САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ

М. А. Иванов · Ю. В. Якубович

Теория и задачи

УДК 519.1
ББК 22.176
И20

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. В. Дыбкова* (С.-Петерб. ун-т),
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник *С. В. Дужин* (С.-Петерб. отд. математического ин-та РАН (ПОМИ РАН))

Рекомендовано к публикации Учебно-методической комиссией математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Иванов М. А., Якубович Ю. В.

И20 **Введение в комбинаторику. Теория и задачи:** учеб. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2018. — 136 с.

ISBN 978-5-288-05792-2

В учебном пособии рассматриваются основные понятия комбинаторики, которые лежат в основе многих математических доказательств. Материал изложен доступным языком без сложного математического аппарата, что отличает настоящее пособие от других учебников по комбинаторике. Помимо теоретического материала, в учебном пособии представлено около 330 задач различного уровня сложности.

Пособие предназначено для студентов младших курсов математических специальностей, но может быть также полезно старшеклассникам, интересующимся математикой.

УДК 519.1
ББК 22.176

При оформлении обложки использована цв. литография
В. В. Кандинского «Фиолетовый». 1923 г.
Shutterstock.com

ISBN 978-5-288-05792-2

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . 5

Список используемых обозначений . . . 6

1. Метод математической индукции . . . 7
- 1.1. Неформальное введение . . . —
- 1.2. Формализация и обобщения . . . 8
- Задачи . . . 9

2. Основные комбинаторные объекты и методы . . . 13
- 2.1. Простейшие способы комбинаторных подсчетов . . . —
- 2.2. C_n^m и его свойства . . . 16
- 2.3. Наборы с повторениями . . . 18
- 2.4. Формула включений-исключений . . . 19
- 2.5. Разбиения перестановок на циклы . . . 21
- 2.6. Разбиения множеств . . . 28
- 2.7. Разбиения натуральных чисел . . . 26
- Задачи . . . 23

3. Введение в теорию графов . . . 48
- 3.1. Неформальное введение . . . —
- 3.2. Вершины и рёбра . . . 49
- 3.3. Изоморфизмы графов . . . 50
- 3.4. Пути, циклы и маршруты . . . 51
- 3.5. Деревья . . . 53
- 3.6. Двудольные графы . . . 55
- 3.7. Эйлеровы графы . . . 56
- 3.8. Лемма Шпернера . . . 57
- Задачи . . . 58

4. Элементарная теория вероятностей . . . 66
- 4.1. Схема равновероятных исходов . . . —
- 4.2. Условная вероятность и независимость . . . 69
- 4.3. Применение условных вероятностей . . . 73
- 4.4. Схема Бернулли . . . 75
- Задачи . . . 77

5. Рекуррентные соотношения . . . 86
- 5.1. Неформальное введение . . . —
- 5.2. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами . . . 88
- 5.3. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами . . . 91
- 5.4. Числа Каталана . . . 94
- Задачи . . . 95

6. Производящие функции . . . 102
- 6.1. Основные понятия . . . —
- 6.2. Производящие функции и рекуррентные соотношения . . . 111
- 6.3. Экспоненциальные производящие функции . . . 119

6.4. Разбиения целых чисел и производящие функции 120
Задачи 122

7. Дополнительные материалы 129
Вариант экзамена 2011 г. . . . . —
Вариант экзамена 2012 г. 130
Вариант экзамена 2013 г. 131
Вариант экзамена 2014 г. 132
Вариант экзамена 2015 г. 133
Вариант экзамена 2016 г. 134

Список литературы для дополнительного чтения 135

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, изучающих предмет «Комбинаторика», при подготовке к занятиям и экзаменам, выполнении домашних работ. Авторы вели занятия по этому предмету в течении последних шести лет и столкнулись с нехваткой подходящей учебной литературы. Это послужило причиной разработки данного издания, в котором достаточно подробно изложены все основные темы, входящие в программу, а также разобраны различные примеры.

Комбинаторика является одной из старейших математических дисциплин, которая активно развивается в настоящее время в связи с новыми возможностями и потребностями, появившимися с развитием вычислительной техники, новыми приложениями комбинаторных задач в физике и биологии, усовершенствованием алгебраической и вероятностной техники. Затрагиваемые в пособии темы являются классическими, по ним имеется обширная литература, однако рассмотренный материал поностью не был изложен ни в одной из книг. К тому же большинство учебников либо слишком элементарны, либо, наоборот, трудно воспринимаются студентами первого курса, поскольку часто апеллируют к ещё незнакомым им понятиям. Мы, напротив, старались излагать необходимую информацию, не выходя за рамки программы первого семестра.

