Выпуск 135

Библиотечка КВАНТ

А.Н. Колмогоров,
И.Г. Журбенко,
А.В. Прохоров

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \alpha\} \leq D\xi/\alpha^2$$

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i$$

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УДК 519.2(023)
ББК 22.17
К60

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Колмогоров А.Н, Журбенко И.Г., Прохоров А.В.
К60 **Введение в теорию вероятностей.** – 3-е изд., испр. – М.: Издательство МЦНМО, 2015. – 168 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 135. Приложение к журналу «Квант» №4/2015.)
ISBN 978-5-4439-1004-8

В книге на простых примерах рассматриваются основные понятия и теоремы теории вероятностей. В основе лежит комбинаторный подход, однако наряду с классическим определением вероятности вводится также и статистическое определение. Подробно анализируется модель случайного блуждания на прямой, описывающая физический процесс одномерного броуновского движения частиц, а также другие примеры. Обсуждаются несложные статистические задачи.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для руководителей и участников математических кружков, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.17

ISBN 978-5-4439-1004-8

9 785443 910048

12+

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1

КОМБИНАТОРНЫЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ВЕРОЯТНОСТИ

§1. Перестановки

Две буквы А и Б можно расположить одну за другой двумя способами:

АБ, БА

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами:

Для четырех букв получим 24 разных способа их расположения в виде последовательности:

АБВ, АВБ,

БАВ, БВА,

ВАБ, ВБА.

Сколькими способами можно расположить десять букв в виде последовательности? Перебрать все способы расположения здесь

АБВГ,	АБГВ,	БАВГ,	БАГВ,
АВБГ,	АВГБ,	БВАГ,	БВГА,
АГБВ,	АГВБ,	БГАВ,	БГВА,
ВАБГ,	ВАГБ,	ГАБВ,	ГАВБ,
ВБАГ,	ВБГА,	ГБАВ,	ГБВА,
ВГАБ,	ВГБА,	ГВАБ,	ГВБА.

было бы трудно. Для ответа на вопрос желательно общее правило, формула, которая позволила бы сразу вычислить число способов расположения n букв в виде последовательности. Число этих способов обозначают $n!$ (n с восклицательным знаком) и называют «n-факториал». Найдем это число. Мы уже видели, что

$$2! = 2,\quad 3! = 6,\quad 4! = 24.$$

Каждый способ расположения данного числа букв в последовательности называется *перестановкой*. Очевидно, что вместо букв можно взять цифры или любые другие предметы. Число перестановок четырех предметов равно $4! = 24$. Вообще $n!$ есть число перестановок n предметов (заметим еще, что полагают

$$1! = 1,$$

так как один предмет не с чем «переставлять», из одного предмета можно сформировать только одну «последовательность», в которой этот предмет стоит на первом месте):

$$1! = 1,$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Напрашивается гипотеза: число перестановок n предметов равно произведению первых n натуральных чисел:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\,. \qquad (1.1)$$

Гипотеза эта верна.

Для доказательства заметим, что в случае перестановки n предметов на первое место можно поставить любой из n предметов. В каждом их этих n случаев остающиеся $n - 1$ предметов можно расположить $(n-1)!$ способами. Поэтому получим всего $(n-1)!n$ способов расположения n предметов:

$$n! = (n-1)!n\,. \ (1.2)$$

При помощи формулы (1.2) получаем последовательно:

$$2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2,$$

$$3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

$$5! = 4! \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ и т.д}$$

Знакомые с принципом математической индукции могут заметить, что вывод формулы (1.1) из формулы (1.2) использует этот принцип, и провести строгое формальное рассуждение.

Теперь уже нетрудно вычислить число перестановок десяти букв: $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$.

§2. Вероятность

Семь букв разрезной азбуки А, А, Б, Б, К, У, Ш положены в мешок, откуда их вынимают наудачу и располагают одну за другой в порядке, в котором они появляются. В результате получается слово БАБУШКА.

