Пытьев Ю.П.

Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.21
ББК 22.171
П 95

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 06-07-95006

Пытьев Ю. П. **Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 464 с. — ISBN 978-5-9221-0859-1.

В монографии рассмотрены математические и эмпирические основы теории возможностей, дана ее содержательная интерпретация и рассмотрены применения для математического моделирования, анализа и интерпретации данных, в том числе полученных в измерительном эксперименте, для оптимизации решений и т.п.

Рассмотрены применения теории возможностей в стохастических задачах проверки гипотез и точечного оценивания по схеме элементарной теории статистических решений, построена теория нечеткой идентификации и оценивания, разработаны теоретико-возможностные методы анализа и интерпретации эксперимента, построены теоретико-возможностные основы теории измерительно-вычислительных систем и т.д.

Для студентов и аспирантов физико-математических и технических специальностей, научных работников и инженеров, работающих в области математического моделирования и анализа данных.

Научное издание

ПЫТЬЕВ Юрий Петрович

ВОЗМОЖНОСТЬ КАК АЛЬТЕРНАТИВА ВЕРОЯТНОСТИ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, ПРИМЕНЕНИЕ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Е.В. Макеев*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 20.06.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 31,9. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0859-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретико-вероятностные методы широко и успешно применяются в научных исследованиях для моделирования многих аспектов неясности и неопределенности, отражающих неполноту знаний, их недостоверность, а также — случайности, нечеткости и неточности, относящихся к их содержанию. В то время как модель случайности, нечеткости и неточности естественно ассоциируются со стохастической моделью, неясность и неопределенность отражаются в частичном незнании последней [1]; возникающие в связи с этим проблемы формулируются в терминах теории статистических решений о неясных аспектах модели и о представляющих интерес характеристиках объекта исследования [7, 9, 15, 19, 20, 47].

Вместе с тем теоретико-вероятностные методы де-факто оказались неэффективными при моделировании сложных физических, технических, социальных и экономических объектов, субъективных суждений и т. д. Этим объясняется повышенный интерес к невероятностным моделям случайности, нечеткости и неопределенности, характерный для 60–70-х гг. Субъективная вероятность Севеджа [91] как мера неуверенности субъекта, суждения которого удовлетворяют определенным условиям «рациональности»; верхние и нижние вероятности Демпстера [61, 62], характеризующие неполноту наблюдений и отражающие неопределенность в теории вероятностей, моделируемую многозначными отображениями; тесно связанные с емкостью Шоке [56] правдоподобие и доверие Шеффера [93] в теории принятия решений, обобщающие конструкции Демпстера, и, наконец, возможность Заде [105], основанная на его теории нечетких множеств [104], — далеко не полный перечень фундаментальных математических работ, ориентированных на моделирование случайности, нечеткости и неопределенности невероятностными методами. Следует также отметить возможность Шейкла [92] в его теории принятия решений, а также возможность и правдоподобие, определенные в терминах неопределенных нечетких множеств и мер автором настоящей книги [42, 87], см. также публикации [57–59, 64, 65, 68, 70, 75, 95, 99, 103].

Причины неэффективности вероятностных методов обусловлены многими факторами. Во-первых, названные объекты зачастую просто не имеют хорошо определенной стохастической компоненты, а в тех

---

[1] Неопределенность возникает и при точно известной стохастической модели наблюдений, если речь идет о предсказании их результатов.

случаях, когда ее удается выделить, возникают серьезные проблемы с эмпирическим построением и проверкой адекватности ее теоретико-вероятностной модели. Основная причина возникающих проблем в том, что для эмпирического построения теоретико-вероятностной модели сложного объекта, ра́вно как и для ее верификации, требуются большие объемы наблюдений, которые в конечном счете, как правило, оказываются неполными, неточными и противоречивыми. Дело прежде всего в том, что для их получения обычно требуется время, в течение которого объект и его окружение заметно эволюционируют, вероятностные характеристики объекта, которые должны быть оценены, существенно изменяются, а их оценки, естественно, оказываются неадекватными. Во-вторых, даже если стохастическая природа объекта и его «стационарность» не вызывают сомнений, эмпирическое построение с приемлемой точностью его вероятностной модели может оказаться нереализуемым из-за слишком большого объема необходимых наблюдений, а, в-третьих, если все трудности и окажутся преодолимыми и достаточно точная модель будет построена, она может оказаться настолько сложной, что проблемным окажется ее использование на практике [1]).

Рассматриваемый в монографии вариант теории возможностей существенно лучше, чем теория вероятностей, приспособлен для моделирования упомянутых выше, в том числе стохастических, объектов. Хотя формально возможность, вообще говоря, не связана с вероятностью, схема ее построения подобна схеме построения вероятности, а поскольку возможность рассматривается как альтернатива вероятности, то некоторые аспекты ее содержательной интерпретации и приложений в монографии охарактеризованы в сравнении с интерпретацией и типичными приложениями вероятности.

§ 1. Вероятность и возможность. Эмпирическая интерпретация

[1]) Разумеется, не трудно привести примеры стохастических объектов, модели которых могут быть априори охарактеризованы математически, а эмпирически лишь уточнены и верифицированы. Вспомним, что теорию вероятностей «породили» так называемые «азартные игры». Их стохастические модели относительно просты и в процессе игры, как правило, либо не эволюционируют, либо эволюционируют по известным правилам. К этой же категории следует отнести и существенно более сложные стохастические объекты, эволюция моделей которых хорошо описывается, например, линейными разностными, дифференциальными или интегральными стохастическими уравнениями. Математические модели таких объектов могут быть эмпирически восстановлены на основе временны́х рядов наблюдений за ними, и эти же данные позволяют проверять их адекватность, см., например, [10,17,33].

Начнем с вероятности. Напомним, что если стохастический объект не изменяется с течением времени наблюдений (стационарен), то согласно законам больших чисел в достаточно длинной серии наблюдений частота каждого результата наблюдений приближается и, в известном смысле, остается близкой к его вероятности, что позволяет сколь угодно точно восстановить теоретико-вероятностную модель объекта. Но если в течение времени наблюдений стохастические свойства объекта *произвольно* изменяются, то частота каждого результата наблюдений, вообще говоря, не характеризует его вероятность, а результаты наблюдений не позволяют восстановить теоретико-вероятностную модель объекта. В то же время при известных ограничениях, допускающих в значительной степени произвольный характер эволюции стохастических свойств объекта, его теоретико-возможностная модель может быть восстановлена эмпирически, причем — почти наверное (п. н.) безошибочно, на основе конечного числа наблюдений, см. гл. 2, 3. Этот факт позволяет существенно расширить класс стохастических объектов, математические модели которых могут быть построены эмпирически.

В этой монографии представлена точка зрения на возможность, согласно которой последняя, как и вероятность, является мерой, определяемой моделируемыми свойствами объекта исследования, значения которой полностью *упорядочивают шансы проявлений* этих свойств.

Рассматриваемая в книге теория возможностей наследует основные понятия, конструкции и терминологию теории вероятностей. В частности, фундаментальным понятиям вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$, пространства Ω элементарных событий $\omega \in \Omega$, σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, называемых событиями, и вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{A} \to$ $\to [0, 1]$ в теории возможностей соответствуют пространство с возможностью $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, пространство Ω элементарных событий $\omega \in \Omega$, σ-алгебра $\mathcal{A}$, как правило, совпадающая с классом $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω, и возможность $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{A} \to [0, 1]$. Как и в теории вероятностей «двойная» терминология, согласно которой $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ и $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ суть модели стохастического и соответственно нечеткого экспериментов [1]) (испытаний), «элементы $\mathcal{A}$ — подмножества Ω — события», «точки Ω — элементарные события», определяет два аспекта как вероятности, так и возможности, а именно — как формальных мер на $\mathcal{A}$ и как характеристик реальных событий, включающих их (Pr и P) эмпирические интерпретации.

Как известно, эмпирическая интерпретация вероятности, называемая статистической (или событийно-частотной), основана на следующих фактах, известных как законы больших чисел (З. Б. Ч.) [51]. Пусть $\nu^{(N)}(A)$ — частота события $A \in \mathcal{A}$ в серии N взаимно неза-

[1]) Стохастический и нечеткий эксперименты и их модели обозначены $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ или $Э(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ и, соответственно, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ или $Э(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

висимых испытаний $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)^N$, тогда вероятность любого уклонения частоты $\nu^{(N)}(A)$ любого исхода $A \in \mathcal{A}$ от его вероятности $\Pr(A)$ стремится к нулю при $N \to \infty$. Точнее [1] $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \Pr{}^{\infty}(|\nu^{(N)}(A) - \Pr(A)| > \varepsilon) = 0 \tag{1.1}$$

(слабый З. Б. Ч.). Более того, $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{N\to\infty} \Pr{}^{\infty}(\sup_{n\geqslant N} |\nu^{(n)}(A) - \Pr(A)| > \varepsilon) = 0, \tag{1.2}$$

т. е. частота $\nu^{(n)}(A)$ с увеличением n приближается и остается близкой к $\Pr(A)$, ибо согласно (1.2) $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{A}$ с $\Pr^{\infty}$-вероятностью единица (п. н.) $|\nu^{(n)}(A) - \Pr(A)| > \varepsilon$ лишь для конечного числа $n = 1, 2, \ldots$ испытаний (усиленный З. Б. Ч.).

Законы больших чисел определяют эмпирическую событийно-частотную интерпретацию вероятности, согласно которой вероятность любого исхода стохастического эксперимента Э сколь угодно точно оценивает его частоту в достаточно длинной последовательности взаимно независимых испытаний, и, наоборот, при этих условиях частота любого исхода Э сколь угодно точно оценивает его вероятность, а, следовательно, — и стохастическую модель Э.