В ряде мест, тем не менее, поясняется связь рассматриваемых тем с понятиями алгебры и анализа, которые обычно вводятся в соответствующих курсах позже. Такие места набраны шрифтом без засечек и могут быть опущены без ущерба для понимания основного текста. Эти пояснения, однако, могут оказаться полезными тем студентам, которые уже знакомы с необходимыми понятиями.

Помимо теоретического материала в пособии разбираются примеры решения задач и даются упражнения на понимание и закрепление рассмотренных понятий. В конце каждого раздела приводятся задачи для самостоятельной работы. Некоторые из них достаточно просты и служат в основном для проверки усвоения теоретических сведений, другие — сложнее и требуют некоторой изобретательности для их решения. В ряде задач даны ответы; более сложные задачи снабжены указаниями. В приложении приводятся варианты задач, которые выносились в 2011–2016 годах на экзамены по предмету «Комбинаторика» на первом курсе математико-механического факультета СПбГУ.

Список используемых обозначений

Общие обозначения

$\lvert A\rvert$	количество элементов (мощность) множества A;
$\delta_{n,k}$	символ Кронекера, равный 1 при $n = k$ и 0 при $n \neq k$;
$[x]$	целая часть x, т. е. наибольшее целое, не превосходящее x;

Комбинаторные функции

$b(n)$	число Белла, т. е. количество разбиений множества из n элементов;
c_n	число Каталана;
C_n^m	число сочетаний без повторений или биномиальный коэффициент;
$\overline{C}_m^n$	количество представлений числа n в виде упорядоченной суммы m неотрицательных слагаемых;
$p(n)$	количество разбиений натурального числа n;
$P(n_1, \ldots, n_k)$	число перестановок с повторениями;
$s(n, k)$	число Стирлинга первого рода без знака, т. е. количество перестановок n-элементного множества с k циклами;
$\bar{s}(n, k)$	число Стирлинга первого рода со знаком;
$S(n, k)$	число Стирлинга второго рода, т. е. количество разбиений n-элементного множества на k подмножеств;

Графы

$\overline{G}$	дополнение графа G;
$d(x, y)$	расстояние между вершинами x и y в графе, т. е. длина кратчайшего пути между ними;
$\deg_G(x)$	степень вершины x в графе G;
$e(G)$	количество рёбер в графе G;
$E(G)$	множество рёбер в графе G;
$v(G)$	количество вершин в графе G;
$V(G)$	множество вершин в графе G;
K_n	клика или полный граф с n вершинами;
$K_{n,m}$	полный двудольный граф с долями n и m вершин;
$G \setminus H$	подграф, содержащий все вершины графа G и рёбра, которые не лежат в его подграфе H

1. Метод математической индукции

1.1. Неформальное введение

Одним из простейших методов математического доказательства является метод перебора. А что делать, если утверждение касается бесконечного множества объектов, и перебрать их все не удастся? Существует метод рассуждения, заменяющий неосуществимый перебор бесконечного числа случаев. Достаточно проверить первый случай и доказать, что если утверждение истинно в некотором случае, то оно окажется истинно и в следующем за ним случае. Такой метод называется *методом математической индукции.*

Опишем метод на простейшем примере. Будем вычислять последовательные суммы нечётных чисел: 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, … Мы получим числа 1, 4, 9, 16, являющиеся квадратами чисел 1, 2, 3, 4. Можно ожидать, что для следующей суммы со слагаемым 9 мы получим квадрат числа 5, т. е. 25, что легко проверить. Итак, мы выдвигаем гипотезу, что для любого натурального n выполняется равенство:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Мы проверили это равенство для $n = 1, 2, 3, 4, 5$, но, как было отмечено выше, последовательный перебор натуральных чисел никогда не даст доказательства этой гипотезы, т. к. сколько бы чисел мы не проверили, всегда остается возможность, что среди оставшихся чисел есть такое, для которого равенство не выполняется. Нам нужно провести рассуждение, позволяющее неограниченно увеличивать те числа, для которых верно утверждение. Иными словами нам надо доказать, что если

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2, \tag{2}$$

то такое же равенство будет справедливо и при добавлении к левой части равенства следующего нечётного числа $2k+1$ и одновременной замене правой части на $(k + 1)^2$, т. е.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2. \tag{3}$$

Итак, доказательство справедливости равенства (1) для всех натуральных чисел свелось к тому, чтобы доказать следующее утверждение: *если истинно равенство* (2)*, то истинно и равенство* (3). Равенство (3), истинность которого мы хотим доказать, можно переписать следующим образом:

$$\Big(1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)\Big) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Но, по предположению (2), квадратную скобку в левой части равенства можно заменить на k^2. В результате получаем тождество $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Итак, равенство (1) истинно для $n = 1$ (*база индукции*), и из истинности для $n = k$ следует, что оно истинно для $n = k + 1$ (*индукционный переход*). Но тогда из его истинности для $n = 1$ следует истинность для $n = 1 + 1 = 2$, а тогда и для $n = 2 + 1 = 3$, и так далее для всех натуральных n.