В какой мере такой факт надо считать удивительным, быть может, заставляющим предполагать, что мы присутствуем при нарочно подстроенном фокусе? Занумеруем наши семь карточек с буквами:

1	2	3	4	5	6	7
А	А	Б	Б	К	У	Ш

Их можно расположить по порядку 7! = 5040 способами. Из этих 5040 случаев слово БАБУШКА получится в четырех:

3	1	4	6	7	5	2	4	1	3	6	7	5	2
Б	А	Б	У	Ш	К	А	Б	А	Б	У	Ш	К	А
3	2	4	6	7	5	1	4	2	3	6	7	5	1
Б	А	Б	У	Ш	К	А	Б	А	Б	У	Ш	К	А

Скажем, что из общего числа случаев (5040) четыре случая *благоприятствуют* появлению занимающего нас события (заключающегося в том, что из вынутых букв сложилось слово БАБУШКА). Отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу случаев в подобных задачах называют вероятностью события. В нашем примере вероятность появления слова БАБУШКА есть

$$\frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}.$$

Вероятность эта очень мала, и наше событие действительно очень «маловероятно». Позднее мы узнаем, что подсчитанная нами вероятность имеет такой практический смысл: если много раз производить описанный опыт с буквами, то примерно один раз на 1260 испытаний произойдет наше событие (само собою сложится слово БАБУШКА).

Аналогичный расчет для четырех букв А, А, М, М приводит к результату, что из них случайно будет складываться слово МАМА с вероятностью

$$\frac{4}{4!} = \frac{1}{6}.$$

С такой же вероятностью $1/6$ будет получаться еще каждое из пяти «слов»:

ААММ, АМАМ, АММА, МААМ, ММАА.

Если производить этот опыт с четырьмя буквами, то каждый из описанных шести возможных результатов будет появляться примерно в $1/6$ доле случаев.

§3. Равновозможные случаи

Игральная кость – это кубик, на гранях которого обозначено число очков от 1 до 6. Бросив две кости, можно получить сумму очков (на верхних гранях двух костей) от 2 до 12. Можно было бы думать, что в задаче имеется 11 возможных случаев и вероятность появления каждого из них равна $1/11$. Но это не так. Опыт показывает, что, например, сумма 7 появляется много чаще, чем сумма 12. Это и понятно, так как 12 можно получить только в виде

$$6 + 6 = 12,$$

а 7 – многими способами:

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7.$$

При этом мы записываем первым слагаемым число очков на первой кости, а вторым – на второй. Поэтому записи 1 + 6 и 6 + 1 указывают на две различные возможности получения суммы 7.

Для подсчета вероятностей здесь приходится рассматривать тридцать шесть случаев, каждый из которых характеризуется определенным числом очков, выпавших на первой кости, и определенным числом очков, выпавших на второй кости:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	…				
4,1	…				
5,1	…				
6,1	…				

Естественно считать эти тридцать шесть случаев равновозможными. Опыт показывает, что для достаточно правильных (кубических) костей, сделанных из однородного материала, и надлежащих приемов бросания (например, после встряхивания в стаканчике) эти 36 случаев появляются при большом числе повторений примерно одинаково часто.

Для суммы очков на двух костях получаем такие результаты (проверьте!):

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число благоприятствующих случаев	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Уточним определение: *вероятностью называется отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных*. На вопрос, какие случаи можно считать равновозможными, математика не дает ответа. При бросании костей условия выпадения любой из шести граней представляются нам одинаковыми. Кроме того, представляется естественным считать, что различные комбинации верхних граней двух костей тоже одинаково правдоподобны.

Разделение всех возможных исходов некоторого испытания на исключающие друг друга равновозможные случаи достаточно деликатно. Часто вместо изложенного сейчас «классического» определения вероятности приходится прибегать к другому – «статистическому». Но на первых порах знакомства с теорией вероятностей разумно отнестись с доверием к «классическому» определению. С точки зрения чистой математики тут нет никакой «нестрогости». Подробнее об этом будет сказано в гл.2.

§4. Броуновское движение и задача о блуждании на плоскости

Вычислять вероятности приходится отнюдь не только при решении шуточных задач или задач об игре в кости и карты. На теории вероятностей основаны, в частности, кинетическая теория газов, теория диффузии растворенных в жидкости веществ и взвешенных частиц.

Теория вероятностей объясняет, почему хаотическое, беспорядочное движение отдельных молекул приводит к четким, простым закономерностям движения их больших совокупностей.

Первая возможность экспериментального исследования такого рода соотношений между беспорядочным движением отдельных частиц и закономерным движением их больших совокупностей появилась, когда в 1827 году ботаник Р.Броун открыл явление, которое по его имени названо броуновским движением. Броун наблюдал под микроскопом взвешенную в воде цветочную пыльцу. К своему удивлению, он обнаружил, что взвешенные в воде частицы пыльцы находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить при самом тщательном старании устранить внешние воздействия, способные это движение поддерживать (например, движение воды под влиянием неравномерности температуры и т. п.). Вскоре было обнаружено, что это движение есть общее свойство любых достаточно мелких частиц, взвешенных в жидкости. Его интенсивность зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц (движение тем интенсивнее, чем температура выше, вязкость меньше, а частицы мельче). Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории соседних частиц, так что близкие вначале частицы очень быстро становятся удаленными (хотя могут иногда случайно вновь встретиться).

На рисунке 1 точками отмечены последовательные положения частицы (гуммигута в воде по классическим опытам Перре-

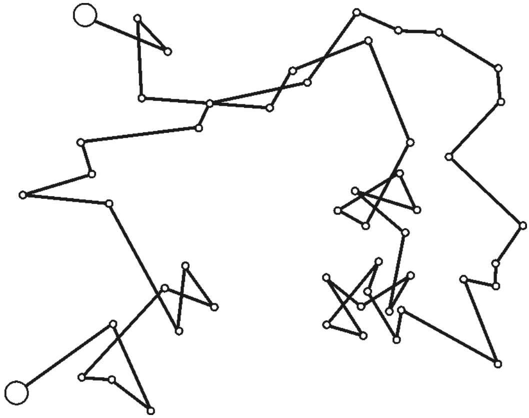


Рис.1. Блуждание частицы гуммигута с промежутками 30 с

на) с промежутками в 30 секунд. Эти последовательные положения соединены прямолинейными отрезками. В действительности траектория частицы еще запутаннее. На рисунке 2 схематически показано, что траектории трех частиц, которые в начальный момент были очень близки друг к другу, совершенно различны.

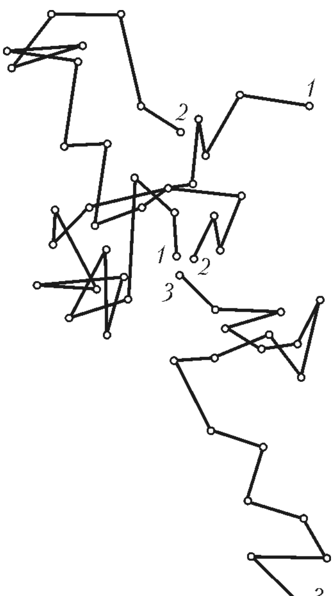


Рис.2. Три траектории блуждания

Броуновское движение большого числа частиц можно наблюдать, выпустив в тонкий слой воды на плоском стеклышке каплю чернил. При наблюдении простым глазом траектории отдельных чернильных частиц увидеть нельзя. Чернильное пятно будет постепенно расплываться, сохраняя округлую форму. Его окраска будет более интенсивной в центре, к краям же будет ослабевать. Схематически расположение большого числа частиц, подверженных броуновскому движению, через некоторый промежуток времени после того, как все они вышли из ближайшей окрестности начальной точки, отмеченной крестиком, изображено на рисунке 3.