В этой монографии возможность $\mathrm{P}(\cdot)$, как уже было сказано, является характеристическим свойством эксперимента, определенным как мера на $\mathcal{A}$, значение $\mathrm{P}(A)$ которой при каждом испытании оценивает шанс любого исхода $A \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *по сравнению* с шансами любых других исходов Э. В отличие от известных моделей возможности, см., например, [27, 29, 57–59, 66, 81, 95, 103, 105], в данном случае конкретные численные значения возможностей исходов Э не важны, имеет смысл лишь их *упорядоченность,* см. § 17 гл. 1 и [35]. Более того любые возможности $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$, $\mathrm{P}'(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ считаются эквивалентными, если $\exists \gamma, \gamma' \in \Gamma\ \forall A \in \mathcal{A}\ \gamma * \mathrm{P}(A) \triangleq \gamma(\mathrm{P}(A)) = \gamma'(\mathrm{P}'(A)) \triangleq \gamma' * \mathrm{P}'(A)$, где $\gamma(\cdot), \gamma'(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ непрерывные строго монотонно возрастающие функции, $\gamma(0) = \gamma'(0) = 0, \gamma(1) = \gamma'(1) = 1$, Γ — класс всех таких функций, являющийся группой относительно их композиции $\gamma \circ \gamma'(a) \triangleq \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$. Соответствующие пространства с возможностями $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ и $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}')$ определяют эквивалентные модели одного и того же нечеткого эксперимента.

Эмпирическую интерпретацию возможности рассмотрим в сравнении с интерпретацией вероятности, основываясь на стохастическом моделировании возможности, характерном для теоретико-возможностной

[1] Условия (1.1) определяют сходимость $\nu^{(N)}(A)$ к $\Pr(A)$ по $\Pr^{\infty}$-вероятности, условие (1.2) определяет сходимость $\nu^{(N)}(A)$ к $\Pr(A)$ с $\Pr^{\infty}$-вероятностью единица (почти наверное, п. н.). $\Pr^{\infty}$-вероятность, определенная на борелевских множествах бесконечных последовательностей испытаний; подробнее см. § 1, гл. 3.

модели, имеющей стохастический прототип [1]). Для простоты ограничимся случаем дискретного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, распределение [2]) $\mathrm{pr}_i \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ априори упорядочено по невозрастанию, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1$, и для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{Pr}(A) \triangleq \sum\limits_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i$. Класс всех таких вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ обозначим $\mathbb{P}\mathrm{r}$. В этом случае распределение $\mathrm{p}_i \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, возможности $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ упорядочено аналогично распределению вероятности, $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, ее значения определяются согласно равенству $\mathrm{P}(A) \triangleq \sup\limits_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{p}_i$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, [35]. Класс всех таких возможностей $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ обозначим $\mathbb{P}$.

В § 4 и § 5 гл. 2 показано, что нечеткий эксперимент $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ можно моделировать стохастическим экспериментом $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, построив вероятность $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ так, чтобы возможность $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ была с ней *максимально согласована* ($\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$) [3]). Последнее означает, что каждый исход $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $Э(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ можно интерпретировать как исход $Э(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, а его возможность будет связана с его вероятностью равенством

$$\mathrm{P}(A) \triangleq \sup_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) \triangleq \widetilde{\gamma}\Big(\sum_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i\Big), \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{1.3}$$

в котором $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ — произвольная функция из известного класса [4]) $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ непрерывных на $(0,1]$ монотонно неубывающих функций, см. § 5 гл. 2.

Согласно усиленному З. Б. Ч. (1.2), если $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, то $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{Pr}(A) > 0$ $\forall \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ при $N \to \infty$ $\widetilde{\gamma}(\nu^{(N)}(A)) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{P}(A)$, но этот факт, как и любое отличное от нуля и единицы конкретное значение

---

[1]) Речь идет о стохастически измеримой возможности, см. § 2 гл. 3.

[2]) Нестандартный в русскоязычной литературе термин «распределение вероятности» используется с целью расширения «терминологического единства» теорий вероятностей и возможностей, поскольку в этой книге вероятность и возможность рассматриваются как метафизические понятия, *характеризующие объект исследования* подобно метафизическим понятиям силы, тепла и т.п. в духе пропенситивной интерпретации вероятности К. Поппера [31]. В теории вероятностей «распределение» и «вероятность» как правило — синонимы; условимся термин «распределение вероятностей (возможностей)» понимать как распределение вероятностей (возможностей) элементарных событий, значений случайного (нечеткого) элемента и т. п.

[3]) В § 5 гл. 2 построен класс $\mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$ вероятностей Pr, с каждой из которых возможность P максимально согласована. Здесь речь идет о любой $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$ — обозначение для максимальной согласованности P с Pr; возможность P называется Pr-стохастически измеримой.

[4]) Класс $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ определяется любой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$.

возможности $\mathrm{P}(A)$, в силу произвольности[1] функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ в (1.3), не может служить основанием для эмпирической интерпретации возможности. В рассматриваемом случае стохастического моделирования возможности эмпирическую (событийно-частотную!) интерпретацию последней определяет другой факт, обусловленный З. Б. Ч. (1.2). А именно, для любых событий $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, таких, что $\mathrm{Pr}(A) \geqslant \mathrm{Pr}(B) > 0$, для любой функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N = N(\varepsilon, A, B, \widetilde{\gamma}(\cdot))$, такое, что для всех $n > N$

$$\widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) - \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(B)) - \varepsilon \overset{\text{п. н.}}{<} \widetilde{\gamma}(\nu^{(n)}(A)) - \widetilde{\gamma}(\nu^{(n)}(B)) \overset{\text{п. н.}}{<} \overset{\text{п. н.}}{<} \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) - \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(B)) + \varepsilon.$$

Поэтому, если $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) > \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(B)) = \mathrm{P}(B)$, то, выбрав $\varepsilon \in \in (0, \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) - \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(B)))$, найдем, что[2]

$$\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B) \Rightarrow \widetilde{\gamma}(\nu^{(n)}(A)) \overset{\text{п. н.}}{>} \overset{\text{п. н.}}{>} \widetilde{\gamma}(\nu^{(n)}(B)) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \overset{\text{п. н.}}{>} \nu^{(n)}(B) \tag{1.4}$$

для всех $n > N$, а если $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(B)) = \mathrm{P}(B)$, то $\forall \varepsilon > 0$ почти наверное $|\widetilde{\gamma}(\nu^{(n)}(A)) - \widetilde{\gamma}(\nu^{(n)}(B))| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

Иначе говоря, *упорядоченность возможностей любых исходов Э п. н. точно прогнозирует такую же упорядоченность значений любой функции* $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ *их частот в достаточно длинной последовательности взаимно статистически независимых испытаний.*

§ 2. Эмпирическое восстановление Pr-стохастически измеримой возможности

На самом деле наблюдения за частотами элементарных событий при определенных условиях позволяют восстановить теоретико-возможностную модель Э. В качестве примера рассмотрим стохастическую модель Э, в которой $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_m\}$, и известно, что вероятности $\mathrm{pr}_i \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, m$, априори упорядочены согласно условию

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{pr}_m > 0, \quad \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_m = 1, \tag{2.1}$$

а в остальном произвольны.

Искомое распределение возможностей $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, k$, должно априори удовлетворять аналогичному условию упорядоченности

$$1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{p}_m > \mathrm{p}_{m+1} = 0. \tag{2.2}$$

---

[1] Если $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$, то $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}) = \{\gamma \circ \widetilde{\gamma}(\cdot), \gamma(\cdot) \in \Gamma\}$, где $\gamma \circ \widetilde{\gamma}(a) \triangleq \triangleq \gamma(\widetilde{\gamma}(a))$, $a \in [0, 1]$.

[2] Чем A возможнее, тем оно чаще происходит, тем выше его шанс произойти при каждом испытании.

В §5 гл. 2 показано, что каждая *конкретная упорядоченность* возможностей в (2.2), определяющая соответствующий класс эквивалентных возможностей P, при условии максимальной согласованности P с Pr (т.е. при условии $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) \subset \mathbb{P}\mathrm{r}, \mathrm{P} \in \mathbb{P}$) определяется следующими соотношениями, связывающими *ее* с *конкретными значениями* вероятностей в (2.1),

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i \triangleq \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \\ &e_i = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i \leqslant 1, \qquad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\mathrm{p}_{m+1} \triangleq 0$ и всегда $e_m = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_m > 0 \Longleftrightarrow f_m > 1$.

Согласно условиям в (2.3) каждая конкретная упорядоченность в (2.2), заданная двоичным числом [1] $e = 0.e_1 \ldots e_m \in (0, 1 - 2^{-m}]$, определяет класс $\mathbb{P}_{(e)}$ *эквивалентных* возможностей, распределения которых одинаково упорядочены согласно e, и класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ вероятностей, распределения которых удовлетворяют условиям в (2.3), причем согласно (2.3) любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ максимально согласована с каждой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0, 1 - 2^{-m}]$, классы $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0, 1 - 2^{-m}]$, суть выпуклые подмножества $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0, 1-2^{-m}]} \mathbb{P}_{(e)}, \tag{$*$}$$

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in (0, 1-2^{-m}]} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}, \tag{$**$}$$

где символ $\bigcup\limits_{e \in (0, 1-2^{-m}]}$ означает объединение по всем $2^m - 1$ значениям $e = 0.e_1 \ldots e_m$, $e_i = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m$, исключая $e = 0.0 \ldots 0$, см. рис. 2.1 (подробнее см. рис. 6.1 гл. 2).

Пусть $\nu_i^{(n)} = \nu^{(n)}(\{\omega_i\})$ — частота элементарного события ω_i в последовательности n взаимно независимых испытаний, $i = 1, \ldots, m$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как для каждого $i = 1, \ldots, m$ при $n \to \infty$ $\nu_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathrm{pr}_i$, то $(\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}) \xrightarrow{\text{п.н.}} (\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_m)$ при $n \to \infty$. А так как в (2.3) $f_i = f_i(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_m)$ — непрерывная функция в каждой точке $(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_m)$ множества, определенного условиями (2.1), то при $n \to \infty$

$$(\widehat{f}_1^{(n)}, \ldots, \widehat{f}_m^{(n)}) \xrightarrow{\text{п.н.}} (f_1, \ldots, f_m), \tag{2.4}$$

где

$$\widehat{f}_i^{(n)} \triangleq \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Если к условиям (2.1) добавить *условия регулярности* вероятности Pr:

$$f_i \neq 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

[1] $(0, 1 - 2^{-m}]$ — обозначение для $2^m - 1$ значений $e = 0.e_1 \ldots e_m$, $e_i = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m$, $e \neq 0.0 \ldots 0$.

