном отношении 79
3. Преобразование координат точки при переходе
от одной АСК к другой 80
4. Ориентация плоскости (пространства) 84

Лекция 9. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве

1. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве 89
2. Формулы преобразования координат точки при переходе от одной ПДСК к другой 90
3. Скалярное произведение векторов 94
4. Выражение скалярного произведения на плоскости через координаты векторов 99

Лекция 10. Векторное и смешанное произведения векторов

1. Векторное произведение векторов 103
2. Смешанное произведение векторов 106

Лекция 11. Полярная система координат на плоскости.

Сферические и цилиндрические координаты точек в пространстве

1. Полярная система координат на плоскости 112
2. Сферические координаты точки в пространстве 113
3. Цилиндрические координаты точки в пространстве 115

Лекции 12, 13. Прямая на плоскости

1. Различные способы задания прямой на плоскости 118
2. Общее уравнение прямой 121
3. Расположение прямой относительно АСК 122
4. Геометрический смысл знака трехчлена $Ax + By + C$ 124
5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости 124
6. Угол между двумя прямыми 126
7. Направленный угол между двумя векторами 127
8. Направленный угол между двумя прямыми 128
9. Расстояние от точки до прямой на плоскости 130
10. Пучок прямых 131

Лекции 14, 15. Плоскость в пространстве

1. Различные способы задания плоскости в пространстве 133
2. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности вектора и плоскости 136
3. Расположение плоскости относительно системы координат 138
4. Геометрический смысл знака многочлена $Ax + Bx + Cz + D$ 140
5. Взаимное расположение двух плоскостей 141
6. Угол между двумя плоскостями 142
7. Пучок плоскостей 144

8. Расстояние от точки до плоскости	146
9. Связка плоскостей	147
Лекция 16. Прямая в пространстве	
1. Различные способы задания прямой в пространстве	150
2. Взаимное расположение прямой и плоскости	153
3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве	153
4. Угол между двумя прямыми	155
5. Угол между прямой и плоскостью	156
6. Расстояние от точки до прямой в пространстве	157
7. Расстояние между скрещивающимися прямыми	158
Лекция 17. Преобразования плоскости и пространства	
1. Понятие преобразования множества. Группа преобразований	161
2. Понятие движения плоскости (пространства). Примеры движений	162
Лекция 18. Эллипс и эллипсоид	
1. Эллипс и его свойства	170
2. Эллипсоид и его свойства	174
Лекции 19, 20. Гипербола и гиперboloиды	
1. Гипербола и ее свойства	180
2. Однополостный гиперboloид и его свойства	186
3. Двуполостный гиперboloид и его свойства	193
Лекция 21. Парабола и параболоиды	
1. Парабола и ее свойства	198
2. Эллиптический параболоид и его свойства	200
3. Гиперболический параболоид и его свойства	203
4. Поверхности вращения	208
Лекция 22. Линейчатые поверхности	
1. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида и гиперболического параболоида	211
2. Цилиндрические поверхности	213
Лекция 23. Конические поверхности	
1. Понятие конической поверхности	216
2. Конические поверхности второго порядка	218
3. Конусы вращения	220
Лекция 24. Аффинные пространства	
1. Понятие n -мерного аффинного пространства A_n . Координаты точки. Деление отрезка в данном отношении	224
2. Понятие k -мерной плоскости в n -мерном аффинном пространстве A_n . Гиперплоскости в A_n	227
Лекция 25. Квадратичные формы	
1. Понятие квадратичной формы. Положительно-определенные квадратичные формы	229
2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду	230

3. Квадрики в n -мерном аффинном пространстве A_n .	
Классификация квадрик в A_n	237
Лекция 26. Евклидовы n-мерные пространства	
1. Понятие евклидова n -мерного векторного пространства. Ортонормированный базис. Длина вектора. Угол между векторами	244
2. Евклидовы n -мерные пространства	247
Лекция 27. Квадрики в n-мерном евклидовом пространстве E_n.	
Классификация квадрик в E_n	
1. Собственные значения и собственные векторы симметрической матрицы	252
2. Классификация квадрик в E_n	254
3. Приведение общего уравнения линии второго порядка на евклидовой плоскости к каноническому виду	258
4. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка в евклидовом пространстве E_3 к каноническому виду	261
Лекции 28–30. Числовые последовательности	
1. Понятие числовой последовательности. Способы задания числовых последовательностей	270
2. Ограниченные числовые последовательности	271
3. Бесконечно малые числовые последовательности	273
4. Предел числовой последовательности при $n \rightarrow \infty$	275
5. Возрастающие и убывающие числовые последовательности. Число e	278
6. Бесконечно большие числовые последовательности	283
Лекции 31, 32. Числовые функции	
1. Понятие числовой функции. Способы задания числовых функций	287
2. Четные и нечетные функции	291
3. Монотонность функции	292
4. Периодические функции	294
5. Обратимые функции	294
Лекции 33, 34. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty$)	
1. Бесконечно малые функции при $x \rightarrow +\infty$; ($x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty$)	298
2. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty$)	302
3. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty$)	307
4. Асимптоты	308
Лекции 35, 36. Предел функции при $x \rightarrow a$	
1. Бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$	311
2. Предел функции при $x \rightarrow a$	313
3. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow a$	316
4. Односторонние пределы	317