1.2. Формализация и обобщения

Для доказательства методом математической индукции необходимо следующее:

1) сформулировать утверждение $T(n)$, зависящее от натурального параметра n;
2) установить *базу индукции*, т. е. проверить истинность утверждения $T(1)$;
3) осуществить *индукционный переход*, т. е. доказать, что для любого натурального n из истинности $T(n)$ следует истинность $T(n + 1)$.

Почему метод математической индукции работает? Воспользуемся одной из аксиом множества натуральных чисел:

> *В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.*

Выведем отсюда метод математической индукции. Пусть $T(n)$ истинно не для всех натуральных n, т. е. множество

$$\{k \mid T(k) \text{ ложно}\}$$

не пустое. Тогда по аксиоме в нем есть наименьший элемент. Обозначим его n_0. Возможны два варианта:

1) $n_0 = 1$. Это противоречит базе индукции;
2) $n_0 > 1$. Тогда $T(n_0 - 1)$ истинно, а $T(n_0)$ ложно. Это противоречит индукционному переходу.

Упражнение. Выведите следующие модификации метода математической индукции:

а) $T(n)$ истинно для любого натурального $n \geqslant k_0$, если
- $T(k_0)$ истинно;
- из истинности $T(n)$ следует истинность $T(n+1)$ для любого натурального $n \geqslant k_0$.

б) $T(n)$ истинно для любого натурального n, если
- $T(1)$ истинно;
- из истинности $T(k)$ для всех $k < n$ следует истинность $T(n)$ для любого натурального $n > 1$.

в) $T(n)$ истинно для любого натурального n, если
- $T(1)$ и $T(2)$ истинно;

- из истинности $T(n-1)$ и $T(n)$ следует истинность $T(n+1)$ для любого натурального $n \geqslant 2$.

г) $T(n)$ истинно для любого натурального n, если
- $T(1)$ истинно;
- из истинности $T(n)$ следует истинность $T(2n)$ для любого натурального n;
- из истинности $T(n)$ следует истинность $T(n-1)$ для любого натурального $n \geqslant 2$.

Математическую индукцию можно сравнить с бесконечным рядом костяшек домино. Свойство выстроенных в ряд домино состоит в том, что если опрокинуть одну костяшку, падает следующая. Пусть утверждение $P(n)$ состоит в том, что падает n-ая костяшка. Толкнем первую костяшку домино, т. е. обеспечим истинность $P(1)$. Поскольку каждая костяшка опрокидывает следующую, то из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$. Поскольку падают все костяшки, $P(k)$ истинно для каждого положительного целого числа n.

В дальнейшем, проводя доказательство при помощи описанного выше принципа математической индукции, мы будем просто говорить, что доказываем утверждение по индукции.

Упражнение. Выведите аксиому о наименьшем элементе из метода математической индукции.

Задачи

1.1. Докажите, что для любого натурального n

а) $$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

б) $$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

в) $$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=(1+2+3+4+\ldots+n)^2;$$

г) $$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\ldots(i+k-1)=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(n+k)}{k+1};$$

д) $$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)};$$

е) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n};$$

ж) $$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

1.2. Найдите общую формулу для произведения

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

и докажите её по индукции.

1.3. *Неравенство Бернулли.* Для любого $x > -1$ и натурального n докажите неравенство $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

1.4. Докажите, что для любого натурального n

а) $n^3 - n$ делится на 3; *б*) $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Числа Фибоначчи

1.5. Докажите, что последовательность Фибоначчи, задаваемая равенством $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальными данными $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, удовлетворяет следующим соотношениям:

а) $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_nf_{m+1}$;

б) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

в) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

г) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_nf_{n+1}$;

д) $f_{n+1}^2 = f_nf_{n+2} + (-1)^n$;

е) $f_1f_2 + f_2f_3 + \ldots + f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}^2$;

ж) $f_1f_2 + f_2f_3 + \ldots + f_{2n}f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$;

з) $nf_1 + (n-1)f_2 + (n-2)f_3 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3)$;

и) $f_3 + f_6 + \ldots + f_{3n} = \dfrac{f_{3n+2}-1}{2}$;

й) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$;

к) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;

л) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} < f_n < \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ при $n > 3$.