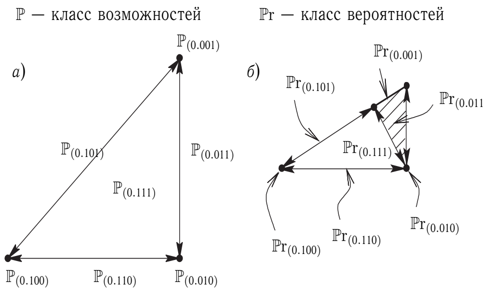

Рис. 2.1. Для случая $m = 3:$ *а*) «треугольник возможностей» $\mathbb{P}:\ 1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant 0$, и семь классов распределений $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}_{(0.010)} \cup \ldots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ $(*)$ и определяющих семь попарно различных неприводимых классов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ эквивалентных возможностей. *б*) «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}:\ \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1$, и семь его подмножеств-прообразов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение $(**)$. При этом $\mathbb{P}_{(0.100)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}$; …, $\mathbb{P}_{(0.111)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$; классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.100)}$, …, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, образуют разбиение $(**)$ треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Всем вероятностям $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ соответствует единственная с точностью до эквивалентности возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $e = 0.100, \ldots, 0.111$

превращающие соотношения (2.3) в

$$
\begin{aligned}
&e_i = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i > 1,\\
&e_i = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i < 1, \qquad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

то при условиях (2.1), (2.6) сходимость в (2.4) означает, что при $n \to \infty$ будет п. н. безошибочно определен класс $\mathbb{P}_{(e)}$ эквивалентных возможностей и тем самым восстановлена теоретико-возможностная модель Э, максимально согласованная с (неизвестной) теоретико-вероятностной моделью Э, контролирующей наблюдения.

Заметим, что при условии (2.5) теоретико-возможностная модель Э будет восстановлена п. н. безошибочно на основе *конечного числа наблюдений*, в то время как на основе любого конечного числа наблюдений теоретико-вероятностная модель Э может быть восстановлена лишь приближенно, см. § 2 гл. 3.

Заметим также, что конечность Ω в данном случае не принципиальна. Действительно, $\mathrm{P}(A) \triangleq \sup\limits_{i:w_i \in A} \mathrm{p}_i \geqslant \sup\limits_{i:w_i \in B} \mathrm{p}_i \triangleq \mathrm{P}(B)$ для любых $A, B \in \Omega$, если и только если $i(A) \triangleq \min\limits_{\omega_i \in A} i \leqslant \min\limits_{\omega_i \in B} i \triangleq i(B)$, поэтому упорядоченность $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(B)$ будет определена, как только будет определена конкретная упорядоченность $\mathrm{p}_{i(A)} \geqslant \dots \geqslant \mathrm{p}_{i(B)}$, т. е. почти наверное на основе конечного числа наблюдений.

Заметим, наконец, что в общем случае конечного Ω условие (2.1) следует заменить на

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \dots \geqslant \mathrm{pr}_m \geqslant 0, \ \ \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_m = 1, \tag{2.1*}$$

а условие регулярности (2.5) — на более общее:

$$\begin{gathered}\text{если } \mathrm{pr}_m > 0, \text{ то } f_1 \neq 1, \ldots, f_{m-1} \neq 1;\\ \text{если } \exists j \in \{1,\ldots,m\} \ \ \mathrm{pr}_1 \geqslant \dots \geqslant \mathrm{pr}_{j-1} > 0 = \mathrm{pr}_j = \ldots = \mathrm{pr}_m, \text{ то}\\ f_1 \neq 1, \ldots, f_{j-1} \neq 1 = f_j = \ldots = f_m.\end{gathered} \tag{2.5*}$$

§ 3. Эмпирическое восстановление и интерпретация Pr^1-, …, Pr^k-стохастически измеримой возможности

Представим себе теперь, что в последовательности взаимно независимых испытаний вероятность может изменяться от испытания к испытанию, и рассмотрим последовательность взаимно независимых испытаний $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1)$, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_2), \ldots$ Стохастической моделью последовательности n таких испытаний является вероятностное пространство $(\Omega \times \ldots \times \Omega, \mathcal{P}(\Omega \times \ldots \times \Omega), \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n)$. Определим на нем случайные величины $\xi_i^A(\cdot) : \Omega \to \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\xi_i^A(\omega^i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega^i \in A, \\ 0, & \text{если } \omega^i \in \Omega \backslash A, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ — некоторое событие, его частоту обозначим $\nu^{(n)}(A) = \nu^{(n)}(A, \omega^1, \ldots, \omega^n) \triangleq (\xi_1^A(\omega^1) + \ldots + \xi_n^A(\omega^n))/n$.

В рассматриваемом случае усиленный З. Б. Ч. (1.2) формулируется следующим образом: $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^\infty \Big(\sup_{n \geqslant N} \Big|\nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A)\Big| > \varepsilon \Big) = 0. \tag{1.2*}$$

Пусть в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ лишь конечное число k различных вероятностей, скажем, $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, и A — некоторое событие. Тогда в (1.2*)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) \mathrm{Pr}^s(A) \triangleq \mathrm{Pr}_{(n)}(A), \tag{3.1}$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность Pr^s встречается в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \ldots, \mathrm{Pr}_n$, $s = 1, \ldots, k$, $n_1/n + \ldots + n_k/n = 1$. Поскольку с увеличением n часто́ты n_s/n, $s = 1, \ldots, k$, изменяются, вообще говоря, произвольно, оставаясь в пределах отрезка $[0, 1]$ и удовлетворяя условию $n_1/n + \ldots + n_k/n = 1$, значение $\mathrm{Pr}_{(n)}(A)$ *произвольно* «блуждает» по отрезку [1] $\Big[\min\limits_{1\leqslant s\leqslant k}\mathrm{Pr}^s(A),\ \max\limits_{1\leqslant s\leqslant k}\mathrm{Pr}^s(A)\Big]$ и за ним при $n\to\infty$ согласно З. Б. Ч. (1.2*) все более точно следует частота $\nu^{(n)}(A)$.

В этом случае *знание вероятностей* $\mathrm{Pr}^1(A),\ldots,\mathrm{Pr}^k(A)$ *не позволяет оценить частоту* $\nu^{(n)}(A)$, *а наблюдение за частотой* $\nu^{(n)}(A)$, $n = 1,2,\ldots$, *не позволяет восстановить стохастическую модель наблюдений.* Вместе с тем, если вероятности $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ таковы, что *существует* [2] *возможность* P, *максимально согласованная с каждой вероятностью* $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ (*т. е.* $\mathrm{Pr}^s \approx> \mathrm{P}$, $s = 1,\ldots,k$; *возможность* P *называется* Pr^1-, …, Pr^k-*стохастически измеримой*), *то при дополнительном условии регулярности* (3.8) *вероятностей* $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ *класс* $\mathbb{P}_{(e)}$ *эквивалентных* P *возможностей можно восстановить п. н. безошибочно на основе конечного числа наблюдений и любой возможности из* $\mathbb{P}_{(e)}$ *дать событийно-частотную интерпретацию, согласно которой, как и в случае неменяющейся вероятности, если* $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$, *то существует число* $N(A,B)$, *такое что* $\nu^{(n)}(A) \overset{п.н.}{>} \nu^{(n)}(B)$ *для всех* $n > N(A,B)$.

Рассмотрим вначале событийно-частотную интерпретацию возможности. Заметим, что

$$\nu^{(n)}(A) = \sum_{s=1}^{k}\frac{n_s}{n}\cdot\nu^{(n_s)}(A), \tag{3.2}$$

где $\nu^{(n_s)}(A)$ — частота события A в подпоследовательности последовательности n испытаний, в которой исход испытания контролируется вероятностью Pr^s, причем согласно усиленному З. Б. Ч. (1.2) при $n\to\infty$

$$\nu^{(n_s)}(A) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathrm{Pr}^s(A), \quad s = 1,\ldots,k. \tag{3.3}$$

Условие максимальной согласованности P с $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ означает, что $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $s = 1,\ldots,k$, и, следовательно, существуют функции

---

[1] При каждом $n = 1,2,\ldots$ $\mathrm{Pr}_{(n)}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ — вероятность. Если вероятности $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ появляются в последовательности $\mathrm{Pr}_1,\mathrm{Pr}_2,\ldots$ с определенной закономерностью, например, с вероятностями $\mathrm{pr}^1,\ldots,\mathrm{pr}^k$, $\mathrm{pr}^1+\ldots+\mathrm{pr}^k = 1$, то речь идет о байесовской модели наблюдений, в которой при $n\to\infty$ $n_s/n\to\mathrm{pr}^s$, $s = 1,\ldots,k$, и $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$ $\sum\limits_{s=1}^{k}(n_s/n)\mathrm{Pr}^s(A)\to\sum\limits_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}^s(A)\mathrm{pr}^s$. В этом случае при $n\to\infty$ $\nu^{(n)}(A)\xrightarrow{\text{п.н.}}\mathrm{Pr}(A)\triangleq\sum\limits_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}^s(A)\mathrm{pr}^s$, см. также замечание 1.2 в гл. 6. В связи с проблемой эмпирического восстановления возможности этот случай не представляет интереса.