Лекция 37. Непрерывность функции	
1. Непрерывность функции в точке	319
2. Непрерывность функции на промежутке	320
3. Первый замечательный предел	322
4. Второй замечательный предел	323
5. Точки разрыва функции	324
Лекции 38–40. Производная функции	
1. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной	327
2. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \log_a x$, $y = x^n$, $y = a^x$	329
3. Производная сложной и обратной функции	332
4. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых на отрезке функциях	337
5. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора	339
6. Правило Лопиталя	341
7. Применение производной к исследованию функции на монотонность. Экстремум функции	344
8. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба	348
Лекции 41–44. Неопределенный интеграл	
1. Понятие неопределенного интеграла. Таблица простейших интегралов	351
2. Интегрирование методом замены переменной и методом подстановки	356
3. Интегрирование по частям	358
4. Интегрирование дробно-рациональных функций	360
5. Интегрирование функций, рационально зависящих от $\sin x$ и $\cos x$	364
Лекции 45, 46. Определенный интеграл	
1. Понятие определенного интеграла. Геометрический и физический смысл определенного интеграла	367
2. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница	371
3. Методы вычисления определенного интеграла	373
Лекции 47, 48. Применение определенного интеграла к решению некоторых геометрических и физических задач	
1. Вычисление длин дуг	378
2. Вычисление объемов геометрических тел	380
3. Вычисление площадей поверхностей вращения	382
4. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести	384
Лекция 49. Несобственные интегралы	
1. Несобственные интегралы первого рода	388
2. Несобственные интегралы второго рода	393

Лекции 50–53. Числовые и функциональные ряды	
1. Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда	397
2. Признаки сходимости числовых рядов	398
3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда	405
4. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда	407
5. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Представление элементарных функций в виде степенных рядов	409
6. Ряды Фурье	412
Лекция 54. Метрические пространства	
1. Понятие метрического пространства. Примеры	418
2. Окружности на плоскости с метрикой d_1	421
3. Полнота метрических пространств	425
Лекции 55, 56. Элементы топологии	
1. Понятие n -мерного арифметического пространства R^n	428
2. Открытые и замкнутые подмножества	431
3. Понятие топологического пространства. Топологические пространства со счетной базой и многообразия	432
Лекции 57, 58. Функции нескольких переменных	
1. Понятие функции нескольких переменных	437
2. Бесконечно малые функции нескольких переменных	438
3. Предел функции нескольких переменных	442
4. Бесконечно большие функции нескольких переменных	447
5. Непрерывность функции нескольких переменных. Теоремы Вейерштрасса	448
Лекция 59. Дифференцирование функций нескольких переменных	
1. Частные производные	451
2. Дифференциал функции нескольких переменных	456
3. Производная сложной функции	460
Лекция 60. Экстремум функции нескольких переменных	
1. Экстремум функции двух переменных	462
2. Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных	465
3. Производная по направлению. Градиент функции	467
Лекции 61, 62. Двойной интеграл	
1. Понятие двойного интеграла	472
2. Вычисление двойного интеграла сведением его к повторным	476
3. Вычисление двойного интеграла методом подстановки	478
4. Применение двойного интеграла к решению физических задач	482
Лекции 63, 64. Тройной интеграл	
1. Понятие тройного интеграла	486
2. Способы вычисления тройных интегралов	488

