

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Для студентов учреждений высшего образования

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В93

Авторы: *Е.А. Ровба, А.С. Ляликов, Е.А. Сетько, К.А. Смотрицкий*

Рецензент: кафедра теории функций Белорусского государственного экономического университета (доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*)

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Высшая математика : учебник / Е. А. Ровба [и др.]. –
В93 Минск : Вышэйшая школа, 2018. – 398 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2838-1.

Содержится материал по классическим разделам курса высшей математики. Даны решения типовых задач и разнообразные приложения рассматриваемого материала в экономике.

Для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям. Может быть полезен магистрантам и преподавателям, читающим одноименный курс.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2838-1

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	12
В.1. Базовые понятия математики	12
В.1.1. Представление о математической логике	12
В.1.2. Общее понятие множества	13
В.1.3. Числовые множества	14
В.2. Декартова система координат	16
В.2.1. Декартовы координаты на прямой	16
В.2.2. Декартовы координаты на плоскости	17
В.2.3. Декартовы координаты в пространстве	18
В.3. Метод математической индукции	20
В.3.1. Дедукция и индукция в математике	20
В.3.2. Суммы и прогрессии	20
В.3.3. Произведения и факториалы	22
В.3.4. Бином Ньютона	23
Глава 1. Линейная алгебра	26
1.1. Матрицы и определители	26
1.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц	26
1.1.2. Операции над матрицами	29
1.1.3. Определители низших порядков	33
1.1.4. Определители произвольного порядка	35
1.1.5. Свойства определителей	38
1.1.6. Элементарные преобразования	40
1.1.7. Обратная матрица	41
1.1.8. Матричные уравнения	45
1.1.9. Ранг матрицы	47

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений . . .	49
1.2.1. Основные понятия	49
1.2.2. Матричный метод	51
1.2.3. Метод Крамера	53
1.2.4. Метод Гаусса	55
1.2.5. Критерий Кронекера — Капелли	59
1.2.6. Экономическая модель Леонтьева	62
1.3. Векторная алгебра	65
1.3.1. Векторы в пространстве	65
1.3.2. Алгебраическое описание вектора	67
1.3.3. Скалярное произведение векторов	69
1.3.4. n -Мерное векторное пространство	71
1.3.5. Линейная зависимость векторов	73
1.3.6. Базис и ранг системы векторов	76
1.3.7. Базис пространства	79
1.3.8. Ортогональные системы векторов	82
1.3.9. Собственные векторы и собственные значения	86
Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	90
2.1. Прямая на плоскости	90
2.1.1. Простейшие задачи	90
2.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	93
2.1.3. Составление уравнений прямых	95
2.1.4. Общее уравнение прямой	96
2.1.5. Уравнение прямой в отрезках	97
2.1.6. Угол между двумя прямыми	99
2.1.7. Условия параллельности и перпендикулярности . . .	100
2.1.8. Расстояние от точки до прямой	101
2.1.9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости .	101
2.2. Кривые второго порядка	102
2.2.1. Окружность	102
2.2.2. Эллипс	103
2.2.3. Гипербола	108
2.2.4. Парабола	113
2.2.5. Кривые второго порядка со смещенным центром . .	117
Глава 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ	119
3.1. Числовая последовательность	119
3.1.1. Понятие числовой последовательности	119

3.1.2.	Предел последовательности	121
3.1.3.	Бесконечно малые последовательности	123
3.1.4.	Бесконечно большие последовательности	125
3.1.5.	Сходящиеся последовательности	127
3.1.6.	Предельный переход в неравенствах	130
3.1.7.	Монотонные последовательности	131
3.1.8.	Непрерывное начисление процентов	134
3.2.	Функциональная зависимость	136
3.2.1.	Понятие функции	136
3.2.2.	Способы задания функции	138
3.2.3.	Понятия обратной и сложной функций	142
3.2.4.	Элементарные функции	145
3.2.5.	Основные характеристики функций	148
3.2.6.	Построение графиков функций	150
3.2.7.	Функциональная зависимость в экономике	152
3.3.	Предел функции. Два замечательных предела . . .	153
3.3.1.	Предел функции по Гейне	153
3.3.2.	Предел функции по Коши	155
3.3.3.	Односторонние пределы	157
3.3.4.	Бесконечно малые функции	158
3.3.5.	Бесконечно большие функции	161
3.3.6.	Свойства предела функции	162
3.3.7.	Замечательные пределы	167
3.3.8.	Эквивалентные бесконечно малые функции	169
3.4.	Непрерывные функции	171
3.4.1.	Непрерывность функции в точке	171
3.4.2.	Теоремы о непрерывных в точке функциях	174
3.4.3.	Точки разрыва и их классификация	175
3.4.4.	Непрерывность элементарных функций	177
3.4.5.	Раскрытие неопределенностей	180
3.4.6.	Теоремы о непрерывных на отрезке функциях	183
Глава 4.	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	187
4.1.	Производная функции	187
4.1.1.	Понятие производной	187
4.1.2.	Геометрический смысл производной	190
4.1.3.	Физический смысл производной	192
4.1.4.	Правила дифференцирования	193