[2] Иначе говоря, пусть $\exists e\in(0,1)$ $\forall s = 1,\ldots,k$ $\mathrm{Pr}^s\in\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \Rightarrow \forall\mathrm{P}\in\mathbb{P}_{(e)}$, $\forall\mathrm{Pr}\in\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $\mathrm{Pr}\approx>\mathrm{P}$, в частности, $\forall s = 1,\ldots,k$ $\forall\mathrm{P}\in\mathbb{P}_{(e)}$ $\mathrm{Pr}^s\approx>\mathrm{P}$.

$\widetilde{\gamma}_s(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}^s)$, $s = 1, \ldots, k$, такие, что для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}_1(\mathrm{Pr}^1(A)) = \ldots = \widetilde{\gamma}_k(\mathrm{Pr}^k(A))$. Поэтому согласно сходимостям в (3.3) при $n \to \infty$ $\widetilde{\gamma}_s(\nu^{(n_s)}(A)) \xrightarrow{\text{п.н.}} \widetilde{\gamma}_s(\mathrm{Pr}^s(A)) = \mathrm{P}(A)$, $s = 1, \ldots, k$, и, следовательно, если $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$, то $\mathrm{Pr}^s(A) > \mathrm{Pr}^s(B)$, $s = 1, \ldots, k$, а это означает, что существует число $N(A, B)$, такое, что с вероятностью единица $\nu^{(n_s)}(A) > \nu^{(n_s)}(B)$ для всех $n > N(A, B)$ и $s = 1, \ldots, k$. Отсюда согласно равенству (3.2) следует, что как в (1.4) и *в рассматриваемом случае изменяющейся вероятности неравенство* $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$ *п. н. влечет неравенство* $\nu^{(n)}(A) > \nu^{(n)}(B)$ *для всех* $n > N(A, B)$.

Чтобы показать, что при условии регулярности (3.8) *данные конечного числа наблюдений позволяют с вероятностью единица безошибочно восстановить теоретико-возможностную модель* Э, вернемся к рассмотренному примеру стохастической модели Э, в которой $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_m\}$. Пусть вероятности $\mathrm{Pr}^s\big(\{\omega_i\}\big) \triangleq \mathrm{pr}_i^s$, $i = 1, \ldots, m$, для каждого $s = 1, \ldots, k$ упорядочены согласно условию

$$\mathrm{pr}_1^s \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{pr}_m^s > 0, \quad \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_m^s = 1, \tag{3.4}$$

и, как и выше, существует возможность P, максимально согласованная с каждой вероятностью Pr^s, $s = 1, \ldots, k$, т. е. пусть $\exists \mathrm{P} \in \mathbb{P}\ \forall s = 1, \ldots, k\ \mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$. Это означает, что упорядоченность распределения $\mathrm{p}_1 \ldots \mathrm{p}_m$ возможности P и значения распределений вероятностей $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ в (3.4) удовлетворяют условиям [1]): для всех $s = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i^s \triangleq \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^s + 2\mathrm{pr}_i^s > 1, \\ &e_i = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i^s \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.3*}$$

Условия (3.4) и (2.3*) означают, что существует такое $e = 0.e_1 \ldots e_m$, что $\mathrm{Pr}^{(s)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s = 1, \ldots, k$, любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ максимально согласована с каждой вероятностью Pr^s, $s = 1, \ldots, k$, и, как следствие, согласована с каждой вероятностью $\mathrm{Pr} = \sum\limits_{s=1}^{k} \mu_s \mathrm{Pr}^{(s)}$, $\mu_s \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, k$, $\sum\limits_{s=1}^{k} \mu_s = 1$, поскольку если $\mathrm{pr}_i = \sum\limits_{s=1}^{k} \mu_s \mathrm{pr}_i^s$, $i = 1, \ldots, m$, то согласно (2.3*)

$$\begin{aligned} &\forall s = 1, \ldots, k \quad f_i^s > 1 (\leqslant 1) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow f_j \triangleq \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j > 1 (\leqslant 1), \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пусть в (1.2*), (3.1), (3.2) $A = \{\omega_j\}$, так что $\mathrm{Pr}^s(A) = \mathrm{Pr}^s(\{\omega_j\}) \triangleq \mathrm{pr}_j^s$, $\nu^{(n_s)}(A) = \nu^{(n_s)}(\{\omega_j\}) \triangleq \nu_j^{(n_s)}$, $s = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots$

[1]) Условия (2.3*) для каждого $s = 1, \ldots, k$ определяют Pr^s-стохастическую измеримость возможности P, см. § 2 гл. 3.

$\ldots, m$, и вместо (3.1), (3.2)

$$\mathrm{pr}_j^{(n)} \triangleq \mathrm{Pr}_{(n)}(\{\omega_j\}) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\mathrm{pr}_j^s, \quad j = 1,\ldots,m; \tag{3.1*}$$

$$\nu_j^{(n)} \triangleq \nu^{(n)}(\{\omega_j\}) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\nu_j^{(n_s)}, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{3.2*}$$

Так как при $n \to \infty$ для всех $s = 1,\ldots,k$

$$\big(\nu_1^{(n_s)},\ldots,\nu_m^{(n_s)}\big) \xrightarrow{\text{п.н.}} (\mathrm{pr}_1^s,\ldots,\mathrm{pr}_m^s),$$

то согласно (3.1*), (3.2*) при $n \to \infty$

$$\nu_j^{(n)} - \mathrm{pr}_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad j = 1,\ldots,m,$$

поскольку $\forall \varepsilon > 0 \ \ \sum\limits_{s=1}^{k} (n_s/n)\big|\nu_j^{(n_s)} - \mathrm{pr}_j^s\big| < \varepsilon$ как только $\big|\nu_j^{(n_s)} - \mathrm{pr}_j^s\big| <$ $< \varepsilon$, $j = 1,\ldots,m$. Наконец, при $n \to \infty$

$$\widehat{f}_j^{(n)} - f_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3.6}$$

где

$$f_j^{(n)} \triangleq \mathrm{pr}_1^{(n)} + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^{(n)} + 2\mathrm{pr}_j^{(n)}$$
$$\widehat{f}_j^{(n)} \triangleq \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{j-1}^{(n)} + 2\nu_j^{(n)}, \qquad j = 1,\ldots,m,$$

поскольку функция $f_j(\overline{\mathrm{pr}}_{(j)}) \triangleq \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j$, $\overline{\mathrm{pr}}_{(j)} \triangleq (\mathrm{pr}_1,\ldots$ $\ldots,\mathrm{pr}_j) \in \Big\{\sum\limits_{s=1}^{k} \lambda_s \overline{\mathrm{pr}}_{(j)}^s,\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = 1,\ldots,k,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1\Big\} \triangleq \mathcal{D}_j$, равномерно непрерывна на $\mathcal{D}_j$, $j = 1,\ldots,m$.

Согласно (3.1*), (3.5), если для каждого $s = 1,\ldots,k$

$$f_j^s \triangleq \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^s + 2\mathrm{pr}_j^s \leqslant 1 \quad (f_j^s > 1), \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3.7}$$

то для всех $n = 1,2,\ldots$ в (3.6) $f_j^{(n)} \leqslant 1$ ($f_j^{(n)} > 1$), $j = 1,\ldots,m$, а если выполнены условия регулярности

$$f_j^s \neq 1, \quad s = 1,\ldots,k, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3.8}$$

вероятностей $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$, т.е. если в (3.7) $f_j^s < 1$ ($f_j^s > 1$), $s = 1,\ldots$ $\ldots,k$, $j = 1,\ldots,m$, то и в (3.6) $f_j^{(n)} < 1$ ($f_j^{(n)} > 1$), $j = 1,\ldots,m$. Это означает, что в (3.6) $f_j^{(n)}$, $j = 1,\ldots,m$, при каждом $n = 1,2,\ldots$ содержатся в $[0,1)$ или в $(1,2)$ с некоторыми независящими от n окрестностями, поэтому из сходимости в (3.6) следует, что при условиях (3.8) *теоретико-возможностная модель Э восстанавливается почти наверное безошибочно на основе конечного числа наблю-*

дений значений $\widehat{f}_j^{(n)}$, $j=1,\ldots,m$. Дело в том, что поскольку при $n\to\infty$ $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\big|\widehat{f}_j^{(n)}-f_j^{(n)}\big|\xrightarrow{\text{п.н.}}0$, то и $\widehat{f}_j^{(n)}$, $j=1,\ldots,m$, при всех достаточно больших n окажутся почти наверное в $[0,1)$ или $(1,2)$ вместе с соответствующими $f_j^{(n)}$, $j=1,\ldots,m$; этот вывод верен и в более общем случае (2.1*), (2.5*), подробнее см. §2 гл. 3.

§ 4. Теоретико-возможностное моделирование как расширение теоретико-вероятностного

Приведенные результаты иллюстрируют одно из принципиальных отличий моделирования случайности теоретико-вероятностными и теоретико-возможностными методами: *в то время как при эмпирическом построении теоретико-вероятностной модели* $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{Pr})$ *стохастического объекта последняя должна быть неизменна в течение всего времени наблюдений, при эмпирическом построении теоретико-возможностной модели* $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$ *этого же объекта его теоретико-вероятностная модель во время наблюдений может произвольно эволюционировать в пределах одного из классов* $\big\{(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr}\in\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\big\}$, $e\in[0,1]$. *Это отличие* [1] *существенно расширяет класс стохастических объектов, математические модели которых могут быть построены эмпирически, расширяет за счет включения стохастических объектов, теоретико-возможностные модели которых могут быть построены эмпирически, а теоретико-вероятностные — нет.*

Это расширение для случая $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ можно наглядно проиллюстрировать на рис. 2.1. Стохастическая модель объекта, которую можно оценить эмпирически, определяется точкой в треугольнике 2.1 б), неподвижной в течение всего времени наблюдений. Семь неприводимых нечетких моделей, определяемых классами возможностей $\mathbb{P}_{(e)}$, $e=0.001,\ldots,0.111$, отмеченными на треугольнике 2.1 а), определяются семью подмножествами вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e=0.001,\ldots$ $\ldots,0.111$, показанными на треугольнике 2.1 б). При эмпирическом восстановлении любой из семи теоретико-возможностных моделей вероятность, контролирующая результаты наблюдений, может произвольно изменяться от наблюдения к наблюдению в пределах *одного из классов* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e=0.001,\ldots,0.111$.