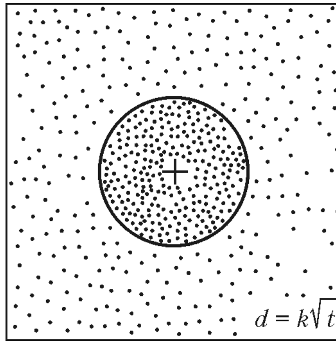


Рис.3. Положение вышедших из нуля частиц через некоторый промежуток времени

Обозначим через t промежуток времени, прошедший от выхода наших частиц из начальной точки, и через d – диаметр окружности с центром в начальной точке, внутри которой находится половина частиц (см. рис. 3). Наблюдение показывает, что этот диаметр растет приблизительно пропорционально квадратному корню из промежутка времени t, т.е. изменяется примерно по закону

$$d = k\sqrt{t} \tag{1.3}$$

(k – некоторая постоянная). Эта закономерность может быть обоснована теоретически средствами теории вероятностей. Сам ее вывод остается за пределами нашей книги, но в причинах того, что диаметр d растет не пропорционально времени (как было бы, если бы частицы разбегались из начальной точки с постоянной скоростью, не меняя направления), а несравненно медленнее, мы сможем разобраться.

Основные черты броуновского движения частицы можно наблюдать на упрощенной модели блуждания частицы по плоскости, разделенной на квадратики. К таким упрощенным моделям при изучении сложных явлений прибегают и в серьезных научных исследованиях.

Будем считать, что наша частица перемещается из квадратика, в котором она находится вначале, в один из четырех соседних квадратиков. Ее путь за восемь шагов может, например, иметь такой вид, как указано на рисунке 4.

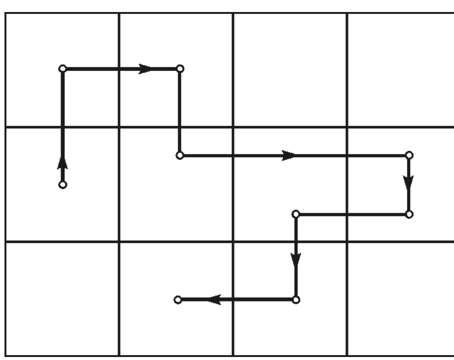


Рис.4. Блуждание частицы по плоскости

Из начального положения (рис.5,a) ча-

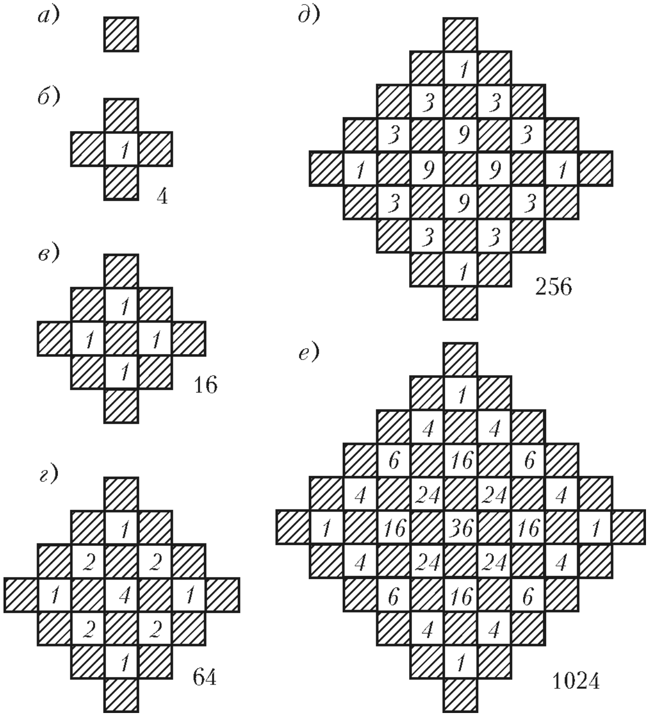


Рис.5. Числа различных путей в блуждании по плоскости за различные промежутки времени

стица может попасть в один из четырех смежных квадратиков, в каждый одним-единственным способом (рис.5,*б*). За два шага частица может попасть в начальное положение четырьмя способами (выходя в сторону в одном из четырех возможных направлений и возвращаясь обратно), еще в четыре квадрата частица может попасть двумя способами в каждый и в четыре квадрата – одним способом в каждый (рис.5,*в*). Всего частица может двигаться в течение первых двух шагов шестнадцатью различными способами.