4.1.5.	Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функций . . .	195
4.1.6.	Логарифмическая производная	202
4.1.7.	Производная неявной функции	203
4.1.8.	Производные высших порядков	204
4.1.9.	Применение производной в экономике	207
4.2.	Дифференцируемость функции	209
4.2.1.	Понятие дифференцируемости функции в точке . . .	209
4.2.2.	Дифференциал функции и приближенные вычисления с помощью дифференциала	210
4.2.3.	Геометрический смысл дифференциала	212
4.2.4.	Основные теоремы о дифференцируемых функциях	212
4.3.	Правило Лопиталя. Понятие о формуле Тейлора . .	215
4.3.1.	Правило Лопиталя	215
4.3.2.	Понятие о формуле Тейлора	219
4.4.	Исследование функции с помощью производной . .	221
4.4.1.	Условие постоянства функции	221
4.4.2.	Достаточное условие монотонности функции	222
4.4.3.	Необходимые и достаточные условия локального экстремума	222
4.4.4.	Наибольшее и наименьшее значения функции	225
4.4.5.	Выпуклые функции	226
4.4.6.	Асимптоты графика функции	228
4.4.7.	Общая схема исследования поведения функций и построения графиков функций	230
Глава 5.	ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	233
5.1.	Неопределенный интеграл	233
5.1.1.	Первообразная	233
5.1.2.	Неопределенный интеграл и его свойства	234
5.1.3.	Таблица интегралов	238
5.1.4.	Простейшие методы интегрирования	239
5.2.	Интегрирование некоторых классов функций	248
5.2.1.	Интегрирование рациональных функций	248
5.2.2.	Интегрирование иррациональных функций	251
5.2.3.	Тригонометрические интегралы	258
5.3.	Определенный интеграл	260
5.3.1.	Задача о вычислении площади криволинейной трапеции	260

5.3.2.	Свойства определенного интеграла	263
5.3.3.	Оценки интегралов. Теорема о среднем значении . .	265
5.3.4.	Необходимое условие интегрируемости функции . . .	269
5.3.5.	Достаточные условия интегрируемости функции . .	270
5.3.6.	Интеграл с переменным верхним пределом. Суще- ствование первообразной для непрерывной функции	271
5.3.7.	Формула Ньютона — Лейбница	273
5.3.8.	Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле	275
5.4.	Приложения определенного интеграла	278
5.4.1.	Площадь криволинейной трапеции	278
5.4.2.	Длина дуги кривой	279
5.4.3.	Объем тела вращения	282
5.4.4.	Использование понятия определенного интеграла в экономике	284
5.5.	Несобственные интегралы	290
5.5.1.	Обобщение понятия определенного интеграла	290
5.5.2.	Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования	290
5.5.3.	Интегралы от неограниченных функций	294
Глава 6.	ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	298
6.1.	Функция двух переменных. Дифференциал	298
6.1.1.	Определения	298
6.1.2.	Предел функции двух переменных	301
6.1.3.	Непрерывность функции двух переменных	305
6.1.4.	Частные производные	308
6.1.5.	Частные производные высших порядков	310
6.1.6.	Дифференцируемость и дифференциал	311
6.1.7.	Производная сложной функции	314
6.1.8.	Производная по направлению. Градиент	316
6.1.9.	Производственная функция Кобба — Дугласа	320
6.2.	Экстремум функции двух переменных	323
6.2.1.	Локальный экстремум	323
6.2.2.	Глобальный экстремум	326
6.2.3.	Условный экстремум	329
6.2.4.	Метод множителей Лагранжа	331
6.2.5.	Экстремум выпуклых функций	332
6.2.6.	Функция полезности	334

Глава 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	339
7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка . .	339
7.1.1. Общее дифференциальное уравнение первого порядка	339
7.1.2. Составление дифференциальных уравнений	344
7.1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	345
7.2. Решение уравнений первого порядка	346
7.2.1. Однородные уравнения	346
7.2.2. Линейные уравнения	349
7.2.3. Уравнение Бернулли	351
7.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	352
7.3.1. Уравнения второго порядка. Общие понятия	352
7.3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	354
7.3.3. Метод Эйлера решения однородного уравнения . . .	355
7.3.4. Решение неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных	357
7.3.5. Метод нахождения частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью	360
7.3.6. Приложение уравнений второго порядка в экономике	363
Глава 8. Ряды	365
8.1. Числовые ряды	365
8.1.1. Понятие числового ряда	365
8.1.2. Необходимое условие сходимости числового ряда . .	368
8.1.3. Достаточные условия сходимости	370
8.1.4. Абсолютная и условная сходимость	374
8.1.5. Приложения рядов в экономике	375
8.2. Функциональные ряды	376
8.2.1. Основные определения. Область сходимости	376
8.2.2. Степенные ряды	379
8.2.3. Разложение функций в степенные ряды	385
8.2.4. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена .	388
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	390
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	392
СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	397

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Базовые понятия математики

В.1.1. Представление о математической логике

В математике для записи понятий, утверждений используется специальная логическая символика. Так, запись

$\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что из предложения α следует предложение β ;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает, что из α следует β и из β следует α , т.е. предложения α и β равносильные.

Символ $\forall^1$, называемый *квантором всеобщности*, читается: «для любого», «для всех», «для каждого», «каково бы ни было». Символ $\exists^2$ называется *квантором существования* и используется вместо слов «существует», «найдется».

Теоремы в математике обычно имеют структуру, выражаемую формулой

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

При этом утверждение α называется *условием теоремы*, а β — ее *заключением*. В этом случае также говорят, что заключение β является *необходимым* для выполнения условия α и что условие α является *достаточным* для выполнения заключения β .

Пусть, например, утверждение α состоит в том, что Вася учится на факультете экономики и управления, а утверждение β — в том, что Вася изучает высшую математику. Тогда $\alpha \Rightarrow \beta$, т.е. если Вася учится

¹Перевернутая латинская буква «А», от англ. any — любой.

²Перевернутая латинская буква «Е», от англ. exists — существует.

на факультете экономики и управления, то он изучает высшую математику. Таким образом, изучение высшей математики является необходимым условием для того, чтобы быть студентом факультета экономики и управления. Вместе с тем для изучения высшей математики достаточно быть студентом факультета экономики и управления.

Из справедливости $\alpha \Rightarrow \beta$, вообще говоря, не следует справедливость $\beta \Rightarrow \alpha$. В нашем случае Вася может изучать высшую математику и при этом не быть студентом факультета экономики и управления, а учиться, например, на биологическом или физико-техническом факультете.

Если $\alpha \Rightarrow \beta$ и одновременно $\beta \Rightarrow \alpha$, то пишут

$$\alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Такая теорема называется *критерием*. Формулируя критерий, обычно говорят, что условие α имеет место *тогда и только тогда*, когда выполнено β , или что условие α *необходимо и достаточно* для выполнения β .

В.1.2. Общее понятие множества

Множество является одним из основных понятий математики. Оно принадлежит к числу первичных, не определяемых через другие математические понятия. Под множеством в математике понимают совокупность однородных элементов, объединенных по какому-либо признаку. Математические множества могут состоять из чисел, векторов, функций и других элементов. Множества, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита, а их элементы — строчными. Принадлежность элемента a множеству A записывается следующим образом: $a \in A$. Если a не является элементом множества A , то пишут $a \notin A$. Запись $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Множество X называется *подмножеством* множества Y , если все элементы множества X являются одновременно элементами множества Y . При этом пишут $X \subset Y$ и говорят, что X содержится в Y или Y содержит X . Два множества X и Y называются *равными*, если одновременно выполнены включения $X \subset Y$ и $Y \subset X$. В таком случае пишут $X = Y$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Пусть, например, Вася обучается на первом курсе факультета экономики и управления. Обозначим Васю буквой v . Множество всех студентов-первокурсников этого факультета обозначим буквой I . Множество студентов всех курсов факультета экономики и управления обозначим буквой S . Тогда

$$v \in I \subset S.$$

В самом деле, Вася принадлежит множеству студентов первого курса, которое в свою очередь содержится в более широком множестве всех студентов факультета.

Символом $\emptyset$ обозначают множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется *пустым*. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Пересечением множеств X и Y называется множество $Z = X \cap Y$, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как X , так и Y . *Объединением множеств* X и Y называется множество $W = X \cup Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из указанных множеств.

В.1.3. Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Основными числовыми множествами являются:

множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\};$$

множество целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\},$$

состоящее из натуральных чисел, их противоположных, и нуля;

множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

элементами которого являются всевозможные отношения целых чисел к натуральным.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$$\frac{1}{5} = 0,2, \quad \frac{1}{6} = 0,1666 \dots = 0,1(6).$$

Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ оказывается недостаточно для построения математической теории. Возникающие при этом проблемы можно, например, проиллюстрировать фактом, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равнялся бы двум. В самом деле, если бы такое число существовало, то его можно было бы представить несократимой дробью m/n , где m и n — такие натуральные числа, что $(m/n)^2 = 2$. Отсюда следует, что $m^2 = 2n^2$. Тогда число m^2 , а значит, и m , кратно двум. Следовательно, $m = 2r$, где r — некоторое натуральное число, и, таким образом,

$$\left(\frac{2r}{n}\right)^2 = 2, \quad \frac{4r^2}{n^2} = 2, \quad 4r^2 = 2n^2, \quad n^2 = 2r^2.$$

А это означает, что число n также кратно двум, что противоречит несократимости дроби m/n .

Чтобы решить такого рода проблемы, множество рациональных чисел пополняется так называемыми *иррациональными числами*, представимыми в виде бесконечных непериодических десятичных дробей. Полученное множество, содержащее все рациональные и иррациональные числа, называют *множеством действительных чисел* и обозначают $\mathbb{R}$. Примерами иррациональных действительных чисел являются:

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots, \quad \pi = 3,1415926 \dots, \quad e = 2,7182818 \dots$$

Между основными числовыми множествами имеет место следующее соотношение:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$. Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\} — \text{отрезок (замкнутый промежуток);} \\ (a, b) &= \{x : a < x < b\} — \text{интервал (открытый промежуток);} \end{aligned}$$

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ — *полуоткрытые интервалы*;

$(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$, $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$ — не ограниченные снизу *полубесконечные интервалы*;

$[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$, $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$ — не ограниченные сверху *полубесконечные интервалы*;

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ — *бесконечный интервал*.

В.2. Декартова система координат

В.2.1. Декартовы координаты на прямой

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обладает свойством *непрерывности*, суть которого состоит в возможности отождествления этого множества с прямой линией. Отметим, что для множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ свойство непрерывности не выполнено.

Координатной осью Ox называется прямая, на которой отмечена точка O , называемая *началом отсчета* или *началом координат*, выбран масштаб, т.е. указан отрезок единичной длины для измерения расстояний, называемый *единичным* или *масштабным отрезком*, и задано *положительное направление*, отмечаемое стрелкой (рис. В.1). Начало координат O в соответствии с выбранным направлением делит ось Ox на два луча: *положительную* и *отрицательную полуоси*.



Рис. В.1

Координатой точки M , лежащей на оси Ox , называется число x , равное длине отрезка OM , взятой со знаком «+», если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком «-», если эта точка лежит на отрицательной полуоси. Координату точки обычно указывают в скобках рядом с обозначением точки. Если, например, точка M имеет координату x , то пишут $M(x)$. Таким образом, каждой точке координатной оси поставлено в соответствие некоторое число $x \in \mathbb{R}$.

Вместе с тем каждому действительному числу x можно поставить в соответствие точку M оси Ox , имеющую координату x . Для этого

на оси Ox следует отложить отрезок $OM = |x|$ в положительном направлении, если $x \geq 0$, и в отрицательном направлении, если $x < 0$.

Итак, мы ввели *декартовы координаты* на прямой, установив взаимно однозначное соответствие между множеством точек числовой оси и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на оси Ox выражается формулой

$$M_1M_2 = |x_1 - x_2| \quad (\text{В.1})$$

(убедитесь в этом самостоятельно) и, таким образом, равно модулю разности соответствующих координат.

В.2.2. Декартовы координаты на плоскости

Переходя к случаю плоскости, проведем пару взаимно перпендикулярных координатных осей с одинаковым масштабным отрезком так, чтобы их начала координат совпали. Первую ось назовем *осью абсцисс* и будем обозначать Ox , вторую ось назовем *осью ординат* и будем обозначать Oy . Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые *квадрантами* (рис. В.2).



Рис. В.2

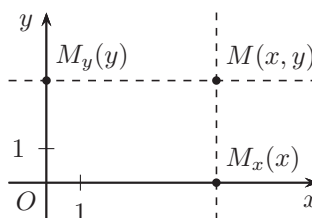


Рис. В.3

Рассмотрим произвольную точку M плоскости. Через эту точку проведем прямую, параллельную оси ординат (рис. В.3). Она пересечет ось абсцисс Ox в некоторой точке M_x . Координата x точки M_x на оси Ox называется *абсциссой* точки M . Теперь проведем через точку M прямую, параллельную оси абсцисс. Она пересечет ось ординат Oy в некоторой точке M_y . Координату y точки M_y на оси Oy назовем *ординатой* точки M . Таким образом, каждой точке плоскости M

мы поставили в соответствие пару действительных чисел x и y . Это соответствие принято обозначать $M(x, y)$.

Произвольной паре чисел $x, y \in \mathbb{R}$, в свою очередь, может быть поставлена в соответствие некоторая точка плоскости. Чтобы убедиться в этом, отметим на осях Ox и Oy точки $M_x(x)$ и $M_y(y)$. Напомним, что мы уже научились это делать, когда рассматривали координаты на прямой. Проведем через точки M_x и M_y прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox . Точка пересечения этих прямых и будет искомой точкой $M(x, y)$.

Из сказанного можно сделать вывод, что, введя декартовы координаты на плоскости, мы отождествили упорядоченные пары действительных чисел, множество которых принято обозначать $\mathbb{R}^2$, и точки плоскости.

В.2.3. Декартовы координаты в пространстве

Для построения декартовой системы координат в пространстве начертим три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом координат O и одинаковым масштабным отрезком (рис. В.4). Будем называть их *осями абсцисс, ординат и аппликаты* и обозначать соответственно Ox , Oy и Oz .

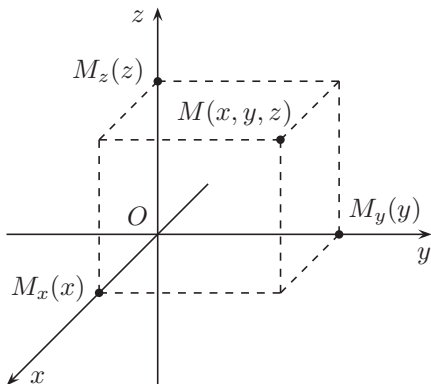


Рис. В.4

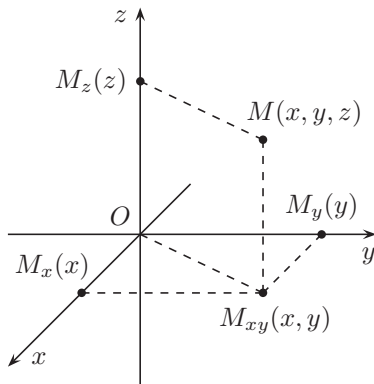


Рис. В.5

В зависимости от взаимного расположения осей декартова система координат в пространстве может быть *правой* или *левой*. Пра-

вую систему координат можно получить, если ось абсцисс пустить по направлению большого пальца правой руки, ось ординат — указательного, а ось аппликат — среднего. Чаще всего рассматривают именно правую систему координат (рис. В.4). Левую систему координат можно получить, если в правой системе поменять направление любой из осей на противоположное.

Попарно взятые координатные оси образуют *координатные плоскости* xOy , yOz и xOz , разбивающие пространство на восемь частей — *октантов*. Например, точка M на рис. В.4 лежит в первом октанте.

Рассмотрим произвольную точку M пространства и проведем через нее плоскости, параллельные координатным плоскостям yOz , xOz и xOy . Точки пересечения этих плоскостей с осями Ox , Oy и Oz обозначим соответственно M_x , M_y и M_z (рис. В.4). Координаты x , y и z точек M_x , M_y и M_z на осях Ox , Oy и Oz назовем соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой* точки M или *декартовыми прямоугольными координатами* этой точки. То, что точка M имеет координаты x , y и z , будем обозначать следующим образом: $M(x, y, z)$.

Чтобы построить точку $M(x, y, z)$, зная ее координаты, отметим на осях Ox , Oy и Oz соответственно точки $M_x(x)$, $M_y(y)$ и $M_z(z)$, действуя так же, как и в одномерном случае (рис. В.5). Как и в двумерном случае, на координатной плоскости xOy найдем точку $M_{xy}(x, y)$. Через точки O и M_{xy} проведем прямую, через точку M_z — параллельную ей прямую, а через точку M_{xy} — прямую, параллельную оси Oz . На пересечении последних двух прямых лежит искомая точка $M(x, y, z)$.

Итак, мы поставили в соответствие произвольной тройке действительных чисел точку пространства и заодно ознакомились с удобным способом графического построения точки по ее координатам.

Декартовы координаты в пространстве позволяют установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел, множество которых обозначают $\mathbb{R}^3$.

В.3. Метод математической индукции

В.3.1. Дедукция и индукция в математике

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории, при котором все утверждения выводятся из нескольких основных положений, называемых *аксиомами*, с помощью *дедукции*, т.е. с помощью логического вывода. Однако дедукция является не единственным методом научного мышления. В науке широко используются также *индуктивные* рассуждения и выводы, сделанные на основе наблюдения и опытов, т.е. полученные путем заключений от частного к общему.

Так, одной из форм математического рассуждения является *метод математической индукции*, который может применяться в случае, когда требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений

$$T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n, \dots,$$

занумерованных натуральными числами.

Рассуждение по методу математической индукции состоит из следующих двух этапов:

1) *база индукции*, когда проверяется истинность утверждения T_1 , т.е. первого из утверждений в последовательности;

2) *индукционный переход*, где для всякого $n \in \mathbb{N}$ доказывается, что если верно утверждение T_n , называемое *предположением индукции*, то верно и следующее за ним утверждение T_{n+1} .

Успешная проверка обоих этапов обеспечивает справедливость утверждения T_n для всех $n \in \mathbb{N}$.

В.3.2. Суммы и прогрессии

Понятие математической индукции естественным образом используется при изучении *прогрессий*. Прогрессии определяются *рекуррентными соотношениями*, т.е. соотношениями, позволяющими выразить следующий член по одному или нескольким предыдущим членам. *Арифметическая* и *геометрическая прогрессии* задаются соответственно рекуррентными соотношениями:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q,$$

где число d называется *разностью*, а q — *знаменателем* соответствующей прогрессии.

Таким образом, само определение этих прогрессий дается с помощью индукции от n к $n+1$, поэтому и большинство формул, относящихся к прогрессиям, целесообразно выводить с использованием метода математической индукции. Это касается в первую очередь формул для сумм первых n членов арифметической и геометрической прогрессий. Для арифметической прогрессии имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} n = a_1 n + d \frac{n(n-1)}{2}. \quad (\text{В.2})$$

Для геометрической прогрессии верно, что

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{при } q \neq 1, \\ nb_1 & \text{при } q = 1. \end{cases} \quad (\text{В.3})$$

При записи формул (В.2) и (В.3) мы воспользовались символом суммирования $\sum$, который читается «сумма». Вообще говоря,

$$\sum_{k=m}^n f_k = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n, \quad m, n \in \mathbb{N}, f_k \in \mathbb{R}.$$

Символ k называют *индексом суммирования*. Он «пробегает» значения от *нижней границы суммирования* m до *верхней границы суммирования* n . По определению всегда $n \geq m$. Если $m = n$, то в сумме имеется только одно слагаемое. Не меняя суммы, можно обозначить индекс суммирования любой буквой. Сумма также не изменится, если к границам суммирования добавить любое целое число r и вычесть это число из индекса суммирования в выражении под знаком суммы:

$$\sum_{k=m}^n f_k = \sum_{l=m}^n f_l = \sum_{k=m+r}^{n+r} f_{k-r} = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n.$$

Докажем, например, формулу (В.3) для суммы геометрической прогрессии. Случай $q = 1$ тривиальный. Будем считать, что $q \neq 1$. При $n = 1$ имеем:

$$S_1 = b_1 = b_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1}.$$

Итак, база индукции установлена.

Осуществим индукционный переход. Предположим, что формула (В.3) верна для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость этой формулы и для номера $n + 1$. В самом деле,

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1}.$$

По предположению индукции к стоящей здесь сумме применима формула (В.3). Кроме того, очевидно, что $b_{n+1} = b_1 q^n$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + b_1 q^n = b_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^n(q - 1)}{q - 1} \right) = \\ &= b_1 \frac{(q^n - 1) + (q^{n+1} - q^n)}{q - 1} = b_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В.3.3. Произведения и факториалы

По аналогии со знаком суммы вводится знак произведения:

$$\prod_{k=m}^n p_k = p_m \cdot p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \dots \cdot p_n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad p_k \in \mathbb{R}.$$

По определению $n \geq m$. Если $m = n$, то в произведении имеется только один множитель.

В математике часто встречаются произведения первых n натуральных чисел, называемые *факториалами* и обозначаемые $n!$ (читается «эн факториал»). Иначе говоря,

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что по определению полагают $0! = 1$. Кроме того, пользуясь очевидным соотношением $(n + 1)! = n!(n + 1)$, несложно вычислять факториалы для небольших значений n :

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad \dots$$

Метод математической индукции часто применяют для доказательства неравенств. Мы, например, установим, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.4})$$

Очевидно, что при $n = 1$ в формуле (B.4) имеет место знак равенства.