Если выполнены условия регулярности (3.8), то в треугольнике 2.1 б) остаются два множества: класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ и класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ без его границы с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$. Любая из теоретико-возможностных моделей, отвечающая одному из классов $\mathbb{P}_{(0.111)}$ или $\mathbb{P}_{(0.011)}$, определится п. н. безошибочно на основе конечного числа наблюдений,

[1] Условие «устойчивости частот» для эмпирического восстановления вероятности заменяется на условие $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримости возможности P, $e\in[0,1]$.

если последние контролируются априори конечным числом различных вероятностей.

В общем случае конечного $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ условия (3.4) следует заменить на менее стеснительные

$$\mathrm{pr}_1^s \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{pr}_m^s \geqslant 0, \;\; \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_m^s = 1, \; s = 1, \ldots, k, \tag{3.4*}$$

а условия регулярности (3.8) — соответственно на более общие: для каждого $s = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} &\text{если } \mathrm{pr}_m^s > 0, \text{ то } f_1^s \neq 1, \ldots, f_{m-1}^s \neq 1; \\ &\text{если } \exists j \in \{1, \ldots, m\} \; \mathrm{pr}_1^s \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_{j-1}^s > 0 = \mathrm{pr}_j^s = \ldots = \mathrm{pr}_m^s, \\ &\quad \text{то } f_1^s \neq 1, \ldots, f_{j-1}^s \neq 1 = f_j^s = \ldots = f_m^s. \end{aligned} \tag{3.8*}$$

В таком случае в треугольнике 1б) останутся четыре подмножества $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)}$, и любая из нечетких моделей, отвечающая одному из классов $\mathbb{P}_{(0.111)}$, $\mathbb{P}_{(0.011)}$, $\mathbb{P}_{(0.100)}$ или $\mathbb{P}_{(0.011)}$, может быть восстановлена п.н. безошибочно на основе конечного числа наблюдений.

Разумеется, не следует думать, что теоретико-возможностное моделирование непременно ориентировано на исследование недоопределенных стохастических объектов. На самом деле, теоретико-возможностные модели характерны для нечетких, размытых и т. п. объектов, как раз не имеющих хорошо определенной стохастической компоненты, см., например, [66]. Вместе с тем следует отметить, что теоретико-возможностное моделирование оказалось весьма эффективным в областях, характерных для стохастических приложений, таких, например, как оптимальные решения, прогнозирование, анализ и интерпретация эксперимента и т. п., см. гл. 6, 7, [13] и монографию [35].

Настоящая монография является полностью переработанным и существенно дополненным аналогом книги автора [35], опыт издания которой показал устойчивый интерес к этой тематике. Представленная в этой монографии точка зрения на возможность и на ее содержательную интерпретацию отличается как от точки зрения, представленной в работах [27, 29, 57–59, 66, 95, 103], отражающих общепринятое толкование возможности, так и от точки зрения Л. А. Заде, который первым предложил и исследовал меру возможности в работе [105].

В заключение мне приятно выразить признательность моим ученикам и коллегам Е. Шалашникову, О. Мондрус, О. Фаломкиной, Д. Новицкому, А. Зубюку, А. Чуличкову и Д. Кольцову, принимавшим деятельное участие в обсуждении представленных в книге результатов и помогавшим оформить компьютерный вариант рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Идеи, лежащие в основе теории возможностей, рассматриваемой в этой книге, удобно изложить, рассматривая возможность как альтернативную вероятности математическую модель случайности, сравнивая основные математические конструкции теорий вероятностей и возможностей, их содержательную интерпретацию и прикладную ориентацию.

Рассмотрим стохастический эксперимент Э, математической моделью которого является дискретное вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr})$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — конечное или счетное множество элементарных исходов Э (элементарных событий [1])), $\mathcal{P}(\Omega)$ — σ-алгебра всех подмножеств Ω, представляющих все мыслимые результаты (исходы) Э, или, как принято говорить, — результаты испытаний, события [2]), $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ — вероятность, заданная своими значениями на элементарных исходах $\mathrm{pr}_i \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = 1$, определяющими вероятность любого результата испытаний $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ равенством

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i. \tag{4.1}$$

Функцию $\mathrm{pr}_{\cdot} : \{1, 2, \ldots\} \to [0,\ 1]$, как и ее значения $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, назовем распределением вероятностей элементарных исходов и распределением [3]) вероятности Pr.

В рамках эксперимента Э невозможно дать содержательную интерпретацию значения вероятности $\mathrm{Pr}(A)$ и указать способ его эмпирического определения. Для этого следует обратиться к эксперименту Э^n, который можно представить себе как n копий Э, выполненных взаимно независимо. Эксперимент Э^n принято называть последовательностью n независимых испытаний.

Математической моделью Э^n, т. е. n раз независимо воспроизведенного Э, является вероятностное пространство $(\Omega^n,\, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)})$ — n-я степень $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr})$, где Ω^n — множество всех последовательностей

[1]) Пространство элементарных событий Ω отождествляется с выборочным пространством элементарных исходов Э, если не оговорено противное.

[2]) Любое событие $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ состоит из тех и только тех элементарных событий, каждое из которых влечет A.

[3]) См. сноску [1]) на стр. 10 предисловия.

$(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n})$, $\omega_{i_k} \in \Omega$, $k = 1, \ldots, n$, описывающих элементарные исходы $Э^n$, $\mathcal{P}(\Omega^n)$ — σ-алгебра всех подмножеств Ω^n, представляющих все мыслимые результаты $Э^n$ (события), $\Pr^{(n)}$ — вероятность, заданная на множестве всех элементарных исходов $Э^n$ равенствами

$$\Pr^{(n)}(\{(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n})\}) = \mathrm{pr}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_{i_n}, \qquad (\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) \in \Omega^n, \quad (4.2)$$

определяющими взаимную независимость испытаний и вероятность любого результата (исхода) $A^{(n)} \in \mathcal{P}(\Omega^n)$ эксперимента $Э^n$ равенством

$$\Pr^{(n)}(A^{(n)}) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n:\\ (\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_n}) \in A^{(n)}}} \mathrm{pr}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_{i_n}.$$

Пусть A — некоторый исход Э,

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}, \quad \omega \in \Omega,$$

— индикаторная функция A и $\nu_A^{(n)}(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(\omega_{i_k})$, $(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) \in \Omega^n$, — случайная величина на $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \Pr^{(n)})$, определяющая частоту $\nu_A^{(n)}$ исхода A в последовательности n независимых испытаний.

Как известно [1]), вероятность любого отклонения частоты $\nu_A^{(n)}$ от вероятности $\Pr(A)$ с увеличением n стремится к нулю, точнее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\Pr^{(n)}((\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) \in \Omega^n, \quad |\nu_A^{(n)}(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) - \Pr(A)| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Этот факт лежит в основе так называемой частотной интерпретации вероятности, ее статистического толкования, согласно которому в достаточно длинной последовательности независимых повторений Э частота любого его исхода A оценивается вероятностью A, а если последняя неизвестна, то частота A является ее эмпирической оценкой. Следовательно, если стохастическая модель Э неизвестна, то, наблюдая за исходами $Э^n$, ее можно сколь угодно точно оценить, если n достаточно велико. Подчеркнем, что значение $\Pr(A)$ следует рассматривать как сколь угодно точно прогнозируемое значение *частоты* исхода A в достаточно длинной серии независимых испытаний, но не как меру предвидения или *возможности* исхода *A при каждом испытании* [2]).

Что можно сказать по поводу предсказания исходов Э, если стохастической моделью Э является вероятностное пространство

---

[1]) Слабый закон больших чисел (З. Б. Ч.), подробнее см. § 1 гл. 3.

[2]) На моделирование модальностей индуктивных суждений типа «вероятно», «возможно», «необходимо» и т. п. ориентированы математические теории индуктивных [77] и субъективных [9, 78, 91] вероятностей.

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$? В частности, что можно сказать о возможностях исходов Э в этом случае, — об их шансах? Ясно лишь, что при любом определении возможности p_i исхода $\omega_i \in \Omega$ как значения меры (возможности), *при каждом испытании* оценивающей, обусловленный свойствами Э, шанс его исхода ω_i *в сравнении с шансами* всех других его элементарных исходов, естественно считать, что $\mathrm{p}_i \geqslant \mathrm{p}_j$, если $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Индуктивная мотивация в данном случае такова: чем больше вероятность pr_i исхода ω_i, тем чаще ω_i встретится в длинной серии испытаний, и, следовательно, — тем более возможен (ожидаем) исход ω_i в каждом очередном испытании.

В данном случае принципиально то, что для такого заключения не обязательно знать значения вероятностей pr_1, pr_2, ..., достаточно лишь знать, как они упорядочены. Более того, такое заключение останется в силе, если допустить, что вероятности pr_1, pr_2, ... изменяется от испытания к испытанию, оставаясь лишь одинаково упорядоченными, например, согласно условию

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots > 0, \quad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1. \tag{4.3}$$

В связи с этими замечаниями рассмотрим стохастический эксперимент Э, математической моделью которого является *класс* $\mathcal{P}r$ дискретных вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, в которых значения вероятностей $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, элементарных исходов Э подчинены лишь условиям упорядоченности и нормировки (4.3), т. е. рассмотрим класс $\mathcal{P}r \triangleq \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}\}$, где $\mathbb{P}\mathrm{r}$ — класс всех вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, распределенных согласно условию (4.3).