1.6. *Формула Бине.* Докажите, что последовательность Фибоначчи удовлетворяет равенству:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

1.7. Докажите, что

а) для любых натуральных m и n число f_{mn} делится на f_n;

б) два соседних члена ряда Фибоначчи взаимно просты.

1.8. Найдется ли среди первых 100 000 001 членов ряда Фибоначчи число, оканчивающееся четырьмя нулями?

1.9. В ряде Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Докажите, что их сумма не входит в этот ряд.

1.10. Докажите, что любое натуральное число N можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи, в которую каждое число входит не более одного раза и никакая пара соседних чисел не входит одновременно.

1.11. Рассмотрим последовательность a_n, которая задается равенством $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ и начальными данными $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Докажите, что для любого n выполнено неравенство $a_n \leqslant 3^n$.

1.12. Докажите, что каждое целое число $n \geqslant 8$ может быть представлено в виде $n = 3x + 5y$ для некоторых неотрицательных целых чисел x и y.

1.13. Докажите, что для любого целого числа $n \geqslant 4$ имеет место неравенство $n! > 2^n$.

1.14. Докажите, что области, получаемые делением плоскости любым числом различных прямых линий, могут быть раскрашены чёрной и белой краской таким образом, что любые две области, имеющие общую границу, будут окрашены в различные цвета.

1.15. Докажите, что плоскость делится n различными прямыми линиями не более чем на $(n^2 + n + 2)/2$ части.

1.16. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

1.17. *Ханойская башня.* Эта головоломка представляет собой n дисков разных размеров, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трёх колышков (снизу вверх от большего к меньшему). Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая бóльший диск на меньший.

а) Докажите, что эта головоломка имеет решение. Какой способ решения головоломки будет оптимальным по числу перемещений?

б) Пронумеруем колышки числами 1, 2, 3. Предположим, что требуется переместить диски с 1-го колышка на 3-й. Сколько понадобится перекладываний, если прямое перемещение диска с 1-го колышка на 3-й запрещено? (Каждое перекладывание должно производится через 2-й колышек. Как и раньше, бóльший диск нельзя класть на меньший.)

в) Сколько понадобится перекладываний, если в условие задачи (*а*) добавить дополнительное требование: нижний диск нельзя класть на второй колышек?

г) На шахматной доске размера $3 \times n$ (3 столбца и n строк) в первом столбце расположены фишки с номерами от 1 до n (нумерация сверху вниз). Фишки можно двигать по одной сверху, помещая их в другой столбец в нижнюю незанятую клетку и не нарушая следующие правила: в каждом столбце номера фишек должны убывать сверху вниз; цвет поля под фишкой должен сохраняться; запрещено делать обратный ход. Докажите, что в каждой возникающей позиции будет не более одного хода, причем перемещения станут невозможны, когда все фишки займут третий столбец, т. е. головоломка будет решена. Сколько ходов будет при этом сделано?

1.18. Докажите, что:

а) квадрат можно разрезать на n квадратов для любого $n \geqslant 6$;

б) правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geqslant 6$.

1.19. Имеется k ящиков. В некоторых из них лежат ещё k ящиков и т. д. (Каждый ящик либо пуст, либо содержит k ящиков). Сколько всего ящиков, если заполненных m?

1.20. Длины сторон прямоугольного параллелепипеда выражаются целыми числами a, b, c такими, что $2^{\alpha-1} < a \leqslant 2^{\alpha}$, $2^{\beta-1} < b \leqslant 2^{\beta}$, $2^{\gamma-1} < c \leqslant 2^{\gamma}$. Докажите, что наименьшее число распилов, необходимых для разделения этого параллелепипеда на единичные кубики, равно $\alpha+\beta+\gamma$ (части можно перекладывать после каждого распила).
Указание. Воспользуйтесь индукцией по $[\log a] + [\log b] + [\log c]$.

1.21. *Эрдёш—Секереш.* Докажите, что из любой перестановки чисел 1, 2, …, n^2+1 можно выбрать $n+1$ число, идущее или в порядке возрастания, или в порядке убывания.
Указание. Сначала обобщите утверждение на возрастающую и убывающую цепочки разной длины.

2. Основные комбинаторные объекты и методы

На практике часто приходится выделять из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т. д.

Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют *комбинаторными задачами*. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств — любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах и их отображениях.

Есть несколько основных типов комбинаторных задач:

- существование объекта с заданными свойствами;
- подсчет или оценка количества искомых комбинаций или их описание;
- поиск оптимальной комбинации по какому-то параметру.