На рисунке 5,*г* указан результат аналогичного подсчета для трех шагов. Здесь число различных путей равно уже

$$4 + 4 \cdot 9 + 8 \cdot 3 = 64\ .$$

На рисунках 5,*д* и *е* указано число способов попадания в различные квадраты после четырех и после пяти шагов. Легко понять, что число различных путей с ростом числа шагов t

растет как 4^t :

Число шагов	0	1	2	3	4	5
Число путей	1	4	16	64	256	1024

Если считать, что частица всегда помещается в центре занимаемого ею квадратика, то за t шагов она может удалиться от начального положения не более чем на расстояние th, где h – длина стороны квадратиков. Но для этого она должна двигаться прямолинейно. При $t = 5$ это будет только в четырех случаях из 1024. В большинстве же случаев частица окажется в конце пути значительно ближе к своему начальному положению. Например, при $t = 5$ в 400 случаях (почти 40%) расстояние конечного положения от начального будет равно единице, а еще в 400 случаях это расстояние равно

$$\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$$

Лишь в остающихся немногим более чем 20% случаях частица уйдет дальше.

Допустим теперь, что при любом t все пути равновозможны. Тогда числа, проставленные на рисунке 5, после их деления на 4^t дадут вероятности попадания в соответствующие клетки после t шагов. Обозначив через r расстояние от начального положения, получим при $t = 2$ такую табличку:

r^2	0	2	4
r	0	$\sqrt{2}$	2
Число случаев	4	8	4
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

При $t = 5$ таблица приобретает следующий вид:

r^2	1	5	9	13	17	25
r	1	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	5
Число случаев	400	400	100	80	40	4
Вероятность	$\frac{400}{1024}$	$\frac{400}{1024}$	$\frac{100}{1024}$	$\frac{80}{1024}$	$\frac{40}{1024}$	$\frac{4}{1024}$

Интересно подсчитать среднее значение квадрата расстояния (чертой обозначен переход к среднему значению r):

при $t = 2$ $\quad \bar{r}^2 = \dfrac{8 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{16} = 2$,

при $t = 5$ $\quad \bar{r}^2 = 5$.

Можно показать, что при любом t в нашей задаче $\overline{r}^2 = t$. Корень квадратный из среднего значения квадрата (называемый в статистике средним квадратическим) равен $\sqrt{t}$.

На этом мы закончим исследование нашей задачи. Заметим только, что рисунок 5,*е* уже обнаруживает большое сходство с рисунком 3. Оказывается, что наша модель случайного блуждания отдельной частицы хорошо соответствует наблюдениям, если предположить, что частицы блуждают независимо друг от друга (с точным смыслом выражения «независимые испытания» вы познакомитесь позднее, см. §1 гл.4).

§5. Блуждание на прямой. Треугольник Паскаля

Рассмотрим еще более простую задачу блуждания на прямой. Пусть в начальный момент времени частица находится в начале координат на прямой L, а затем продвигается или вверх, или вниз на расстояние h (рис.6). На втором шаге

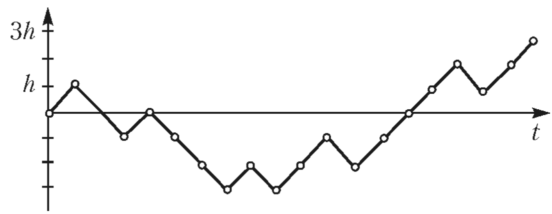


Рис.6. Развертка во времени случайного блуждания на прямой

повторяется то же самое и т.д. Итак, за один шаг частица перемещается на расстояние h вверх или вниз. Для того чтобы иметь возможность определить положение частицы после n-го шага, введем горизонтальную ось (ось t на рис. 6) и будем откладывать на ней число шагов. Отметим координаты положения частицы после каждого шага и соединим последовательные положения частицы отрезками, условно изобразив перемещение частицы на каждом шаге. На рисунке 6 показан возможный график движения («блуждания») частицы.

