С. В. Поршнев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Курс лекций

- *Уравнения и системы уравнений*
- *Задачи интерполяции и аппроксимации*
- *Фурье-анализ*
- *Численное дифференцирование и интегрирование*
- *Обыкновенные дифференциальные уравнения*
- *Дифференциальные уравнения в частных производных*
- *Интегральные уравнения*

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

УДК 681.3.06+519.6
ББК 32.973Я73
П59

Поршнев С. В.

П59 Вычислительная математика. Курс лекций. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 320 с.: ил.

ISBN 5-94157-400-2

Книга представляет собой расширенный вариант лекций по курсу «Вычислительная математика», прочитанных автором в Нижнетагильском технологическом институте Уральского государственного технического университета для специальности «Информатика и вычислительная техника». Материал укладывается в перечень требований обязательного минимума содержания Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 654600 «Информатика и вычислительная техника» дисциплины «Вычислительная математика». Основная особенность курса — прикладная направленность. Для каждого описанного в книге вычислительного метода приведены его программные реализации, а также соответствующие функции математического пакета MATLAB. Выбранный подход позволяет сформировать понимание математического содержания конкретного метода (границы его применимости, погрешности метода и т. д.) и умение использовать современные программные средства.

Для студентов и преподавателей профильных специальностей

УДК 681.3.06+519.6
ББК 32.973Я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Екатерина Капалыгина*
Компьютерная верстка	*Екатерины Трубниковой*
Корректор	*Виктория Голуб*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 23.10.03.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,8.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-400-2

Содержание

Лекция 2

Решение уравнений с одной переменной

Цель лекции: на примере методов половинного деления и простой итерации продемонстрировать основные подходы к решению задачи нахождения корней нелинейных уравнений, описать соответствующие алгоритмы и их программные реализации, обсудить использование соответствующих функций пакета MATLAB.

2.1. Общие сведения и основные определения

Наиболее общий вид нелинейного уравнения:

$$F(x) = 0\ , \tag{2.1}$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a,\ b]$.

Определение 2.1. Всякое число $\xi \in [a,b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, называется корнем уравнения (2.1).

Определение 2.2. Число ξ называется корнем k-ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $F(x)$ равны нулю ее производные до $(k–1)$-го порядка включительно:

$$F(\xi) = F'(\xi) = \dots = F^{(k-1)}(\xi) = 0. \tag{2.2}$$

Определение 2.3. Однократный корень называется простым.

Определение 2.4. Уравнения $F(x)=0$ и $G(x)=0$ называются равносильными (эквивалентными), если множества решений данных уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на *алгебраические* и *трансцендентные.*

Определение 2.5. Уравнение (2.1) называется алгебраическим, если функция $F(x)$ является алгебраической.

Путем алгебраических преобразований из всякого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n, \tag{2.3}$$

где a_0, a_1,..., a_n — действительные коэффициенты уравнения, x — неизвестное.

Из алгебры известно, что всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один вещественный или два комплексно сопряженных корня.

Определение 2.6. Уравнение (2.1) называется трансцендентным, если функция $F(x)$ не является алгебраической.

Определение 2.7. Решить уравнение (2.1) означает:

1. Установить, имеет ли уравнение корни.
2. Определить число корней уравнения.
3. Найти значения корней уравнения с заданной точностью.

2.2. Отделение корней

Определение 2.8. Отделение корней — процедура нахождения отрезков, на которых уравнение (2.1) имеет только одно решение.

В большинстве случаев отделение корней можно провести графически. Для этого достаточно построить график функции $F(x)$ и определить отрезки, на которых эта функция имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс.

В сомнительных случаях графическое отделение корней необходимо подкреплять вычислениями. При этом можно использовать следующие очевидные положения:

- если непрерывная функция принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков (т. е. $F(a) \cdot F(b) < 0$), то уравнение (2.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;
- если функция $F(x)$ к тому же и строго монотонна, то корень на отрезке единственный.

2.3. Метод половинного деления

Пусть уравнение (2.1) имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на данном отрезке непрерывна (рис. 2.1).

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c=(a+b)/2$. Если $F(c)\neq 0$, то возможны два случая:

1. Функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$.
2. Функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[c, b]$.

Выбирая в каждом случае тот отрезок, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

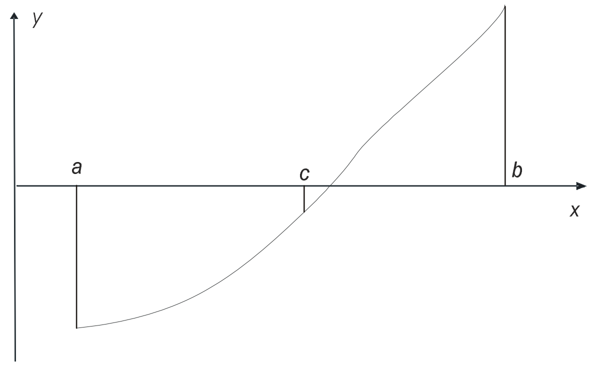

Рис. 2.1. К объяснению метода половинного деления

Пример 2.1. Найти, используя пакет MATLAB, методом половинного деления корень уравнения $x^4-11x^3+x^2+x+0.1=0$.

1. Создайте файл Func.m (листинг 2.1), содержащий описание функции $f(x)=x^4-11x^3+x^2+x+0.1$.

Листинг 2.1. Файл Func.m

```
function z=Func(x)
z=x.^4-11*x.^3+x.^2+x+0.1;
```

2. Создайте файл Div2.m (листинг 2.2), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения $f(x)=0$ методом половинного деления.

Листинг 2.2. Файл Div2.m

```
function z=Div2(f,x1,x2,eps);
% f - имя m-файла, содержащего описание функции f(x)
% x1 – левая граница отрезка, на котором производится поиск решения
% уравнения
% x2 – правая граница отрезка, на котором производится поиск решения
```

```
% уравнения
% eps — точность решения
L=x2-x1;
while L>eps
   c=(x2+x1)/2;
   if feval(f,c)*feval(f,x1)<0
   % feval(f,c) — оператор вычисления в точке x=c значения функции,
   % описание которой находится в соответствующем файле.
   % Имя файла хранится в строковой переменной f
      x2=c;
   else
      x1=c;
   end;
   L=x2-x1;
end;
z=c;
```

Примечание

Обращаем внимание читателя, что в пакете MATLAB существует "проблема буквы "я", суть которой состоит в том, что код строчной буквы "я" русского алфавита рассматривается пакетом MATLAB, как код команды. Поэтому обнаружение прописной буквы "я" в комментарии приводит к останову выполняемого файла и появлению сообщения об ошибке этапа исполнения. Для предотвращения описанной ситуации следует использовать в комментариях только строчную букву "Я".

3. Постройте график функции на интервале [–1, 1] (рис. 2.2), выполнив в командном окне пакета MATLAB следующую последовательность операторов:

```
>> x1=-1;
>> x2=1;
>> dx=10^-3;
>> x=x1:dx:x2;
>> plot(x,Func(x)); grid on
```

4. Вычислите значения корня уравнения:

```
>> Div2('Func',x1,x2,10^-5)
ans =
    0.3942
```

5. Проверьте полученное значение корня:

```
>> Func(ans)
ans =
  7.4926e-006
```

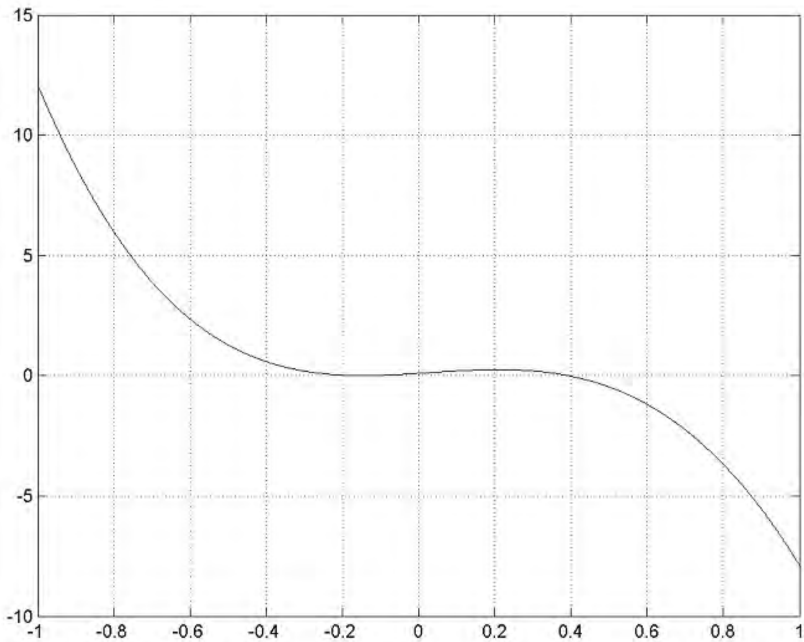

Рис. 2.2. График функции $f(x) = x^4 - 11x^3 + x^2 + x + 0.1$

Для рассмотрения процесса нахождения корня уравнения в динамике, необходимо сохранить значение корня на каждом шаге вычислительной процедуры и построить зависимость значения корня от номера шага. Далее приведен листинг файла Div2I.m, содержащего описание функции, возвращающей значение корня и длины отрезка (на котором данный корень находится) на каждом шаге метода половинного деления.

Листинг 2.3. Файл Div2I.m

```
function [z1,z2]=Div2(f,x1,x2,eps);
k=1;
L(1)=x2-x1; % начальная длина отрезка
c(1)=(x2+x1)/2; % начальное значение корня
while L(k)>eps
    if feval(f,c(k))*feval(f,x1)<0
      x2=c(k);
    else
      x1=c(k);
    end;
    k=k+1;
    c(k)=(x2+x1)/2;
```

```
    L(k)=x2-x1;
end;
z1=c;
z2=L;
```

6. На каждом шаге итерационного процесса вычислите значения корня и длины отрезка, на котором производится поиск решения.

```
>> [c L]=Div2I('Func',x1,x2,10^-5);
```

7. Визуализируйте зависимость значения корня от номера итерационного процесса (рис. 2.3).

```
>> plot(c, '-o')
```

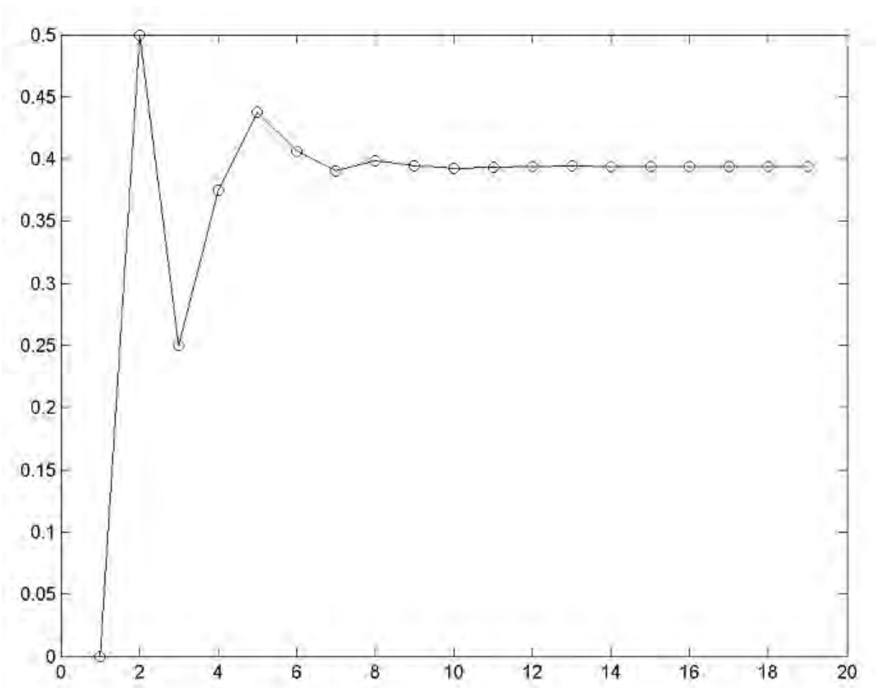

Рис. 2.3. Зависимость значения корня от номера шага вычислительной процедуры

8. Визуализируйте зависимость длины отрезка, на котором ищется значение корня, от номера итерации (рис. 2.4).

```
>> plot(L, '-o')
```

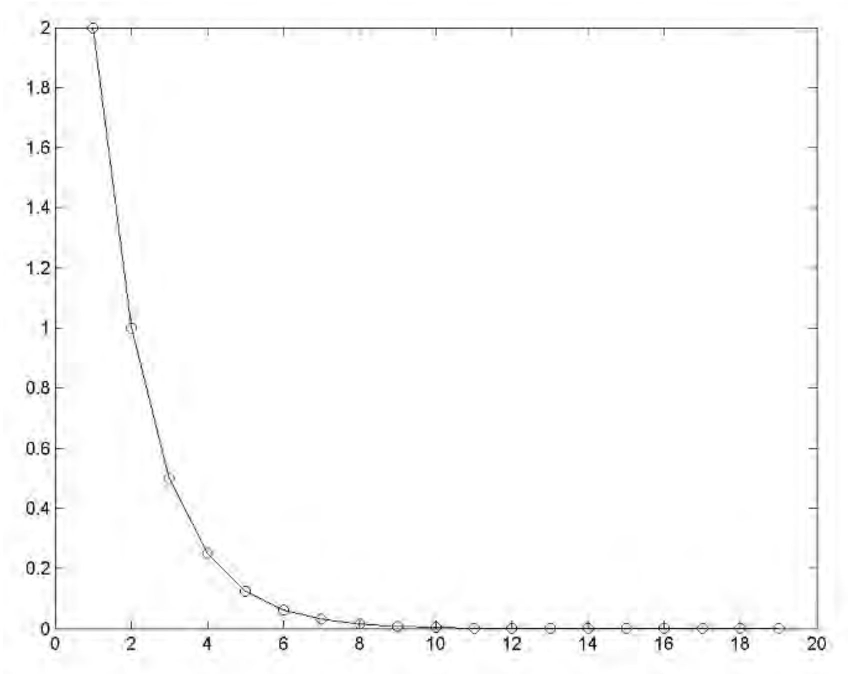

Рис. 2.4. Зависимость длины отрезка, на котором ищется значение корня, от номера шага вычислительной процедуры

2.4. Метод простой итерации

Заменим уравнение (2.1) равносильным уравнением:

$$x = f(x) \tag{2.4}$$

Пусть ξ — корень уравнения (2.4), а x_0 — полученное каким-либо способом нулевое приближение к корню ξ. Подставляя x_0 в правую часть уравнения (2.4), получим некоторое число $x_1 = f(x_0)$. Повторим данную процедуру с x_1 и получим $x_2 = f(x_1)$. Повторяя описанную процедуру, получим последовательность

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \tag{2.5}$$

называемую итерационной последовательностью.

Геометрическая интерпретация данного алгоритма представлена на рис. 2.5.

Итерационная последовательность, вообще говоря, может быть как сходящейся, так и расходящейся, что определяется видом функции $f(x)$.

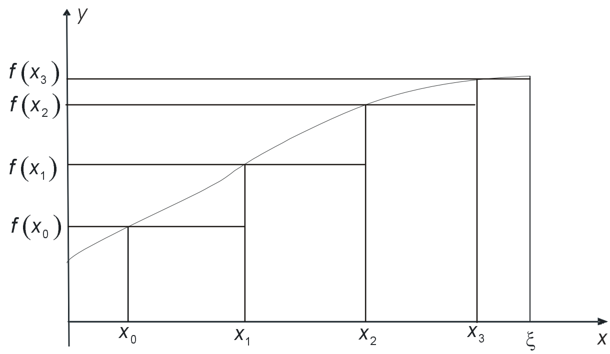

Рис. 2.5. К объяснению метода простой итерации

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ непрерывна, а последовательность (2.5) сходится, то предел последовательности (2.5) является корнем уравнения (2.4).

Действительно, пусть $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. Перейдем к пределу в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = f(\xi). \quad (2.6)$$

Условие сходимости итерационного процесса определяется следующей теоремой.

Теорема 2.2. Достаточное условие сходимости итерационного процесса.

Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a,b]$ и выполнены условия:

1. $f(x)$ определена и дифференцируема на $[a,b]$.
2. $f(x) \in [a,b]$ для всех $x \in [a,b]$.
3. Существует такое вещественное q, что $|f'(x)| \le q < 1$ для всех $x \in [a,b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ (n = 1, 2,) сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a,b]$.

Доказательство. Построим итерационную последовательность вида (2.5) с любым начальным значением $x_0 \in [a,b]$. В силу условия 2 теоремы 2.2 все члены последовательности находятся в отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим два последовательных приближения $x_n = f(x_{n-1})$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем:

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(c)(x_n - x_{n-1}), c \in [x_{n-1}, x_n].$$

Переходя к модулям и принимая во внимание условие 3 теоремы 2.2, получим:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f'(c)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \le q|x_n - x_{n-1}|,$$

$$|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}| .$$

При $n = 1, 2,$ имеем:

$$|x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_2| \le q \cdot |x_2 - x_1| \le q^2|x_1 - x_0|, \tag{2.7}$$

$$|x_{n+1} - x_n| \le q^n|x_1 - x_0| .$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots (x_n - x_{n-1}) + \ldots \tag{2.8}$$

Составим частичные суммы этого ряда

$$S_1 = x_0, S_2 = x_1, \ldots, S_{n+1} = x_n .$$

Заметим, что $(n+1)$-я частичная сумма ряда (2.8) совпадает с n-ым членом итерационной последовательности (2.5), т. е.

$$S_{n+1} = x_n . \tag{2.9}$$

Сравним ряд (2.8) с рядом

$$|x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + q^2|x_1 - x_0| + \ldots \tag{2.10}$$

Заметим, что в силу соотношения (2.7) абсолютные величины членов ряда (2.8) не превосходят соответствующих членов ряда (2.10). Но ряд (2.10) сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (q<1, по условию). Следовательно, и ряд (2.8) сходится, т. е. его частичная сумма (2.9) имеет предел. Пусть $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В силу непрерывности функции f получаем (см. (2.6)):

$$\xi = f(\xi)$$

т.е. ξ — корень уравнения $x = f(x)$.

Отметим, что условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.

Отыщем погрешность корня уравнения, найденного методом простой итерации. Пусть x_n — приближение к истинному значению корня уравнения $x = f(x)$. Абсолютная ошибка приближения x_n оценивается модулем

$$\Delta x_n = |\xi - x_n| .$$

Принимая во внимание (2.8) и (2.9), имеем

$$\xi - x_n = \xi - S_{n+1} = \left(x_{n+1} - x_n\right) + \left(x_{n+2} - x_{n+1}\right) + \ldots \tag{2.11}$$

Сравним (2.11) с остатком ряда (2.9):

$$q^n |x_1 - x_0| + q^{n+1} |x_1 - x_0| + \ldots \tag{2.12}$$

Учитывая оценку (2.7), получаем

$$\left|\xi - x_n\right| \le q^n \left|x_1 - x_0\right| + q^{n+1} \left|x_1 - x_0\right| + \ldots = \frac{q^n}{1-q} \left|x_1 - x_0\right|.$$

Таким образом, для оценки погрешности n-го приближения получается формула

$$\Delta x_n \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| . \tag{2.13}$$

На практике удобнее использовать модификацию формулы (2.13).

Примем за нулевое приближение x_{n-1} (вместо x_0). Следующим приближением будет x_n (вместо x_1). Так как $|x_n - x_{n-1}| \le q^{n-1} |x_1 - x_0|$, то

$$\Delta x_n \le \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| . \tag{2.14}$$

При заданной точности ответа ε итерационный процесс прекращается, если $\Delta x_n \le \varepsilon$.

2.5. Преобразование уравнения к итерационному виду

Уравнение $F(x) = 0$ преобразуется к виду, пригодному для итерационного процесса, следующим образом:

$$x = x - mF(x) ,$$

где m — отличная от нуля константа.

В этом случае

$$f(x) = x - mF(x) . \tag{2.15}$$

Функция $f(x)$ должна удовлетворять условиям теоремы 2.2. Дифференцируя (2.15), получим

$$f'(x) = 1 - mF(x) . \tag{2.16}$$