Осуществим индукционный переход. Считаем, что формула (B.4) верна для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$. Докажем ее справедливость для номера $n + 1$. В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

К стоящей справа сумме применим предположение индукции. Отметим также, что $(n+1)! \geq n(n+1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} &\leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 2 - \frac{(n+1) - 1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n}{n(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В.3.4. Бином Ньютона

Историки науки утверждают, что, несмотря на свое название, знаменитая формула бинорма Ньютона была открыта задолго до второй половины XVII в., когда ею заинтересовался сэр Исаак Ньютон. Оказывается, ее уже знали китайские и арабские математики XIII в. Эта формула имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.5})$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами* и вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (\text{B.6})$$

Выпишем бином Ньютона в развернутой форме:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Ньютон обобщил формулу (В.5) на случай произвольного рационального показателя n .

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ находим:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

В силу определения (В.6) $C_n^{n-k} = C_n^k$, поэтому $C_n^n = 1$ и $C_n^{n-1} = n$.

Для биномиальных коэффициентов имеет место формула

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (\text{В.7})$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \\ &= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Формула (В.7) позволяет быстро вычислять биномиальные коэффициенты порядка $n+1$, если известны коэффициенты порядка n . При этом для наглядности их удобно выписывать в виде так называемого *треугольника Паскаля*:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1

Здесь каждый элемент равен сумме двух соседних с ним элементов из предыдущей строки. В качестве упражнения самостоятельно заполните еще две строки для $n = 6$ и $n = 7$.

Для доказательства справедливости формулы бинома Ньютона (В.5) применим метод математической индукции. При $n = 1$

$$(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^{1-k} b^k.$$

Выполним индукционный переход. Предположим, что формула бинома Ньютона верна для некоторого номера n . Докажем, что тогда она верна и для номера $n + 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = S_1 + S_2, \end{aligned}$$

где для краткости первая сумма правой части обозначена через S_1 , а вторая — через S_2 . Из суммы S_1 извлечем слагаемое, соответствующее $k = 0$:

$$S_1 = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k.$$

Из суммы S_2 извлечем слагаемое, соответствующее $k = n$, а в оставшейся сумме добавим единицу к границам суммирования:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1},$$

откуда

$$(a + b)^{n+1} = S_1 + S_2 = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Воспользуемся формулой (В.7). Тогда

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k,$$

что и требовалось доказать.

Глава 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и определители

1.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц

Определение 1.1. Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размера $m \times n$* . Матрицы, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита и записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или коротко $A = (a_{ij})$.

Определение 1.2. Строки и столбцы матриц объединяют общим названием *ряды*.

Определение 1.3. Числа a_{ij} , образующие матрицу $A = (a_{ij})$, называются ее *элементами*, причем индекс i обозначает *номер строки*, а j — *номер столбца*, где расположен данный элемент.

Определение 1.4. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называются *равными*, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Определение 1.5. Матрица O называется *нулевой* или *нуль-матрицей*, если все ее элементы равны нулю.

Определение 1.6. Матрица, число строк которой равно числу столбцов и равно n , называется *квадратной матрицей порядка n* .

Таким образом, квадратная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7. Элементы a_{11} , a_{22} , $\dots$, a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют ее *главную диагональ*. Другая диагональ, состоящая из элементов a_{n1} , $a_{n-1,2}$, $\dots$, a_{1n} , называется *побочной*.

Определение 1.8. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.9. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Определение 1.10. Диагональная матрица называется *единичной* и обозначается E , если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице, т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.1. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются соответственно квадратной, треугольной, диагональной и единичной матрицами третьего порядка.

Замечание 1.1. В матричном исчислении нулевая матрица O и единичная матрица E играют роль, аналогичную роли чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение 1.11. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектор-столбцом* или *вектор-строкой*.

ПРИМЕР 1.2. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются соответственно вектор-столбцом и вектор-строкой.

Можно рассматривать матрицы размера 1×1 и вида $A = (a_{11})$, например $A = (3)$, т.е. просто числа.

Определение 1.12. *Ступенчатой* называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля. Ступенчатыми считаются также матрицы, приводимые к виду (1.1) перестановкой строк или столбцов.

ПРИМЕР 1.3. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

являются ступенчатыми.

1.1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд действий, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые — специфические.

Определение 1.13. Суммой двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица того же размера $A + B = C_{m \times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B , расположенных на соответствующих местах:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

ПРИМЕР 1.4. Для заданных матриц A и B находим сумму $A + B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.14. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число k называется матрица $kA = (ka_{ij})$ того же размера, что и матрица A , полученная умножением всех элементов матрицы A на число k .

ПРИМЕР 1.5. Для заданной матрицы A находим матрицу $3A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.15. Матрицу $-A = (-1) \cdot A$ будем называть противоположной матрице A .

Определение 1.16. Разностью матриц A и B одинаковых размеров называется сумма матрицы A и матрицы, противоположной к B , т.е. $A - B = A + (-B)$.

Несложно доказать, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

- 1) $A + B = B + A$; 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3) $A + O = A$; 4) $A - A = O$;
- 5) $1 \cdot A = A$; 6) $k(A + B) = kA + kB$;

$$7) (k + l)A = kA + lA;$$

$$8) k(lA) = (kl)A.$$

Рассмотренные действия над матрицами аналогичны соответствующим действиям над числами. Этого нельзя сказать о вводимом ниже произведении матриц, которое возможно только для так называемых согласованных матриц.

Определение 1.17. Две матрицы называются *согласованными*, если число столбцов первой равно числу строк второй.

ПРИМЕР 1.6. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

согласованы, так как $A = A_{2 \times 2}$, $B = B_{2 \times 4}$.

Определение 1.18. Произведением AB согласованных матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$, элемент c_{ik} которой вычисляется как сумма произведений элементов i -й строки матрицы A и соответствующих элементов k -го столбца матрицы B :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sk}.$$

Вычисление элемента c_{ik} проиллюстрировано на рис. 1.1.

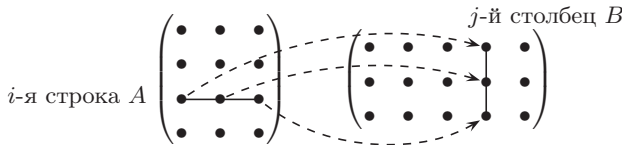


Рис. 1.1

Замечание 1.2. Из возможности умножения матрицы A на матрицу B не следует существования произведения BA . Дело в том, что согласованность матриц A и B , вообще говоря, не обеспечивает согласованности матриц B и A (рис. 1.1).

ПРИМЕР 1.7. Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению произведения матриц

$$AB = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

- 1) $A(B + C) = AB + AC$; 2) $(A + B)C = AC + BC$;
- 3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$; 4) $A(BC) = (AB)C$.

Замечание 1.3. Для квадратных матриц A и B одинаковых размеров заданы оба произведения: AB и BA . При этом, вообще говоря, $AB \neq BA$, т.е. произведение матриц не обладает свойством перестановочности.

ПРИМЕР 1.8. Найти произведения AB и BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \\ 6 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}.$$

Итак, в данном случае $AB \neq BA$. $\square$

Замечание 1.4. Из того, что произведение двух матриц равно нулевой матрице, не следует, что хотя бы одна из матриц нулевая. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Определение 1.19. Матрицы A и B , для которых $AB = BA$, называются *перестановочными*.

Очевидно, что любая квадратная матрица A является перестановочной с единичной матрицей E и нулевой матрицей O , причем

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O.$$

Определение 1.20. Если $k \in \mathbb{N}$, то k -й степенью квадратной матрицы A называется произведение k матриц A :

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$.

Операция возведения в степень обладает следующими привычными свойствами:

$$1) A^m A^k = A^{m+k}, \quad 2) (A^m)^k = A^{mk}.$$

Определение 1.21. Многочленом степени n от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — произвольные числа.

ПРИМЕР 1.9. Найти значение $f(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3.$$

Решение. Вычисляем A^2 и A^3 :

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Находим $f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= 2A^3 - 4A^2 + 3E = \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Определение 1.22. Матрица A^T , столбцы которой составлены из строк матрицы A с теми же номерами и тем же порядком следования элементов, называется *транспонированной* к матрице A .

ПРИМЕР 1.10. Найти матрицу, транспонированную к данной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим основные свойства операции транспонирования:

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- 3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

1.1.3. Определители низших порядков

Квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие число, называемое *определителем* и обозначаемое $|A|$, $\det A$ или Δ .

Определение 1.23. *Определитель первого порядка* квадратной матрицы $A = (a_{11})$ равен самому элементу этой матрицы, а именно $\det A = |A| = a_{11}$.

Замечание 1.5. Следует различать вертикальные линии, обозначающие определитель и модуль числа: они имеют совершенно различный смысл. Определитель, например, может принимать отрицательные значения.

Определение 1.24. *Определителем второго порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.2)$$