Легко понять, что число всех возможных способов перемещения частицы за t шагов будет равно

$$2^t = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{t \text{ раз}},$$

поскольку на каждом шаге производится выбор из двух возможностей. На рисунке 7 подсчитано число способов, которыми можно попасть через t шагов в то или иное положение на прямой

L (например, число способов вернуться в начало координат на 2-м, 4-м или 6-м шаге равно, соответственно, 2, 6 и 20).

Случайное блуждание такого рода осуществляется в специальном приборе, который называют *доской Гальтона* в честь известного английского психолога и антрополога Ф.Гальтона (1822–1911). На рисунке 8 схематично изображено устройство этого простого прибора. Металлические шарики один за другим попадают в самый верхний канал и устремляются вниз. Наткнувшись на первое препятствие (острие), они должны выбрать путь вправо или влево. На втором этапе при столкновении с одним из двух препятствий происходит такой же выбор. Этот процесс продолжается далее и после последнего ряда препятствий, который имеет номер t, шарик оказывается в одной из секций, на которые разделен самый низ прибора. При тщательной подгонке деталей выбор пути каждого шарика оказывается вполне случайным: любой из 2^t путей равновозможен. Пропустив через прибор большое число шариков, обнаруживают, что доля шариков, попавших в каждую из секций внизу, примерно соответствует рассчитанным вероятностям (на рис. 8 дана иллюстрация для $t = 5$).

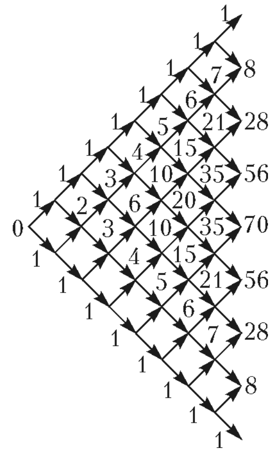


Рис.7. Подсчет числа траекторий случайного блуждания

Оставим теперь приборы, демонстрирующие физический механизм случайности, и займемся математикой.

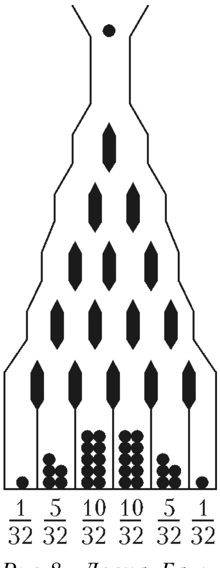


Рис.8. Доска Гальтона

Выпишем числа, помещенные в схеме блуждания на рисунке 7, в виде таблицы (см. с. 18). Здесь цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 по вертикали и горизонтали обозначают номера строк и столбцов (0 – это тоже номер). В правой части стоят суммы чисел в каждой строке.

Закон образования таблицы легко установить: на каждой позиции стоит сумма числа, стоящего в предыдущей строке непосредственно сверху, и числа, стоящего

		→ m 0	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
↓	0	1									1
n	1	1	1								2
	2	1	2	1							4
	3	1	3	3	1						8
	4	1	4	6	4	1					16
	5	1	5	10	10	5	1				32
	6	1	6	15	20	15	6	1			64
	7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

сверху слева. Например,

$$56 = 21 + 35.$$

Отдельно приходится оговорить, что в нулевом столбце и по диагонали стоят единицы. Можно поступить иначе, считать, что таблица продолжается неограниченно влево и вправо, но заполнена там нулями.

Теперь указанное основное правило заполнения таблицы будет действовать без всяких исключений, начиная с первой строки.