3. Применение тройного интеграла к решению физических задач	499
Лекция 65. Криволинейные интегралы	
1. Криволинейный интеграл первого рода	504
2. Криволинейный интеграл второго рода. Формула Грина	507
3. Поверхностный интеграл первого рода	509
4. Поверхностный интеграл второго рода. Формула Стокса ...	510
Лекции 66–68. Дифференциальные уравнения первого порядка	
1. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решения	512
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	514
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	517
4. Дифференциальные уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$	520
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	523
6. Уравнение Бернулли	527
7. Уравнение в полных дифференциалах	529
8. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно y'	531
Лекция 69. Дифференциальные уравнения второго порядка	
1. Простейшие дифференциальные уравнения n -го порядка ...	533
2. Дифференциальные уравнения второго порядка, правая часть которых не содержит искомой функции	535
3. Дифференциальные уравнения второго порядка, правая часть которых не содержит независимой переменной	536
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	538
5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	540
Лекция 70. Системы дифференциальных уравнений	
1. Системы линейных дифференциальных уравнений	549
2. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных	554
Лекции 71, 72. Функции комплексного переменного.	
Понятие производной	
1. Множества на комплексной плоскости	558
2. Понятие функций комплексного переменного. Предел и непрерывность	559
3. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Аналитические функции	566

Лекции 73, 74. Интегрирование функций комплексного переменного	
1. Понятие интеграла от функции комплексного переменного	571
2. Основные теоремы интегрального исчисления	574
Лекции 75, 76. Ряды в комплексной области. Ряды Тейлора и Лорана	
1. Понятие ряда с комплексными членами. Сходимость ряда. Ряды Тейлора и Лорана	580
2. Особые точки функции комплексного переменного	585
Литература	589

1

Лекция

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Понятие комплексного числа. Сложение комплексных чисел

Как известно, уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет два решения: $x_{1,2} = \pm 1$. Рассмотрим уравнение $x^2 + 1^2 = 0$. Перенеся единицу из левой части в правую со знаком «минус», получим уравнение $x^2 = -1$. Из школьного курса математики мы знаем, что это уравнение на множестве вещественных чисел не имеет решений. Расширим множество вещественных чисел добавлением «нового» числа i такого, что $i^2 = -1$. Тогда данное уравнение примет вид $x^2 = i^2$, откуда находим $x_{1,2} = \pm i$. Число i называют *мнимой единицей*.

Теперь рассмотрим уравнение $x^2 + a^2 = 0$. Оно равносильно уравнению $x^2 = -a^2$ или, с учетом того, что $i^2 = -1$, уравнению $x^2 = a^2 i^2$. Чтобы это уравнение было разрешимо на некотором множестве чисел, необходимо расширить множество вещественных чисел добавлением к нему не только мнимой единицы, но и чисел вида ai , где a — любое вещественное число, а i — мнимая единица. Отсюда получаем, что в расширенном множестве вещественных чисел это уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \pm ai$.

Далее рассмотрим какое-нибудь квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом, например $x^2 + 2x + 2 = 0$. Нетрудно показать, что для данного уравнения $D = 4i^2$, откуда $\sqrt{D} = \pm 2i$. Следовательно, корнями этого уравнения являются числа $x_{1,2} = -1 \pm i$.

Итак, для того чтобы любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ было разрешимо на некотором множестве чисел, необходимо расширить поле вещественных чисел добавлением чисел вида $a + bi$, где a и b — любые вещественные числа, а i — мнимая единица.

Определение 1. Числа вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — мнимая единица, называют *комплексными числами*. При этом a называют *вещественной частью*, а b — *мнимой частью*.

Заметим, что все вещественные числа представляют частный случай комплексных чисел.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 3x + 9 = 0$.

△ По формуле $D = b^2 - 4ac$ найдем дискриминант данного квадратного уравнения. Имеем $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -25 = 25i^2$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25i^2}}{2} = \frac{-3 + 5i}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{25i^2}}{2} = \frac{-3 - 5i}{2}.$$

Итак, корнями данного квадратного уравнения являются комплексные числа $x_1 = \frac{-3 + 5i}{2}$ и $x_2 = \frac{-3 - 5i}{2}$. ▲

Возьмем произвольно два комплексных числа $u = a + bi$ и $v = c + di$.

Определение 2. Суммой $u + v$ двух комплексных чисел u и v называют комплексное число $(a + c) + (b + d)i$, действительная и мнимая части которого равны суммам действительных и мнимых частей чисел u и v .