2.1. Простейшие способы комбинаторных подсчетов

Правило суммы

Комбинаторика тесно связана с теорией конечных множеств: понятия *подмножество*, *объединение множеств*, *пересечение множеств* оказываются полезными при решении комбинаторных задач, т. к. количество комбинаций — это число элементов соответствующего множества. Будем обозначать количество элементов (*мощность*) множества A через $|A|$. Например, справедливо следующее утверждение:

> *Если множества A и B конечны, причем $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Это очевидное утверждение называют в комбинаторике *правилом суммы*. Его формулируют также следующим образом:

> *Если α можно выбрать k способами, а β — m способами, причем любой выбор α отличается от любого выбора β, то выбор «α или β» можно сделать $k + m$ способами.*

Пример. Предположим, что на собрании присутствуют 10 мужчин и 15 женщин, и кого-то одного нужно выбрать председателем. Существует $10+15 = 25$ способов выбора председателя.

Пример. Предположим, что студент выбирает книгу на полке, где находятся 25 различных учебников по математике, 30 учебников по информатике и 15 —

по химии. Существует $25 + 30 + 15 = 70$ различных вариантов выбора книги студентом.

Наборы и правило произведения

Для описания постановки и решения комбинаторной задачи мы будем часто рассматривать конечные упорядоченные последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов данного множества X, подчеркивая важность порядка расположения элементов в последовательности и допуская возможность присутствия в ней на разных местах одного и того же элемента из X. Такую последовательность мы называем *набором размера* n (иногда в этой ситуации употребляются также термины «кортеж», «слово», «n-мерный вектор»). Простейшая комбинаторная ситуация, в которой возникают наборы, — мы вынимаем из мешка предметы по одному, записываем их и кладем обратно.

Понятие набора можно обобщить, разрешив брать соответствующие члены набора из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, не обязательно различных. Тогда набор — это просто элемент декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Сколько существует наборов? На этот вопрос отвечает теория множеств:

> *Число элементов в декартовом произведении конечных множеств X и Y равно произведению числа элементов множеств X и Y.*

В комбинаторике *правило произведения* формулируется обычно следующим образом:

> *Если α можно выбрать k способами, а β — m способами, то выбор пары (α, β) можно сделать km способами.*

Иногда для решения задач приходится пользоваться обобщенным правилом произведения. А именно, возможно, что различные варианты выбора элемента β определяются уже сделанным выбором элемента α, но после каждого выбора элемента α элемент β можно выбрать одним и тем же количеством способов. И в этом случае число способов выбора пары (α, β) равно km, где k — число способов выбрать элемент α, m — число способов выбрать элемент β после того, как элемент α выбран.

Упражнение. Из города А в город Б ведут 5 дорог, а из города Б в город В — три дороги. Сколько путей, проходящих через Б, ведет из А в В? *Ответ*: $5 \cdot 3 = 15$.

Упражнение. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров? *Ответ*: $6 \cdot 5 = 30$.

Пример. Сколькими способами можно выбрать две книги по разным предметам, если на полке находятся 15 книг по информатике, 12 книг по математике и 10 книг по химии? Если выбирать книгу по информатике и книгу по математике, то существуют 15 вариантов выбора книги по информатике и 12 вариантов выбора книги по математике, поэтому всего $12 \times 15 = 180$ возможностей. Если выбирать книги по информатике и по химии, то имеются 15 вариантов выбора книги по информатике и 10 вариантов выбора книги по химии, поэтому существует $15 \times 10 = 150$ возможностей. Если выбираются книга по математике и книга по химии, то имеются 12 способов выбора математической книги и 10 — книги по химии, поэтому всего $12 \times 10 = 120$ возможностей. Следовательно, существуют $180 + 150 + 120 = 450$ способов выбора двух книг.

Упражнение. Примените правило произведения к доказательству двух утверждений:

а) число распределений k различных предметов по m различным ящикам равно m^k (ящики могут быть пустыми);

б) число подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

Наборы без повторений

Рассмотрим наборы из элементов данного множества, не содержащие одинаковых членов, — обычно их называют *размещениями без повторений*. Найдем число таких наборов по правилу произведения.

Количество размещений без повторений n-элементного множества в наборе размера m $(m \leqslant n)$ равно

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

В частности,

Количество размещений без повторений n-элементного множества в наборе размера n, т. е. перестановок n элементов, равно $n!$.

Пример. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из 3 горизонтальных полос различных цветов, если есть материал 5 разных цветов? *Ответ*: Для верхней полосы есть 5 вариантов, после выбора цвета верхней полосы для средней останется 4 варианта и для нижней — 3, всего $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов.