

В.Н. Мисеев
Ю.В. Пакляченко



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Михеев В.И.
Павлюченко Ю.В.

Высшая математика, краткий курс



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 51
ББК 22.1
М 69

Михеев В. И., Павлюченко Ю. В. **Высшая математика, краткий курс:** Учеб. пособие. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 196 с. — ISBN 978-5-9221-0978-9.

Пособие по высшей математике, содержащее все основные разделы курса, предназначено в первую очередь для студентов тех направлений и специальностей, для которых предусмотрен укороченный (односеместровый) курс высшей математики. В конце каждого раздела имеются вопросы и задачи для самопроверки, а также домашние и аудиторные задания. В конце пособия приведено примерное содержание заключительной практической или экзаменационной работы, рассчитанной на студента, изучившего все представленные в пособии разделы математики.

Подготовлено на кафедре высшей математики Российского университета дружбы народов.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по нематематическим направлениям подготовки и специальностям.

© ФИЗМАТЛИТ, 2006, 2008

© В. И. Михеев, Ю. В. Павлюченко,
2006, 2008

ISBN 978-5-9221-0978-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	5
Предисловие ко второму изданию	7
Введение	8
Глава 1. Алгебра и геометрия: старейшие ветви математики	11
§ 1. Алгебра: числовые множества	12
§ 2. Геометрия: некоторые классические соотношения	18
§ 3. Действительная числовая ось и система координат на плоскости — синтез алгебры и геометрии	20
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	23
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	23
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 1</i>	24
Глава 2. Алгебра: системы линейных уравнений	26
§ 1. Линейные уравнения	27
§ 2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса	28
§ 3. Определители. Правило Крамера	33
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	36
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	37
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 2</i>	39
Глава 3. Аналитическая геометрия: прямая линия и кривые второго порядка	41
§ 1. Простейшие задачи	42
§ 2. Различные виды уравнений прямой	43
§ 3. Кривые 2-го порядка	52
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	60
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	61
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 3</i>	63
Глава 4. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности	65
§ 1. Числовые последовательности: определения и примеры	66
§ 2. Предел числовой последовательности	73
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	85
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	86
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 4</i>	89
<i>Приложение</i>	90
Глава 5. Функции: основные определения и понятия, графики функций. Обзор основных элементарных функций	91
§ 1. Первоначальные сведения о функциях	92
§ 2. Основные элементарные функции	96
§ 3. Класс элементарных функций	106
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	109
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	109
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 5</i>	111

Глава 6. Функции: предел и непрерывность	113
§ 1. Теория пределов	113
§ 2. Непрерывные функции	126
<i>Вопросы для самопроверки</i>	132
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	133
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 6</i>	135
Глава 7. Дифференцирование функций. Исследование функций с помощью производных	137
§ 1. Основные определения и понятия	139
§ 2. Техника дифференцирования	143
§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления	149
§ 4. Исследование функций с помощью производных	152
§ 5. Пример полного исследования функции	155
<i>Вопросы для самопроверки</i>	158
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	160
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 7</i>	163
Глава 8. Интегрирование функций	164
§ 1. Неопределенный интеграл: основные определения и понятия	165
§ 2. Определенный интеграл	173
<i>Вопросы для самопроверки</i>	182
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	183
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 8</i>	186
<i>Приложение «Догонит ли Ахиллес Черепаху?»</i>	188
<i>Примерный вариант итоговой зачетной или экзаменационной работы</i>	194
<i>Литература</i>	195
<i>Дополнительная литература</i>	195

Предисловие к первому изданию

Предлагаемое пособие возникло как итог многолетней преподавательской работы авторов: чтения лекций, проведения практических занятий, а также зачетов и экзаменов — со студентами различных направлений и специальностей, для которых предусмотрен укороченный курс высшей математики. Пособие состоит из введения и восьми глав, включающих следующие разделы высшей математики: системы линейных уравнений и определители, аналитическая геометрия на плоскости, последовательности, пределы и непрерывность функций, дифференцирование и интегрирование функций. В каждом параграфе изложению программного материала предшествует краткая преамбула, затем излагается теория, далее следует перечень контрольных вопросов, позволяющих учащимся адекватно оценить уровень приобретенных на тот или иной момент обучения знаний; заключают главы задания для аудиторной и домашней работы и варианты индивидуальных домашних заданий.

Преамбула, с которой начинается каждая глава, в общих чертах вводит учащегося в курс дела, которым предстоит заниматься в ближайшее время. В этом своеобразном вступлении вкратце рассказывается, какие аналоги или прообразы анонсируемых математических понятий присутствуют в обыденной жизни, в окружающем нас мире, в истории и т. д. Иными словами, по мере возможности обрисовывается круг вопросов и понятий, с которыми учащемуся предстоит встретиться, и место, отводимое данному разделу среди других тем.

Излагая теорию, авторы зачастую отказываются от традиционной для классических руководств по математике последовательности подачи материала: определение, теорема, доказательство, следствия и т. д. Взамен этого, как правило, принимается другая схема изложения, в которой, наряду с определениями и теоремами, главенствующая роль отводится наводящим соображениям, графическим иллюстрациям и примерам. Осознавая, что для строгого обоснования математических истин рисунков и примеров недостаточно, авторы, тем не менее, допускают, что специально подобранные примеры и чертежи могут быть полезны как для интерпретации, так и для обнаружения общих математических закономерностей. По нашему мнению, такой подход

дает возможность наилучшим образом раскрыть учащемуся суть предмета, неблизкого ему по духу, к тому же в предельно сжатые сроки.

Роль задач в пособии многофункциональна. Во-первых, примеры практических задач рассматриваются в тексте каждого параграфа для того, чтобы показать учащимся типичные для высшей математики методы и приемы их решения; при этом нередко возникают наводящие соображения, ведущие к теоретическим результатам общего характера. Во-вторых, большое число задач для семинарской и домашней работы приводится в конце каждого параграфа. Расположенные в порядке усложнения, они могут быть использованы до того или иного уровня трудности в зависимости от конкретной обстановки. В-третьих, к каждому параграфу прилагается индивидуальное домашнее задание. Авторы исходят из того, что умение самостоятельно решать типовые задачи различной степени трудности является важным критерием при оценке знаний студентов нематематических специальностей — основных адресатов этой книги — и при выведении итогового рейтинга, характеризующего их успехи в этом предмете.

Значительное место в книге отводится элементарной математике. Школьные математические познания составляют первичную базу и языковую основу курса, они вкрапливаются в новую ткань, исподволь подводя учащегося к восприятию разделов высшей математики как новых ветвей единого математического древа. Давид Гильберт утверждал, что «математическая наука есть неделимое целое, организм, жизнестойкость которого обуславливается связанностью его частей». Концепция авторов базируется на уверенности в том, что многие упущения и недоработки в полученном в свое время школьном образовании могут быть устранены в высшей школе — по крайней мере, в такой степени, чтобы не стать непреодолимым препятствием для обладателей аттестата зрелости, желающих получить университетское образование и готовых приложить для этого необходимые усилия.

Введение содержит обстоятельные рекомендации студентам, как изучать математику по данному пособию. Его авторы видели свою задачу в том, чтобы создать учебник, который не отпугнет одних читателей излишней «ученостью» и не оттолкнет других наивной тривиальностью, и тем самым даст всем первокурсникам необходимую для дальнейшего профессионального образования математическую базу и, по возможности, будет способствовать их интеллектуальному росту. В какой мере удалось реализовать замысел и создать книгу, по которой изучение математики станет

не только «осознанной необходимостью», но и вполне доступным, а быть может, и увлекательным занятием, покажет время.

Авторы выражают искреннюю признательность и благодарность рецензентам профессору Е. В. Шикину и доценту А. Б. Будаку за внимательное и доброжелательное прочтение пособия и за высказанные ценные замечания и полезные советы по содержанию и оформлению книги. Мы заранее благодарим читателей, которые не сочтут за труд сообщить свое мнение об этой книге.

В. И. Михеев
Ю. В. Павлюченко

Предисловие ко второму изданию

Второе издание в основных чертах воспроизводит содержание первого. Сохранены стиль изложения, последовательность и форма подачи материала. Исправлены опечатки, замеченные авторами и сообщенные читателями, за что авторы приносят им искреннюю благодарность. Устранены отдельные шероховатости в тексте пособия. Некоторые задачи заменены более содержательными. Для большей иллюстративности в некоторых местах к теории алгебраического характера добавлены новые геометрические примеры.

В. И. Михеев
Ю. В. Павлюченко

ВВЕДЕНИЕ

Приступая к изучению математики по этой (или какой-либо другой) книге, последуйте приводимым здесь простым рекомендациям. Самая первая из них состоит в том, что самостоятельная работа над книгой должна сочетаться с безусловным систематическим посещением всех аудиторных занятий. Разумеется, это требуется при изучении всех университетских дисциплин. Быть может, математика отличается от других предметов лишь тем, что в ней в наибольшей степени все темы учебного материала и звенья учебного процесса тесно взаимосвязаны и нельзя понять последующего, не усвоив предыдущего. Всякий оставшийся не разобранным вопрос с чрезвычайной быстротой (в геометрической прогрессии!) обрастает новыми неясностями, превращаясь сначала в неусвоенную тему, затем в непонятый раздел и в итоге — в непостижимую науку.

Прослушав и, по возможности, записав лекцию, в тот же день, в крайнем случае, на следующий, приведите в порядок свои записи, воспользовавшись учебным пособием. Вдумчивое чтение соответствующего раздела учебника уточняет и углубляет знание предмета и обогащает язык точными формулировками. При первом чтении нового раздела учебника обращайтесь внимание главным образом на новые понятия и идеи, на их связь с уже встречавшимися ранее — в предыдущих параграфах или в элементарной математике, не вдаваясь в детали вычислений и в подробности доказательств. Читая вторично, аккуратно выполните все выкладки и сделайте соответствующие чертежи. Решите самостоятельно приводимые в книге примеры и сверьтесь с ответом в книге. Проясняя суть дела, примеры, как правило, облегчают понимание вопроса, делают теоретические утверждения более осязаемыми и прозрачными. Усвоив теоретический материал, вы будете быстрее решать задачи на семинарах и с большей легкостью выполнять варианты индивидуальных домашних заданий.

Встречая новое математическое понятие, постарайтесь прежде всего понять, откуда оно возникло, при решении каких вопросов появилась необходимость в этом понятии и как его введение позволяет решать эти вопросы. Вдумчиво относитесь к содержанию и доказательству теорем, выводу формул и вообще к последовательному, логическому построению той или иной теории. А пролистав хотя бы несколько страниц учебника вперед, вы будете увереннее и легче чувствовать себя на следующем занятии.

Изучив очередной раздел, проверьте себя по контрольным вопросам, относящимся к пройденным темам. При необходимости вернитесь повторно к непонятным местам.

Только овладев теоретическим материалом, приступайте к самостоятельному решению новых задач по данной теме. Попытки решать задачи по формулам, не понимая их содержания, приводят к механическому усвоению курса. Студент, знающий лишь формулы — например, из справочника — всегда окажется беспомощным в решении вопросов, хотя бы немного отличающихся от стандартных.

Решая задачи высшей математики, часто приходится пользоваться формулами и приемами элементарной математики, например, тождественными преобразованиями, облегчающими дальнейшее применение новых методов. В таких случаях необходимо освежить в памяти соответствующие места школьного курса математики.

Приступая к решению индивидуального домашнего задания, просмотрите еще раз все задачи на эту тему, решенные на предшествующем семинаре; затем действуйте самостоятельно, начиная с самых простых заданий, постепенно переходя к более сложным. Как правило, в пособии задачи для самостоятельной работы расположены в порядке возрастания трудности; такой последовательности — от простого к сложному — и следует придерживаться. Нередко одну и ту же задачу можно решить разными способами; разобравшись в постановке задачи и правильно оценив уровень ее трудности, постарайтесь найти наиболее простой способ решения. Не упускайте из виду и то обстоятельство, что задача, которая встретилась в одном разделе, может быть сформулирована в других терминах и казаться относящейся к другой области математики. Например, полученный алгебраический результат нередко получает геометрическое истолкование. Такой анализ интересен и необычайно полезен. Он не только

обогащает знания, но и подводит к пониманию внутреннего единства математики, что в дальнейшем, безусловно, расширит ваши возможности при применении математических методов в работе по основной специальности.

В заключение повторим, что умение решать типовые задачи различной степени трудности является основным критерием при оценке полученных знаний. Оно является главным основанием как для получения зачета или сдачи экзамена, так и при выведении итогового рейтинга, характеризующего ваши успехи в математике.

Глава 1

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ: СТАРЕЙШИЕ ВЕТВИ МАТЕМАТИКИ

*И сказал Господь Моисею в пустыне
Синайской: исчисли!... И сделал он ис-
числение им...*

Ветхий Завет, Числа, 1

*Измерить все, что поддается измере-
нию, а что не поддается — сделать
измеряемым!*

Галилео Галилей

В сознании большинства людей слово «Математика» (от греческого слова *mathema* — *наука, познание*) ассоциируется, прежде всего, с *алгеброй* и *геометрией* — предметами школьного курса. Это не только *хронологически* первые разделы математики в жизни отдельного человека, но и *исторически* первые ветви *математического древа*, взращиваемого выдающимися умами человечества на протяжении тысячелетий. Еще в средневековых университетах (например в Оксфорде в XIV–XV вв.) в числе семи обязательных общеобразовательных наук (*artes liberales*) студент изучал арифметику и геометрию и только после этого специализировался в медицине, юриспруденции или астрологии. На Руси указом Петра I молодым дворянам предписывалось в пятнадцатилетнем возрасте сдать экзамен по этим предметам. В наши дни умение легко оперировать числами и хорошая осведомленность в геометрии стали «предметами первой необходимости» для каждого школьника и, тем более, для тех, кто не намерен останавливаться на *среднем* образовании. Поэтому, прежде чем приступить к *высшей* математике, полезно «освежить в памяти» некоторые фундаментальные понятия *элементарной* математики.

§ 1. Алгебра: числовые множества

«Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир» — утверждал великий немецкий поэт Иоганн Вольфганг Гете. Перечислим известные из курса средней школы числовые множества. В процессе учебы они появляются последовательно, по мере усложнения арифметических и алгебраических задач.

Натуральные числа

Первое из этих множеств — натуральный ряд чисел, его обычно обозначают $\mathbb{N}$: $\{1, 2, 3, \dots\}$. Какие действия можно выполнять на этом числовом множестве — иначе говоря, для выполнения каких алгебраических операций «достаточно» этих чисел? Ответ вполне очевиден: складывая или перемножая два (а затем и три, и четыре и т.д.) натуральных числа, мы получаем также натуральные числа; то есть этих чисел «достаточно» для выполнения двух операций — сложения и умножения (в частности, для умножения числа на себя, то есть для возведения в степень). Эти свойства натуральных чисел записываются следующим образом: если $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ (читается: если a и b принадлежат $\mathbb{N}$), то и $a + b \in \mathbb{N}$ ($a + b = b + a$) и $ab \in \mathbb{N}$ ($ab = ba$). Приведем примеры задач, решаемых на этом числовом множестве.

Пример 1.

На дорогу от дома до университета и обратно у студента ежедневно уходит 30 минут на метро и 20 минут на автобусе. Сколько времени тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Решение.

1) $30 + 20 = 50$ мин.

2) $50 \cdot 6 = 300$ мин.

Ответ: 300 минут.

Пример 2.

Комната в студенческом общежитии имеет форму квадрата со стороной $a = 3$ м. Какова ее площадь S ?

Решение.

$$S = a^2.$$

Ответ: $S = 9$ м².

Целые числа

Посмотрим, как обстоит дело с *вычитанием*, иначе говоря, проверим, «достаточно» ли натуральных чисел для того, чтобы определить разность $a - b$ и $b - a$, если $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$? Вот простые примеры: $10 - 6 = 4$, а $6 - 10 = ?$ или $10 - 10 = ?$

Приведем примеры задач, требующих выполнения *вычитания*.

Пример 3.

Из стипендии в 500 руб. студент в первый же день потратил на товарищеский ужин 200 руб. Сколько денег у него осталось до следующей стипендии?

Решение.

$$500 - 200 = 300 \text{ руб.}$$

Ответ: 300 руб.

Пример 4.

Получив стипендию 500 руб., один из студентов потратил 600 руб. на цветы для своей подруги, второй же в аналогичной ситуации ограничился духами, стоившими как раз 500 рублей. Сколько денег осталось у каждого из студентов?

Решение.

1) $500 \text{ руб.} - 600 \text{ руб.} = ?$

2) $500 \text{ руб.} - 500 \text{ руб.} = ?$

Понятно, что у второго студента кошелек полностью опустел, первому же пришлось 100 руб. просить в долг. Между тем, в обоих случаях среди натуральных чисел ответов к этим задачам не находим.

Поэтому для описания вполне жизненных ситуаций такого рода требуется *ввести в обращение нулевые или минусовые деньги*, то есть в дополнение к натуральным числам присоединить еще *отрицательные числа и ноль*.

Таким образом, множество натуральных чисел *расширяется* до множества *целых чисел* — его обычно обозначают

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

На множестве целых чисел без всяких ограничений можно выполнять сложение, умножение и вычитание. Если $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, то

$$a + b \in \mathbb{Z}, \quad ab \in \mathbb{Z}, \quad a - b \in \mathbb{Z}, \quad b - a \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Отметим, что термины «положительные» и «отрицательные» имеют широкое обиходное, весьма далекое от математики, применение: *положительное решение вопроса, отрицательное влияние* и т. д. Экономисты и политики часто говорят: *нулевой баланс, нулевой вариант* и т. д. Мы и в дальнейшем будем соотносить привычные для нас расхожие выражения с их математическими эквивалентами.

Рациональные числа

Выясним, как обстоит дело с *делением*, иначе говоря, проверим «достаточно» ли натуральных чисел для того, чтобы определить отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, если $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$? Простые примеры показывают, что это далеко не так. Например, $\frac{15}{3} = 5$, а $\frac{3}{15} = ?$

Приведем простую задачу из жизни, требующую выполнения деления.

Пример 5.

Пусть студент получает стипендию в размере 500 руб., магистрант — 750 руб., а аспирант — 1000 руб. Во сколько раз студент получает меньше аспиранта и магистранта?

Решение.

Обозначим искомое отношение через n . Имеем:

$$\text{в первом случае } n = \frac{1000}{500} = 2;$$

$$\text{во втором случае } n = \frac{750}{500} = ?$$

Таким образом, для описания простых жизненных ситуаций только целых чисел «не достаточно».

Поэтому возникает потребность *расширить* множество целых чисел до множества *рациональных (дробных) чисел* $\mathbb{Q}$ — это числа вида $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

На множестве рациональных чисел можно выполнять арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление: если $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$, то

$$a + b \in \mathbb{Q}, \quad ab \in \mathbb{Q}, \quad a - b \in \mathbb{Q}, \quad b - a \in \mathbb{Q}, \\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} (b \neq 0), \quad \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} (a \neq 0).$$

Возвращаясь к примеру 5, мы можем теперь найти ответ и во втором случае: $n = 750/500 = 3/2$, то есть стипендия студента

в полтора раза меньше, чем магистранта; другими словами, студенческая стипендия составляет $\frac{2}{3}$ стипендии магистранта.

Перефразируем *пример 1*.

На дорогу от дома до университета и обратно у студента ежедневно уходит 30 минут на метро и 20 минут на автобусе. Сколько *часов* тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Решение.

Учитывая, что $30 \text{ мин.} = \frac{1}{2} \text{ ч.}$, а $20 \text{ мин.} = \frac{1}{3} \text{ ч.}$, получаем:

$$1) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ ч.} \quad 2) \frac{5}{6} \cdot 6 = 5 \text{ ч.}$$

Ответ: 5 часов.

Возвращаясь к приведенным выше задачам, запишем их в виде *уравнений*, сведя в таблицу:

Примеры	Конкретный вид	Общий вид
$30 + 20 = x$	$30 + 20 = x$	$a + b = x$
$50 \cdot 6 = x$	$50 \cdot 6 = x$	$ab = x$
$500 - 200 = x$	$200 + x = 500$	$a + x = b$
$500 - 600 = x$	$600 + x = 500$	
$500 - 500 = x$	$500 + x = 500$	
$\frac{1000}{500} = x$	$500 x = 1000$	$ax = b$
$\frac{750}{500} = x$	$500 x = 750$	

При таком подходе явно прослеживается принципиальное алгебраическое различие этих задач.

1. В первом примере по двум слагаемым нужно найти сумму.
2. Во втором примере по двум сомножителям нужно найти произведение.
3. В следующих трех примерах по одному из слагаемых и сумме нужно определить второе слагаемое — это действие *обратно* сложению.

Вычитание — операция, обратная сложению.

4. В двух последних примерах по одному из сомножителей и произведению нужно определить второй сомножитель — это действие *обратно* умножению.

Деление — операция, обратная умножению.

Обратим внимание на то обстоятельство, что при таком взгляде оба расширения числовых множеств: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ преследовали идентичные цели: сделать возможными *обратные операции*.

Действительные числа

Напомним, что возведение в степень имеет две обратные операции: *извлечение корня* и *логарифмирование*.

Пример 6.

Соотношение $3^2 = 9$ позволяет написать три уравнения:

$$3^2 = x, \quad x^2 = 9, \quad 3^x = 9.$$

Решение.

В первом из уравнений неизвестна *степень*, во втором — *основание степени*, в третьем — *показатель степени*.

Первое уравнение, по определению, решается умножением:

$$x = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Второе уравнение решается извлечением квадратного корня из 9:

$$x = \sqrt{9} = 3.$$

Третье уравнение решается логарифмированием числа 9 по основанию 3:

$$x = \log_3 9 = 2.$$

В этом примере для решения уравнений «достаточно» множества рациональных чисел (и даже натуральных чисел), но так бывает далеко не всегда. Для уравнений: $x^2 = 2$, $2^x = 3$ формальная запись результатов: $x = \sqrt{2}$, $x = \log_2 3$ (аналогичная приведенным выше) не имеет смысла на множестве рациональных чисел. Убедимся, например, в том, что среди рациональных чисел нет числа, которое мы обозначили $\sqrt{2}$. Предположим противное, то есть: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ и дробь $\frac{a}{b}$ — несократима. Тогда $a = b\sqrt{2}$ и $a^2 = 2b^2$, то есть a^2 — четное число. Но тогда и число a — четное: $a = 2n$, ($n \in \mathbb{N}$). Поэтому $a^2 = 4n^2$ и $b^2 = 2n^2$, то есть число b^2 , а следовательно, и b — также четные числа. Но

если числа a и b оба четные, то дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить на 2, а это противоречит условию, что $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь.

Итак, среди *рациональных чисел* нет корня уравнения $x^2 = 2$. Между тем, здравый смысл подсказывает, что это уравнение должно иметь корень! Посмотрим на *геометрические* задачи, приводящие к этому выводу.

Пример 7.

Диагональ x квадрата со стороной a удовлетворяет, по теореме Пифагора, уравнению

$$x^2 = 2a^2.$$

Поэтому при $a = 1$ приходим к уравнению $x^2 = 2$.

Пример 8.

Площадь S квадрата со стороной a находится по формуле $S = a^2$. Какова сторона x квадрата, площадь S которого равна 2 ? Имеем $x^2 = 2$.

Таким образом, из геометрических соображений заключаем, что «в природе» должно быть *число*, удовлетворяющее уравнению $x^2 = 2$. Это число называется *иррациональным*. Также иррациональны корни уравнений: $x^2 = 3$, $x^3 = 5$ и т.п. Эти иррациональные числа называются *алгебраическими*.

Корень уравнения $2^x = 3$, обозначаемый $x = \log_2 3$, также является *иррациональным* числом. Это число и аналогичные ему иррациональные корни уравнений: $2^x = 5$, $3^x = 4$ и т.д. называются *трансцендентными числами*.

Число π , выражающее отношение длины l окружности с радиусом R к диаметру $d = 2R$, также является трансцендентным: $\pi = \frac{l}{2R}$ ($\pi \approx 3,14$).

Вообще, существует бесконечное множество трансцендентных чисел, их появление связано с операцией предельного перехода, которая в курсе *элементарной математики* фактически не изучается.

Пополнение множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел иррациональными числами приводит к множеству действительных чисел, обычно его обозначают $\mathbb{R}$. Это основное числовое множество, с которым имеет дело математика.

Замечание. Термины «рациональное» (*разумно обоснованное*), «иррациональное», то есть нерациональное (*недоступно пониманию*), «трансцендентное» (*выходящее за пределы сознания*) происходят от греческих корней. Они встречаются и в обиходной речи: «рациональное предложение», «нерациональный путь достижения цели» и т. д.

§ 2. Геометрия: некоторые классические соотношения

Аналогично тому, как в алгебре первоначальным понятием является число, так в геометрии первичными понятиями являются точка, линия (в частности, прямая), поверхность (в частности, плоскость).

Используя эти первичные понятия, математики с давних пор ставили и решали многочисленные геометрические задачи, отражающие наше представление об окружающем пространстве. В древности дальше других в этом продвинулись древнегреческие математики — имена Пифагора, Евклида, Архимеда на слуху у каждого человека, знакомящегося с началами школьной геометрии. Их исследования были чрезвычайно глубоки. Они представляются еще более поразительными, если принять во внимание, что в те времена еще не было алгебраического аппарата, которым сегодня (в меру своих успехов!) владеет каждый школьник.

Более того, многие хорошо известные нам *алгебраические* формулы пришли из *геометрии*. В качестве примера напомним одну из основополагающих алгебраических формул:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Для древнегреческих математиков она имела «геометрическое звучание»! Фигурирующие в ней символы a , b , $a + b$, a^2 , b^2 , $(a + b)^2$ выражали соответствующие длины и площади. Из рис. 1 видно, что записанная в левой части площадь квадрата со стороной $a + b$ равняется записанной в правой части сумме площадей 2-х квадратов и 2-х прямоугольников.

Покажем как *геометрически* доказывается *теорема Пифагора*: в прямоугольном треугольнике (рис. 2) квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов: $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство.

Площадь изображенного на рис. 3 большого квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$. В то же время, этот квадрат состоит из малого (внутреннего) квадрата со стороной c и четырех рав-