Свойства сложения комплексных чисел _____

1°. *Коммутативность, т.е. для любых комплексных чисел u , v справедливо равенство $u + v = v + u$.*

2°. *Ассоциативность, т.е. для любых комплексных чисел u , v , w справедливо равенство $(u + v) + w = u + (v + w)$.*

3°. *Любое комплексное число u не изменится, если к нему прибавить число 0, т.е. $u + 0 = u$.*

4°. *Для любого комплексного числа u найдется единственное число $(-u)$ такое, что $u + (-u) = 0$.*

2. Умножение комплексных чисел

Возьмем произвольно два комплексных числа $u = a + bi$ и $v = c + di$.

Определение 3. Произведением uv двух комплексных чисел u и v называют число $ac - bd + (ad + bc)i$.

Пример 1. Найти произведение двух комплексных чисел $u = 3 + 4i$ и $v = 5 - 6i$.

△ Имеем

$$uv = (3 + 4i)(5 - 6i) = 15 + 24 + (-18 + 20)i = 39 + 2i.$$

Таким образом, $uv = 39 + 2i$. ▲

Свойства умножения комплексных чисел

1°. Коммутативность, т.е. для любых комплексных чисел u, v справедливо равенство $uv = vu$.

□ Пусть $u = a + bi$ и $v = c + di$. Тогда $uv = ac - bd + (ad + bc)i$ и $vu = ca - db + (da + cb)i$. Так как умножение вещественных чисел коммутативно, то $uv = vu$. ■

2°. Ассоциативность, т.е. для любых комплексных чисел u, v, w справедливо равенство $(uv)w = u(vw)$.

□ Пусть $u = a + bi, v = c + di, w = m + ni$. Тогда

$$\begin{aligned}(uv)w &= [(ac - bd)m - (ad + bc)n] + [(ac - bd)n + (ad + bc)m]i, \\ u(vw) &= [a(cm - dn) - b(cn + dm)] + [a(cn + md) + b(cm - dn)]i.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(ac - bd)m - (ad + bc)n &= a(cm - dn) - b(cn + dm), \\ (ac - bd)n + (ad + bc)m &= a(cn + md) + b(cm - dn),\end{aligned}$$

имеем $(uv)w = u(vw)$. ■

3°. Дистрибутивность умножения комплексных чисел относительно сложения, т.е. для любых комплексных чисел u, v, w справедливо равенство $(u + v)w = uw + vw$.

□ Пусть $u = a + bi, v = c + di, w = m + ni$. Тогда

$$\begin{aligned}uw + vw &= (am - bn) + (an + bm)i + (cm - dn) + (cn + dm)i = \\ &= [(a + c)m - (b + d)n] + [(a + c)n + (b + d)m]i.\end{aligned}$$

Так как $(u + v)w = [(a + c)m - (b + d)n] + [(a + c)n + (b + d)m]i$, то $(u + v)w = uw + vw$. ■

Пример 2. Выполнить действия:

а) $(3 + 7i)(-5 + 9i)$; б) $(2 - 3i)^3$; в) $(7 - 11i)^2(3i + 5)$.

△ а) Используя правило $uv = ac - bd + (ad + bc)i$ умножения комплексных чисел, находим $(3 + 7i)(-5 + 9i) = -78 - 8i$.

б) Применяя формулу $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ куба разности двух выражений и учитывая, что $i^2 = -1, i^3 = -i$, получаем

$$(2 - 3i)^3 = 8 - 36i + 54i^2 - 27i^3 = -46 - 9i.$$

в) Согласно формуле квадрата разности двух выражений, получаем $(7 - 11i)^2 = 49 - 154i + 121i^2$. Так как квадрат мнимой единицы равен (-1) , то $(7 - 11i)^2 = -72 - 154i$. Далее, используя правило умножения комплексных чисел, находим

$$\begin{aligned}(7 - 11i)^2(3i + 5) &= (-154i - 72)(3i + 5) = \\ &= 462 - 216i - 770i - 360 = 102 - 986i. \blacktriangle\end{aligned}$$

3. Понятие группы.

Примеры групп

Определение 4. Непустое множество G , состоящее из элементов произвольной природы, называют *группой*, если на этом множестве можно определить внутреннюю бинарную алгебраическую операцию $*$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) для любых элементов a, b, c , принадлежащих множеству G , выполняется равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$;

2) в множестве G существует нейтральный элемент e такой, что для любого элемента $a \in G$ имеет место равенство $a * e = e * a = a$;

3) для любого элемента a из множества G в этом множестве всегда найдется элемент a' такой, что $a * a' = a' * a = e$.

Пусть внутренняя бинарная алгебраическая операция, определенная на множестве G , удовлетворяет еще одному условию:

4) для любых элементов a, b , принадлежащих группе G , выполняется равенство $a * b = b * a$ (коммутативность).

Тогда группу G называют *коммутативной*.

Примерами коммутативных групп служат: множество комплексных чисел относительно сложения; множество ненулевых комплексных чисел относительно умножения; множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где a и b — произвольные вещественные числа, относительно сложения; множество направленных отрезков (векторов) плоскости или пространства относительно сложения векторов; множество многочленов от одной переменной степени не выше чем n относительно операции сложения многочленов. Можно показать, что в любой группе существует только один нейтральный элемент и для любого элемента a из группы в ней имеется один и только один ему противоположный (обратный). Если множество G является группой по сложению, то обычно такую группу называют *аддитивной*; если множество G является группой по умножению, то такую группу называют *мультипликативной*.

Нетрудно показать, что в аддитивной группе G однозначно разрешимо уравнение вида $a + x = b$, где a и b — произвольные элементы из G , а в мультипликативной группе G однозначно разрешимо уравнение вида $ax = b$ для любых элементов a и b из группы G .

Свойства группы _____

1°. В группе G существует один и только один нейтральный элемент.

□ Предположим противное. Пусть в группе G имеются два нейтральных элемента e и e' . Так как e' — нейтральный элемент, то $e * e' = e$. Далее, по предположению, элемент e также нейтральный, значит, $e * e' = e'$. Таким образом, $e * e = e * e'$, откуда следует, что $e = e'$. ■

2°. В группе G для любого элемента a существует только один элемент a' такой, что $a * a' = e$.

□ Предположим противное. Пусть в группе G для некоторого ее элемента a существуют два элемента b и b' таких, что $a * b = b * a = e$, $b' * a = a * b' = e$. Поэтому

$$b = e * b = (a * b') * b = b' * (a * b) = b' * e = b',$$

откуда следует, что $b = b'$. ■

4. Деление комплексных чисел

Рассмотрим уравнение вида $ax = b$, где a и b — вещественные числа. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$. Пусть теперь хотя бы один из коэффициентов данного уравнения является комплексным числом, тогда уравнение примет вид $uz = v$. Если $u \neq 0$, то

$z = \frac{v}{u} = \frac{c + di}{a + bi}$. Покажем, что частное двух комплексных чисел есть число комплексное. Имеем

$$\begin{aligned} z &= \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \\ &= \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 - b^2i^2} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i. \end{aligned}$$

Итак, если $a + bi \neq 0$, то решением уравнения $(a + bi)z = c + di$ является число $z = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$. Это означает, что всякое ненулевое комплексное число имеет обратное, причем единственное. Таким образом, из определения операции умножения комплексных чисел, ее свойств и того факта, что любое ненулевое комплексное число имеет обратное, следует, что *множество комплексных чисел является еще и мультипликативной группой*.

Пример 1. Найти значение выражения $\frac{7 - 9i}{11 + i}$.

△ Умножим числитель и знаменатель данного выражения на комплексное число, сопряженное знаменателю. Используя правило умножения комплексных чисел и учитывая, что квадрат мнимой единицы равен (-1) , получаем

$$\frac{7 - 9i}{11 + i} = \frac{(7 - 9i)(11 - i)}{121 + 1} = \frac{77 - 99i - 7i - 9}{122} = \frac{68}{122} - \frac{106}{122}i = \frac{34}{61} - \frac{53}{61}i. \blacktriangle$$

Пример 2. Решить уравнение $(2 + 5i)z = 3 - 2i$.

△ Имеем

$$z = \frac{3 - 2i}{2 + 5i} = \frac{-4 - 19i}{29} = -\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i.$$

Следовательно, решением данного уравнения является число

$$z = -\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i. \blacktriangle$$

Определение 5. Числа вида $a + bi$ и $a - bi$ называют *сопряженными*.

Очевидно, что всякое вещественное число сопряжено само с собой.

5. Понятие поля. Примеры полей

Рассмотрим непустое множество P , состоящее из элементов произвольной природы. На этом множестве определим две так называемые внутренние алгебраические операции, которые любому двум элементам из множества P ставят в соответствие некоторый третий элемент, также принадлежащий множеству P . Одну из этих операций обычно называют «сложением», а другую — «умножением». Для обозначения операции сложения элементов из множества P обычно используют символ «+», а для обозначения операции умножения элементов из множества P — символ « \cdot ». Таким образом, если $a \in P$, $b \in P$, то $a + b \in P$ и $a \cdot b \in P$.

Определение 6. Непустое множество P , состоящее из элементов произвольной природы называют *полем*, если на этом множестве определены две внутренние алгебраические операции «сложение» и «умножение» элементов из P , удовлетворяющие следующим условиям:

1) для любых элементов $a \in P$ и $b \in P$ справедливо равенство $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

2) для любых трех элементов $a \in P$, $b \in P$, $c \in P$ имеет место равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

3) в множестве P существует нулевой элемент 0 такой, что $a + 0 = a$ для любого элемента a из множества P ;

4) для любого элемента $a \in P$ существует ему противоположный $(-a) \in P$ такой, что выполняется равенство $a + (-a) = 0$;

5) для любых двух элементов $a \in P$, $b \in P$ из поля P имеет место равенство $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

6) для любых трех элементов $a \in P$, $b \in P$, $c \in P$ имеет место равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

7) в множестве P существует так называемый единичный элемент e такой, что для любого $a \in P$ справедливы равенства $a \cdot e = e \cdot a = a$;

8) для любого ненулевого элемента a из множества P существует ему обратный a^{-1} такой, что $a \cdot a^{-1} = e$;

9) для любых трех элементов $a \in P, b \in P, c \in P$ имеет место равенство $(a + b) \cdot c = ac + bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Примерами полей являются множество рациональных чисел, множество вещественных чисел и множество комплексных чисел. Однако множество целых чисел полем не является, поскольку в этом множестве не выполняется условие 8 определения поля. Заметим, что всякое поле является как аддитивной, так и мультипликативной группой.

Приведем еще один очень важный пример поля. Рассмотрим множество, состоящее из двух чисел 0 и 1. Определим операцию сложения следующим образом: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$. Умножение чисел определим как обычно: $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$. Можно показать, что определенные таким образом операции сложения и умножения на множестве из чисел 0 и 1 удовлетворяют всем требованиям, приведенным в определении поля. Значит, множество из чисел 0 и 1 относительно специальным образом определенных операций сложения и умножения есть поле. Аналогично можно показать, что конечное множество, состоящее из чисел $0, 1, 2, \dots, t$, также является полем относительно специальным образом определенных операций сложения и умножения. Такие поля называют *конечными*.

Свойства поля

1°. В поле P существует один и только один нулевой элемент.

Это следует из того, что поле является группой по сложению.

2°. В поле P для любого элемента a существует только один ему противоположный.

Это следует из того, что поле является группой по сложению.

3°. В поле P существует только один единичный элемент.

Это следует из того, что поле является группой по умножению.

4°. В поле P для любого ненулевого элемента a существует единственный ему обратный.

Это также следует из того, что поле является группой по умножению.

5°. В поле P всякое уравнение вида $a + x = b$, где a и b — произвольные элементы из поля P , имеет единственное решение.

□ Прибавив к обеим частям данного уравнения элемент $(-a)$, противоположный для a , получим уравнение $a + (-a) + x = b + (-a)$. Так как $a + (-a) = 0$, то $x = b - a$. ■

6°. В поле P всякое уравнение вида $ax = b$, где a и b — произвольные элементы из поля P , причем $a \neq 0$, имеет единственное решение.

□ Умножив обе части данного уравнения на элемент a^{-1} , обратный к a , получим уравнение $(a \cdot a^{-1}) \cdot x = b \cdot a^{-1}$. Так как $a \cdot a^{-1} = e$ и $e \cdot x = x$, то $x = b \cdot a^{-1}$. ■

6. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Возьмем произвольно комплексное число $u = a + bi$. Рассмотрим упорядоченную пару $(a; b)$ вещественных чисел a и b . Очевидно, что установленное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством упорядоченных пар вещественных чисел взаимно однозначно. Как известно, между точками координатной плоскости и между множеством упорядоченных пар вещественных чисел также существует взаимно однозначное соответствие. Это означает, что каждому комплексному числу $u = a + bi$ на координатной плоскости соответствует единственная точка $M(a; b)$. Рассмотрим радиус-вектор $\vec{r} = \overline{OM}$ точки M .

Обозначим через φ угол, который образует радиус-вектор $\vec{r} = \overline{OM}$ точки M с положительным направлением Ox . Число φ называют *аргументом* комплексного числа $u = a + bi$, а положительное число r , равное длине $|\vec{r}| = |\overline{OM}|$ радиуса-вектора точки M , называют его *модулем*. Обычно для обозначения аргумента и модуля комплексного числа u используют следующие символы:

$$\varphi = \text{Arg}(u), \quad r = \text{mod}(u).$$

Отметим, что $0 \leq \varphi < 360^\circ$, $0 \leq r < +\infty$.

Для нахождения аргумента комплексного числа $u = a + bi$ необходимо знать

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где $\sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа u .

Рассмотрим ненулевое комплексное число $u = a + bi$. Умножим и разделим его правую часть на одно и то же выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда получим

$$u = \frac{(a + bi)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Но $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$, поэтому

$$u = |u| (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Такую форму комплексного числа называют *тригонометрической*.

Возьмем произвольно два комплексных числа

$$u_1 = |u_1| (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1), \quad u_2 = |u_2| (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2),$$

заданных в тригонометрической форме. Найдем их произведение:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= \\ &= |u_1| \cdot |u_2| \cdot (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) i) = \\ &= |u_1| \cdot |u_2| \cdot (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Итак,

$$u_1 \cdot u_2 = |u_1| \cdot |u_2| \cdot (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Аналогично можно показать, что произведение n комплексных чисел $u_1 = |u_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, $u_2 = |u_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$, ...,

$u_n = |u_n| \cdot (\cos \varphi_n + i \cdot \sin \varphi_n)$, заданных в тригонометрической форме, выражается формулой

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = |u_1| \cdot |u_2| \cdot \dots \cdot |u_n| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)).$$

В частности, для n -й степени комплексного числа $u = |u| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ справедлива формула

$$u^n = |u|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

Пример. Возвести в степень $(1 + \sqrt{3} \cdot i)^{11}$.

△ Рассмотрим комплексное число $u = 1 + \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент. Имеем $|u| = 2$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\varphi = 60^\circ$. Таким образом, согласно формуле возведения в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, получаем

$$\begin{aligned} u^{11} &= 2^{11} (\cos 11 \cdot 60^\circ + i \cdot \sin 11 \cdot 60^\circ) = 2^{11} (\cos 660^\circ - i \cdot \sin 60^\circ) = \\ &= 2^{11} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1024 - 1024\sqrt{3}i. \blacktriangle \end{aligned}$$

7. Извлечение корня n -й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме

Рассмотрим алгебраическое уравнение $z^n = u$ степени n , где z — неизвестная переменная, а u — комплексное число, заданное в тригонометрической форме, т.е. $u = |u|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Представим z в виде $z = |z|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$. Для того чтобы найти значение неизвестной z , достаточно найти ее аргумент φ_1 и модуль $|z|$. Имеем

$$|z|^n (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)^n = |u| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

или

$$|z|^n \cdot (\cos n\varphi_1 + i \cdot \sin n\varphi_1) = |u| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

откуда

$$|z|^n \cos n\varphi_1 = |u| \cos \varphi, \quad |z|^n \sin n\varphi_1 = |u| \sin \varphi.$$

Решив совместно последние два уравнения, находим

$$|z| = \sqrt[n]{|u|}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, решение уравнения $z^n = u$ на множестве комплексных чисел представляется набором из n комплексных чисел вида

$$z = \sqrt[n]{|u|} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Пример 1. Извлечь корень $\sqrt[3]{i}$.

△ Рассмотрим комплексное число $u = i$. Найдем его модуль

и аргумент. Имеем $|u| = 1$, $\sin \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Та-

ким образом, значения выражения $\sqrt[3]{i}$ находят по формуле

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

или, более подробно:

$$k = 0, \quad z = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$k = 1, \quad z = \cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$k = 2, \quad z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -i. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Решить уравнение $z^3 - 1 = 0$.

△ Имеем $z = \sqrt[3]{1}$. Так как $u = 1, a = 1, b = 0, |u| = 1$, то $\cos \varphi = 1, \sin \varphi = 0$, откуда $\varphi = 0$. Следовательно, решениями данного уравнения являются значения

$$z = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{2\pi k}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi k}{3} \right) \text{ при } k = 0, 1, 2,$$

или

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \blacktriangle$$

**1. Понятие матрицы.
Сложение матриц**

Определение 1. Матрицей называют таблицу, составленную из m строк и n столбцов вещественных или комплексных чисел.