Обозначив через C_n^m число, стоящее в таблице на пересечении m-го столбца и n-й строки, можно записать правило заполнения таблицы в виде формулы

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \,. \tag{1.4}$$

Особо надо задать числа нулевой строки:

$$C_0^m = \begin{cases} 1 & m = 0, \\ 0 & \text{при остальных значениях } m. \end{cases}$$

Наша таблица (без заполнения позиций, где все равно стоят нули) называется *треугольником Паскаля* или *арифметическим треугольником*. Легко видеть, что сумма чисел C_n^m в n-й строке таблицы равна 2^n. На с. 19 помещена более полная таблица чисел C_n^m для n, меняющегося от 4 до 20.

Вернемся к задаче о блуждании на прямой, но изменим ее постановку. Пусть частица движется по прямой и каждую секунду либо делает один шаг вправо на фиксированное расстояние h, либо остается на месте. За n секунд частица сдвинется не

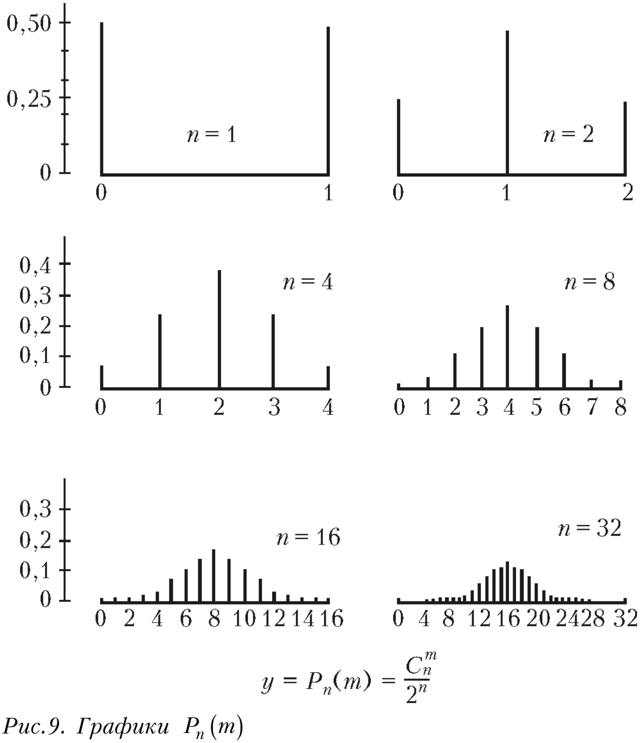
$\downarrow m$	$\rightarrow n$ 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\leftarrow n$ $\downarrow m$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
2	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	2
3	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140	3
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	4
5		1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	5
6			1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	6
7				1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	7
8					1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	8
9						1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	9
10							1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	10
11								1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	11
12									1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	12
13										1	14	105	560	2380	8568	27132	77520	13
14											1	15	120	680	3060	11628	38760	14
15												1	16	136	816	3876	15504	15
16													1	17	153	969	4845	16
17														1	18	171	1140	17
18															1	19	190	18
19																1	20	19
20																	1	20

более чем на n шагов вправо. Возникает вопрос о том, какое число шагов за n секунд будет наиболее вероятным, если считать все варианты движения равновозможными. Ясно, что случаи 0 шагов и n шагов при большом числе n появятся лишь в виде очень редких исключений.

Учитывая все сказанное выше, легко сообразить, что число способов сделать ровно m шагов вправо за первые n секунд равно здесь C_n^m. Поскольку все способы блуждания при заданном n равновозможны, то вероятность сдвинуться на m шагов за n секунд равна

$$P_n(m) = \frac{C_n^m}{2^n}\,. \qquad (1.5)$$

На рисунке 9 даны графики зависимости вероятностей $P_n(m)$ от m при $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Масштаб по вертикальной оси, где откладываются вероятности $P_n(m)$, на всех графиках сохраняется неизменным. Масштаб по горизонтальной оси выбран



$$y = P_n(m) = \frac{C_n^m}{2^n}$$

Рис.9. Графики $P_n(m)$