Например, таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей порядка 3×5 . Она состоит из трех строк и пяти столбцов. Вещественные или комплексные числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{34}, a_{35}$ называют *элементами* матрицы. При этом говорят, что элементы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ образуют первую строку матрицы, элементы $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}$ – вторую строку, а элементы $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}$ – третью строку; элементы a_{11}, a_{21}, a_{31} образуют первый столбец матрицы, элементы a_{12}, a_{22}, a_{32} – второй столбец и т.д., наконец, элементы a_{15}, a_{25}, a_{35} образуют пятый столбец матрицы.

Для обозначения матрицы, состоящей из m строк и n столбцов, принято использовать следующую запись:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 2. Матрицу называют *квадратной*, если число ее строк равно числу ее столбцов.

Например, матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

является квадратной матрицей порядка n . Элементы c_{11} , c_{22} , c_{33} , ..., c_{nn} образуют главную диагональ матрицы. При $n = 2$ получаем квадратную матрицу второго порядка, которая имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

главная диагональ этой матрицы определяется двумя элементами c_{11} , c_{22} ; при $n = 3$ получаем квадратную матрицу третьего порядка, которая имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

главная диагональ этой матрицы определяется тремя элементами c_{11} , c_{22} , c_{33} .

Определение 3. Число $c_{11} + c_{22} + c_{33} + \dots + c_{nn}$, равное сумме элементов, находящихся на главной диагонали матрицы C , называют ее *следом*. Для обозначения следа матрицы используют символ $\text{Tr } C$. Таким образом,

$$\text{Tr } C = c_{11} + c_{22} + c_{33} + \dots + c_{nn}.$$

Приведем примеры матриц второго и третьего порядка. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

является матрицей второго порядка с вещественными элементами и следом $\text{Tr } A = 4$; матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$$

является матрицей второго порядка с комплексными элементами и следом $\text{Tr } B = 2$. Примером матрицы третьего порядка с комплексными элементами служит матрица

$$C = \begin{pmatrix} 2 + 5i & 4 & i - 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 - 2i & 3 - i & 5 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{Tr } C = 9 + 5i$.

Определение 4. Квадратную матрицу вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называют *единичной матрицей*.

Определение 5. Квадратную матрицу вида

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называют *нулевой матрицей*.

Определение 6. Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, называют *верхней треугольной матрицей*.

Определение 7. Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю, называют *нижней треугольной матрицей*.

Определение 8. Квадратные матрицы A и B называют *транспонированными*, если первый столбец матрицы A совпадает с первой строкой матрицы B , второй столбец матрицы A совпадает со второй строкой матрицы B и т.д., наконец, n -й столбец матрицы A совпадает с n -й строкой матрицы B .

Если матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то транспонированной к ней матрицей A^T или A' является матрица вида

$$A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Возьмем любые две матрицы одного и того же порядка $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 9. Суммой $A + B$ двух матриц A и B одного и того же порядка называют матрицу вида

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1-i & 4 \\ 2 & 5 & 2+3i \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1+i & i \\ -2 & 1 & 2-3i \end{pmatrix}$ — две матрицы порядка 2×3 . Тогда их суммой является матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4+i \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

1°. Сложение матриц коммутативно, т.е. $A + B = B + A$ для любых матриц A и B одного и того же порядка.

□ Пусть матрицы A и B имеют соответственно вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц A и B будет иметь вид

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как сложение вещественных и комплексных чисел коммутативно, то

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \dots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \dots & b_{2n} + a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \dots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix}$$

Следовательно, $A + B = B + A$. ■

2°. Сложение матриц ассоциативно, т.е. для любых трех матриц одного и того же порядка справедливо равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

□ Возьмем произвольно три матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (A + B) + C = \\ & = \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) + c_{1n} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) + c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1} + b_{m1}) + c_{m1} & (a_{m2} + b_{m2}) + c_{m2} & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) + c_{mn} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) & \dots & a_{1n} + (b_{1n} + c_{1n}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) & \dots & a_{2n} + (b_{2n} + c_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + (b_{m1} + c_{m1}) & a_{m2} + (b_{m2} + c_{m2}) & \dots & a_{mn} + (b_{mn} + c_{mn}) \end{pmatrix} = \\ & = A + (B + C). \end{aligned}$$

3°. Если к любой матрице A прибавить нулевую матрицу, то она не изменится, т.е.

$$A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A.$$

4°. Для любой матрицы A существует единственная матрица B такая, что $A + B = 0$.

□ Если матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то в качестве матрицы B можно взять матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что существует еще одна матрица D такая, что

$$A + D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то из равенств $A = -D$, $A = -B$ следует, что $D = B$. ■