Знания одной лишь упорядоченности (4.3) вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, конечно, недостаточно, чтобы охарактеризовать Э в терминах стандартного формализма теории вероятностей, а допустив, что в рамках условия (4.3) вероятности $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ произвольно изменяются от испытания к испытанию, нельзя рассчитывать оценить вероятность $\mathrm{Pr}(A)$ значением частоты $\nu_A^{(n)}$, поскольку в таком случае и $\mathrm{Pr}(A)$, вообще говоря, тоже эволюционирует в течение Э^n. Поэтому класс $\mathcal{P}r$ является «существенно недоопределенной» стохастической моделью Э, а наблюдения за исходами Э^n не позволят [1] ее «доопределить», как бы ни было велико n.

В любой теоретико-возможностной модели Э, стохастическая модель которого определена как класс $\mathcal{P}r$ вероятностных пространств, возможности $\mathrm{p}_i \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, образующие распределение возможности P, должны быть априори подчинены условиям

$$1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{4.4}$$

[1] Если вероятности в (4.3) изменяются от испытания к испытанию.

содержащим лишь требование упорядоченности, согласованное с условием упорядоченности в (4.3), и условие нормировки: $\mathrm{p}_1 = 1$.

Предположим, что распределение $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ определяет возможность как функцию $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\ 1]$, а *каждая конкретная упорядоченность* в (4.4) определяет *неприводимый класс эквивалентных возможностей*, *распределения которых одинаково упорядочены*, *причем так*, *что в* (4.4) *встречаются только равенства и строгие неравенства*. Обозначим $\mathbb{P}$ класс всех возможностей P, распределенных согласно (4.4), и $\mathcal{P} \triangleq \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}\}$ — соответствующий класс всех пространств с возможностью.

Представим $\mathcal{P}$ в виде объединения попарно непересекающихся подклассов пространств с возможностью, каждый из которых определит *неприводимую*, не допускающую дальнейшего уточнения и детализации теоретико-возможностную модель Э. С этой целью заметим, что всякую *конкретную упорядоченность* распределения $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$, удовлетворяющего условиям (4.4), можно задать двоичным числом $e = 0.e_1 e_2 \ldots \in (0,1)$, в котором $e_i = 1$, если $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$, и $e_i = 0$, если $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$

Обозначим $\mathbb{P}_{(e)}$ класс всех возможностей, упорядоченность распределений $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ которых определена значением $e \in (0,1)$. Тогда $\mathbb{P}_{(e)} \bigcap \mathbb{P}_{(e')} = \varnothing$, если $e \neq e'$, и

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{(e)} \tag{4.5}$$

— разбиение класса $\mathbb{P}$ всех возможностей, распределения которых подчинены условиям (4.4).

Подчеркнем, что класс $\mathbb{P}_{(e)}$ состоит из возможностей $\mathrm{P}_{(e)}$, распределения которых одинаково упорядочены согласно значению $e \in (0,1)$ и потому попарно эквивалентны, т. е. в (4.5) представлено разбиение класса $\mathbb{P}$ на неприводимые классы эквивалентности $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$. Каждый класс возможностей $\mathbb{P}_{(e)}$ определяет *неприводимую* максимально детальную теоретико-возможностную модель Э

$$\mathcal{P}_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\},\ e \in (0,1). \tag{4.6}$$

Все пространства с возможностью $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, определяют, по существу, одну и ту же теоретико-возможностную модель Э. В общем случае счетного Ω множество всех неприводимых теоретико-возможностных моделей Э в (4.6), очевидно, несчетно [1)].

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом распределение $\mathrm{p}_i \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, определяет возможность $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\ 1]$,

[1)] Если $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, то условию $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_m \geqslant 0$ удовлетворяют $2^m - 1$ конкретных (неразложимых) упорядоченностей и столько же неприводимых моделей Э.

предварительно заметив, что, поскольку знание конкретной упорядоченности, скажем,

$$1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 = \mathrm{p}_4 > \ldots, \tag{$*$}$$

возможностей элементарных исходов Э должно определять единственную (с точностью до эквивалентности) теоретико-возможностную модель Э, то следует так определить возможность $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ и шкалу ее значений, в частности, операции сложения и умножения, чтобы знания конкретной упорядоченности, например, $(*)$ было достаточно для полного упорядочения возможностей всех подмножеств Ω.

В этой связи определим шкалу $\mathcal{L}$ значений возможности как интервал $[0,1]$ с естественной упорядоченностью $\leqslant$ и двумя бинарными операциями — сложением $\boldsymbol{+} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ и умножением $\bullet : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, т. е. определим четверку $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet)$, и группу Γ изотонных автоморфизмов $\mathcal{L}$ как множество строго монотонных непрерывных функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, с групповой операцией $\circ$, определённой равенством $\gamma' \circ \gamma(a) \triangleq \gamma'(\gamma(a))$, $a \in [0,1]$. Поскольку Γ — группа автоморфизмов $\mathcal{L}$, то для любых $a, b \in [0,1]$ и $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ должны быть выполнены следующие соотношения

$$\begin{aligned} &\gamma(a * b) \Longleftrightarrow \gamma(a) * \gamma(b), \quad &&\gamma(a \boldsymbol{+} b) = \gamma(a) \boldsymbol{+} \gamma(b), \\ &\gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b), &&\gamma(0) = 0, \ \ \gamma(1) = 1, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $*$ означает либо $<$, либо $>$, либо $=$.

Условия (4.7) определяют операции $\boldsymbol{+}$ и $\bullet$ при естественном требовании к их качеству.

Теорема [39]. *Если операции* $\boldsymbol{+}$ *и* $\bullet$ *непрерывны, для любых* $a, b \in [0,\ 1]$

$$\begin{aligned} a \bullet b = b \bullet a, \quad 0 \bullet a = 0, \quad 1 \bullet a = a, \\ a \boldsymbol{+} b = b \boldsymbol{+} a, \quad 0 \boldsymbol{+} a = a, \quad 1 \boldsymbol{+} a = 1, \end{aligned}$$

и для любой функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ *выполнены условия* (4.7), *то* $a \boldsymbol{+} b = \max(a,b)$, $a \bullet b = \min(a,b)$, $a, b \in [0,1]$.

Доказательство. См. теорему 17.1 гл. 1. ■

Найденные в теореме бинарные операции $\boldsymbol{+}$ и $\bullet$ позволяют сформулировать правило, определяющее возможность P по ее распределению, аналогичное правилу для вероятности в (4.1), а именно,

$$\mathrm{P}(A) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{i:\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}) \triangleq \sup_{i:\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}),\ A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Согласно этому правилу

$$\begin{aligned} A \subset B \ &\Rightarrow \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B), \\ \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \boldsymbol{+} \mathrm{P}(B) &\triangleq \max(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)), \\ \mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B) &\triangleq \min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)), \quad A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \end{aligned}$$

причем в случае Р-независимости A и B естественно считать, что [1] $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B)$, ср. с (4.1), (4.2), см. § 7 гл. 1.

Заметим, что, как показано в гл. 2, каждому классу $\mathbb{P}_{(e)}$ можно взаимно однозначно сопоставить класс вероятностей [2] $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, а разбиению класса $\mathbb{P}$ в (4.5) — разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$ всех вероятностей, распределенных согласно условиям (4.3):

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}.$$

Этот факт, как показано в гл. 3, позволяет свести задачу эмпирического построения неприводимой теоретико-возможностной модели $\mathcal{P}_{(e)}$ Э к задаче проверки статистических гипотез о принадлежности вероятностей $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, определяющих стохастические модели Э, к одному из классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$.

В данном случае характерно, что в то время, как класс $\mathcal{P}r_{(e)} \triangleq \left\{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\right\}$ для каждого $e \in (0,1)$ является существенно недоопределенной стохастической моделью Э, соответствующая теоретико-возможностная модель $\mathcal{P}_{(e)}$, не определяя значения возможностей $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, полностью их упорядочивает, а именно: для любых исходов A и B модель $\mathcal{P}_{(e)}$ определяет, какое из отношений $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$ или $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$ имеет место. Как показано в главах 6, 7, этого вполне достаточно, чтобы охарактеризовать Э, по существу, столь же полно, как его охарактеризовала бы теоретико-вероятностная модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ при известной вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\ 1]$.

Принципиальное отличие возможности от вероятности обусловлено группой Γ изотонных автоморфизмов шкалы $\mathcal{L} = ([0,\ 1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet)$ значений возможности. В то время как теоретико-вероятностные модели формулируются в единой шкале значений вероятности теоретико-возможностные модели могут формулироваться в различных (изоморф-

---

[1] Заметим, что шкала значений вероятности — четверка $\mathcal{L} = ([0,\ 1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \times)$, где сложение «$\boldsymbol{+}$» и умножение «$\times$» суть $a \boldsymbol{+} b \triangleq a + b - ab$, $a \times b \triangleq ab$, поэтому в случае независимости A и B как и для возможности $\mathrm{Pr}(A \cup B) = \mathrm{Pr}(A) \boldsymbol{+} \mathrm{Pr}(B) \triangleq \mathrm{Pr}(A) + \mathrm{Pr}(B) - \mathrm{Pr}(A)\mathrm{Pr}(B)$, $\mathrm{Pr}(A \cap B) = \mathrm{Pr}(A) \times \mathrm{Pr}(B) \triangleq \mathrm{Pr}(A)\mathrm{Pr}(B)$. Иначе говоря, в случае независимости A и B как для возможности, так и для вероятности операциям $\bigcup$ и $\bigcap$ над событиями соответствуют операции сложения и умножения в соответствующих шкалах.

[2] Это взаимно однозначное соответствие определяется следующими условиями (гл. 2 § 5):

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \iff \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \iff \mathrm{pr}_1 + \dots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \\ &e_i = 0 \iff \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \iff \mathrm{pr}_1 + \dots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

ных!) шкалах [1]), выбираемых исследователями сообразно их предпочтениям. При этом формулируемые в некоторых шкалах модели, доводы, заключения и т. п. считаются эквивалентными, если существует шкала, в которой их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть только те из них, формулировки которых не зависят от выбора шкалы. В частности, высказывания типа «возможность A равна 0,3», «возможность A больше возможности B на 0,1», «возможность A больше возможности B в 2 раза» и т. п. не имеют содержательной интерпретации в отличие от равенств $\mathrm{P}(A) = 0$, $\mathrm{P}(A) = 1$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$ и неравенств $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(A) < 1$, $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$ и т. п., верных в любой шкале, подробнее см. § 17 гл. 1.

Первая глава «Элементы теории возможностей» посвящена математическим основам теории возможностей. В качестве исходной конструкции выбран линейный, счетно-аддитивный (относительно операции сложения «$+$», понимаемой как «max», и умножения «$\bullet$», понимаемой как «min») интеграл [2]), определенный на классе $\mathcal{L}(X)$ функций, образующем полную дистрибутивную решетку, и принимающий значения в шкале $\mathcal{L} = ([0, 1], \leqslant, +, \bullet)$ значений возможности, также являющейся полной дистрибутивной решеткой (относительно решеточных операций $\vee \equiv +$, $\wedge \equiv \bullet$). Класс функций $\mathcal{L}(X)$, определенных на X со значениями в $[0, 1]$, содержит индикаторные функции всех множеств из некоторой σ-алгебры подмножеств X; возможность определена на этой σ-алгебре значениями интеграла, которые он принимает на индикаторных функциях. Формально, изложение следует схеме построения теории вероятностей как «специальной» теории меры и интеграла, его логика и основные детали отражены в подробном оглавлении.

Вторая глава «Стохастические модели возможности» посвящена исследованиям связей теории возможностей с теорией вероятностей, основным результатом которых является установление взаимно однозначного соответствия между классами вероятностей и классами эквивалентности возможностей. Класс эквивалентности возможностей определяется единой для всех взаимно эквивалентных возможностей конкретной упорядоченностью их распределений и порождается группой Γ всех изотонных автоморфизмов шкалы значений возможности. В пределах каждого класса возможности определяют вполне добротные, с точки зрения формализма теории возможностей, взаимно экви-

---

[1]) Преобразование $\gamma \in \Gamma$ определяет переход $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ к шкале $\gamma\mathcal{L}$, изоморфной $\mathcal{L}$. Все шкалы совпадают с точностью до изоморфизма и считаются эквивалентными.

[2]) К сожалению, элегантные идеи и результаты идемпотентного функционального анализа, в частности, идемпотентного интегрирования функций со значениями в полукольцах с идемпотентными бинарными операциями, разработанного В. П. Масловым с учениками [1, 22, 24], не отражены в настоящей монографии, так как познакомиться с ними автору довелось после завершения работы над книгой.

валентные теоретико-возможностные модели. Соответствующий класс вероятностей определяется условием максимальной согласованности конкретной упорядоченности распределения возможностей с распределением вероятностей и, в свою очередь, определяет существенно недоопределенную стохастическую модель, которая не может быть охарактеризована стандартным формализмом теории вероятностей. Эти факты, названные принципом соответствия, позволяют:

- показать, что операции «max» и «min» для возможностей событий соответствуют операциям сложения и умножения их вероятностей, теоретико-возможностная P-независимость соответствует независимости статистической, и т. п.;
- статистически моделировать возможность, нечеткие элементы и нечеткие множества с заданными распределениями возможностей;
- эмпирически определять теоретико-возможностную модель стохастического эксперимента, наблюдая его исходы и решая задачу проверки статистических гипотез о свойствах распределения вероятностей его элементарных исходов.

В третьей главе «Эмпирическое построение возможности» рассмотрены методы эмпирического построения теоретико-возможностных моделей объектов, имеющих стохастическую компоненту, теоретико-вероятностная модель которой не может быть восстановлена эмпирически, и методы, основанные на суждениях экспертов и других, возможно, неполных и противоречивых данных. Рассматриваемый в этой главе подход к решению проблемы эмпирического построения теоретико-возможностной модели неопределенного стохастического объекта сводится к статистической задаче выбора *одного из классов вероятностных мер* и, поскольку в выбранном классе (определяющем единственную с точностью до эквивалентности возможность) не требуется указывать конкретную вероятность, то для эмпирического определения возможности требуется существенно меньше информации, чем для определения конкретной вероятности из этого класса.

Более того, если вероятность, оставаясь в пределах этого класса, *произвольно* изменяется от наблюдения к наблюдению, то эмпирическое восстановление вероятности принципиально невозможно, в то время как при некоторых достаточно естественных предположениях возможность восстанавливается почти наверное безошибочно на основе конечного числа наблюдений. Это обстоятельство позволяет моделировать существенно более сложные объекты, стохастические модели которых принципиально не могут быть построены эмпирически.

Наконец, в этой главе рассмотрены методы гранулирования пространства элементарных событий, позволяющие строить теоретико-возможностные модели, наиболее полно отражающие стохастические свойства моделируемых объектов.

Четвертая глава «Предельные теоремы» посвящена результатам, которые в теории вероятностей составляют содержание раздела «законы больших чисел» и «предельные теоремы». Фундаментальное свойство вероятности, характеризующее этот раздел, состоит, грубо говоря, в том, что при должном комбинировании результатов многократно повторенных статистически независимых наблюдений их случайная составляющая может быть сколь угодно сильно подавлена (законы больших чисел), а, будучи должным образом нормирована, она оказывается сколь угодно близка к гауссовской (центральная предельная теорема). В теории возможностей ничего подобного не наблюдается. Комбинирование результатов повторных независимых наблюдений не позволяет подавить их нечеткую составляющую, а класс предельных распределений оказывается неизмеримо шире, чем в теории вероятностей. Можно сказать, что в теории возможностей для накопления информации об объекте исследования его следует «наблюдать с разных сторон», а не «многократно повторять наблюдения с одной и той же стороны».

В пятой главе «Возможность в статистической теории оценивания и проверки гипотез» рассмотрены параметрические задачи математической статистики, в которых параметр распределения вероятностей моделируется как нечеткий элемент, распределение возможностей значений которого определяется критерием решаемой статистической задачи, и оказывается случайным. Многочисленные примеры, иллюстрирующие этот формализм и его естественную содержательную интерпретацию, тесно связанную с принципом максимального правдоподобия и другими эвристическими подходами в статистике, свидетельствуют в пользу его продуктивности. Столь же естественны результаты, полученные при исследовании асимптотически оптимального оценивания при неограниченно возрастающем числе независимых наблюдений.

Шестая глава «Оптимальные решения» посвящена теоретико-возможностному аналогу элементарной теории статистических решений, краткий обзор которой приведен в двух параграфах этой главы. В основу теоретико-возможностных оптимальных решений положен принцип минимизации риска потерь, который характеризуется возможностью и (или) неизбежностью потерь, обусловленных принимаемым решением. Теория построена точно по схеме теории статистических решений применительно к теоретико-возможностным постановкам задач идентификации распределений нечетких элементов и оценивания нечетких элементов и нечетких множеств. В этой же главе рассмотрены интервальные нечеткие элементы и методы их оценивания, минимизирующие возможную и неизбежную погрешности.

Седьмая глава «Методы анализа и интерпретации данных наблюдений» посвящена теоретико-возможностному моделированию, анализу качества моделей и их адекватности, оптимизации основанных на них выводов, прогнозированию, восстановлению функциональных зависимостей и интерпретации данных измерительного эксперимента. В частности, приведены результаты сравнительного анализа качества интерпретации (редукции) данных измерительного эксперимента, основанной на теоретико-возможностных моделях и на их существенно более полных теоретико-вероятностных аналогах. Представленные в этой главе методы интерпретации данных основаны на минимизации либо ошибок, либо их неизбежности.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Введение

Хорошо известны два пути построения теории меры и интеграла, образующей математический фундамент теории вероятностей. Первый путь, известный как схема Лебега, начинается с конструкций меры, измеримого множества и измеримой функции и завершается построением интеграла на классе измеримых суммируемых функций. Другой путь, известный как схема Даниэля, начинается с конструкции элементарного интеграла, определенного на классе элементарных функций, затем последний расширяется, а интеграл продолжается на более широкий класс функций (см., например, [53]).

Математическим фундаментом теории возможностей, элементы которой представлены в этой главе, также является теория меры и интеграла, за основу которой взята конструкция «линейного счетно-аддитивного (абстрактного) интеграла» $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, определенного на классе $\mathcal{L}(X)$ функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, и принимающего значения в шкале [1] $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ (значений возможности), см. § 1, [35]. Шкала $\mathcal{L}$ — это отрезок $[0,1]$ числовой прямой с естественной упорядоченностью, определенной неравенством $\leqslant$, и двумя правилами композиции: сложением $\boldsymbol{+}\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, понимаемым как max, $a \boldsymbol{+} b \triangleq \max(a,b)$, $a,b \in [0,1]$, и умножением $\bullet\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, понимаемым как min, $a \bullet b \triangleq \min(a,b)$, $a,b \in [0,1]$, см. теорему 17.1. Класс $\mathcal{L}(X)$ вместе с каждой парой функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ содержит их сумму $(f \boldsymbol{+} g)(\cdot)$, $\big(f \boldsymbol{+} g\big)(x) \triangleq f(x) \boldsymbol{+} g(x)$, $x \in X$, произведение $(f \bullet g)(\cdot)$, $(f \bullet g)(x) \triangleq f(x) \bullet g(x)$, $x \in X$, и произведение $(a \bullet f)(\cdot)$ функции $f(\cdot)$ на число $a \in [0,1]$, понимаемое как функция $a(x) = a$, $x \in X$; кроме того, вместе с любой последовательностью $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots$ класс $\mathcal{L}(X)$ содержит $\left(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} f_i\right)(\cdot) \triangleq \left(\sup\limits_i f_i\right)(\cdot)$, $\left(\sup\limits_i f_i\right)(x) \triangleq \sup\limits_i f_i(x)$,

---

[1] Вообще говоря, $f(\cdot) : X \to [0,1]$, $\mathrm{p}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to [0,1]$. Запись, использованная в тексте, призвана отметить законы преобразования $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ и $\mathrm{p}(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ при преобразовании шкалы $\mathcal{L}$, см. § 17.

$x \in X$, и $\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\bullet}} f_i\right)(\cdot) \triangleq \left(\inf_i f_i\right)(\cdot)$, $\left(\inf_i f_i\right)(x) \triangleq \inf_i f_i(x)$, $x \in X$. Линейность и счетная аддитивность $\mathrm{p}(\cdot)$ понимаются относительно так определенных операций сложения и умножения, а именно:

$$\mathrm{p}\left(\left((a_1 \bullet f_1) + (a_2 \bullet f_2)\right)(\cdot)\right) = (a_1 \bullet \mathrm{p}(f_1(\cdot))) + (a_2 \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))),$$

$$a_1,\, a_2 \in [0,1],\ f_1(\cdot),\, f_2(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \text{ (линейность);}$$

$$\mathrm{p}\left(\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} f_i\right)(\cdot)\right) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} \mathrm{p}(f_i(\cdot)),$$

$$f_i \in \mathcal{L}(X),\ i = 1, 2, \ldots, \text{ (счетная аддитивность).}$$

Возможность (мера возможности) $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ определена в § 2 значениями $\mathrm{p}(\cdot)$ на классе $\{\chi_A(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$ индикаторных функций $\mathcal{A}$-измеримых подмножеств $A \subset X$ (событий): $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$. Значения $\mathrm{p}(f(\cdot))$ на остальных функциях $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ определяют возможности так называемых нечетких событий, а сами функции $f(\cdot)$ называются индикаторными функциями (и. ф.) этих событий, см. § 3.

В теории возможностей альтернативной возможности $\mathrm{P}(A)$ характеристикой события A является его необходимость $\mathrm{N}(A)$, см. § 4, или $\mathrm{n}(f(\cdot))$, если речь идет о нечетком событии [1)], [66]. Каждое событие с и. ф. $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ характеризуется возможностью $\mathrm{p}(f(\cdot))$ и необходимостью $\mathrm{n}(f(\cdot))$. По аналогии со стандартной теоретико-вероятностной схемой вводятся понятия пространства с возможностью, интегрирования (лебеговского) по возможности и по необходимости, P- и N-независимостей, условной возможности, условной необходимости и т. д., см. § 6–8.

Счетность и измеримость — фундаментальные математические понятия, определяющие рамки применимости математической теории вероятностей к моделированию реальности, [80], — в теории возможностей играют существенно более скромную роль. Как будет показано ниже, возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ всегда может быть продолжена с произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств X на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X, с сохранением всех ее свойств, и охарактеризована в терминах ее распределения, а интеграл $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, определяющий возможность нечетких событий, может быть продолжен с сохранением свойств на класс всех функций $X \to \mathcal{L}$, см. § 9–11. Это означает, что в теории возможностей в конечном счете любое подмножество X можно считать событием (измеримым множеством) и определить его возможность и необходимость; любую функцию $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ можно считать индикаторной функцией нечеткого события, а значения $\mathrm{p}(f(\cdot))$ и $\mathrm{n}(f(\cdot))$ считать его возможностью и необходимостью соответственно. В отличие от теории вероятностей, в теории возможностей любые,

[1)] В отличие от теории вероятностей, в теории возможностей значения $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(X \setminus A)$ не связаны взаимно однозначной зависимостью.

в том числе несчетные, объединения и пересечения событий являются событиями, и с этой точки зрения последняя проще теории вероятностей. Но за это упрощение приходится платить утратой непрерывности: возможность, будучи вполне аддитивной, — не непрерывная функция $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$.

Наиболее существенное отличие возможности, рассматриваемой в этой книге, от вероятности обусловлено ее содержательной интерпретацией, радикально отличающейся от интерпретации вероятности. Дело в том, что, в отличие от «абсолютной» шкалы значений вероятности, шкала $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ значений возможности имеет «обширную» группу Γ изотонных (сохраняющих упорядоченность) автоморфизмов, определяемых всеми непрерывными строго монотонными функциями $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, см. § 17, [35].

Точнее, если обозначить $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ преобразование шкалы $\mathcal{L}$ в изоморфную (эквивалентную) ей шкалу $\gamma\mathcal{L}$, определенное для каждого $a \in [0,1]$ как $\mathcal{L} \ni a \to \gamma(a) \in \gamma\mathcal{L}$, то при преобразовании $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$

- функции $f(\cdot)$ из класса $\mathcal{L}(X)$ преобразуются по правилу $f(\cdot) \to \to \gamma \circ f(\cdot)$, где $\gamma \circ f(x) \triangleq \gamma(f(x))$, $x \in X$;
- функции (интегралы) $\mathrm{p}(\cdot)$ из класса $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ функций $\mathrm{p}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, линейных: $\mathrm{p}((a \bullet f) \boldsymbol{+} (b \bullet g)(\cdot)) = = a \bullet \mathrm{p}(f(\cdot)) \boldsymbol{+} b \bullet \mathrm{p}(g(\cdot))$, $a, b \in [0,1]$, $f(\cdot)$, $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и счетно-аддитивных: $\mathrm{p}\left(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j=1}^{\infty} f_j(\cdot)\right) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{p}(f_j(\cdot))$, $f_j(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, 2, \ldots$, преобразуются по правилу $\mathrm{p}(f(\cdot)) \to \gamma * \mathrm{p}(f(\cdot))$, где $\gamma * \mathrm{p}(f(\cdot)) \triangleq \gamma(\mathrm{p}(\gamma^{-1} \circ f(\cdot)))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, см. § 17.

На этих свойстах преобразований $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, в теории возможностей, рассматриваемой в данной монографии, основан принцип относительности, согласно которому каждый исследователь при построении и изучении теоретико-возможностной модели использует свою шкалу $\mathcal{L}$, совпадающую со шкалой любого другого исследователя с точностью до преобразования $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, и, следовательно, — эквивалентную шкале любого другого исследователя. Поскольку Γ является группой, шкалы всех исследователей взаимно эквивалентны. Поэтому любые определения, доводы, утверждения, задачи, данные и т. п., формулировки которых в некоторых шкалах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ различны, считаются *эквивалентными*, если *существует шкала* $\mathcal{L} = \gamma_1\mathcal{L}_1 = \gamma_2\mathcal{L}_2$, в которой их формулировки *совпадают*, если же формулировки *совпадают во всех шкалах*, то соответствующие определения, доводы, и т. д. могут быть *содержательно истолкованы*, ибо их смысл не зависит от шкалы, и, следовательно, одинаков для всех исследователей, [35].

Например, возможности P_1 и P_2 эквивалентны, если можно указать γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$, такие что для любого $A \in \mathcal{A}$ $\gamma_1 * \mathrm{P}_1(A) \triangleq \gamma_1(\mathrm{P}_1(A)) = = \gamma_2(\mathrm{P}_2(A)) \triangleq \gamma_2 * \mathrm{P}_2(A)$. В противном случае, P_1 и P_2 не эквивалентны, как, например, в случае, когда для некоторого $A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}_1(A) = 1$, а $\mathrm{P}_2(A) < 1$, или $\mathrm{P}_1(A) > 0$, а $\mathrm{P}_2(A) = 0$, ибо равенства нулю и единице остаются таковыми в любой шкале и, следовательно, каждое из них имеет один и тот же смысл для любого исследователя. Точно также неравенства $\mathrm{P}(A) \neq \mathrm{P}(B)$ или $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$ в шкале $\mathcal{L}$ сохраняются в любой шкале $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, и могут быть содержательно истолкованы.

Подчеркнем, что в теории возможностей не могут быть содеражательно истолкованы ответы на такие, например, вопросы, как «чему равно значение возможности того или иного события», «во сколько раз или насколько возможность одного события больше или меньше, чем другого» и т. п., конечно, если речь не идет о значениях возможности, равных нулю или единице.

В заключение этой главы, в § 18, приведен еще один вариант возможности, шкала значений которой имеет менее обширную группу автоморфизмов.

§ 1. Интеграл. Определение, свойства

Назовем шкалой $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ значений возможности отрезок $[0,1]$ с упорядоченностью, определенной неравенством $\leqslant$, операцией сложения «$\boldsymbol{+}$», понимаемой как «max», и операцией умножения «$\bullet$», понимаемой как «min», [1])

$$a \boldsymbol{+} b \triangleq \max(a,b), \quad a \bullet b \triangleq \min(a,b), \quad a,b \in [0,1].$$

Так определенные операции коммутативны: $a \boldsymbol{+} b = b \boldsymbol{+} a$, $a \bullet b = b \bullet a$, ассоциативны: $(a \boldsymbol{+} b) \boldsymbol{+} c = a \boldsymbol{+} (b \boldsymbol{+} c)$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ и взаимно дистрибутивны:

$$\begin{gathered} a \bullet (b \boldsymbol{+} c) = \min(a, \max(b,c)) = \\ = \max(\min(a,b),\ \min(a,c)) = (a \bullet b) \boldsymbol{+} (a \bullet c); \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} a \boldsymbol{+} (b \bullet c) = \max(a, \min(b,c)) = \\ = \min(\max(a,b),\ \max(a,c)) = (a \boldsymbol{+} b) \bullet (a \boldsymbol{+} c). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Определим нейтральные элементы шкалы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, положив $\mathbf{0} \triangleq 0$, $\mathbf{1} \triangleq 1$, для которых

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \bullet a = \min(0,a) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \boldsymbol{+} a = \max(0,a) = a, \\ &\mathbf{1} \bullet a = \min(1,a) = a, \quad \mathbf{1} \boldsymbol{+} a = \max(a,1) = \mathbf{1}, \quad a \in [0,1]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Естественная упорядоченность на $\mathcal{L}$ согласована с операциями сложения и умножения:

$$a \leqslant b \Rightarrow \begin{cases} a \bullet c \leqslant b \bullet c, \\ a \boldsymbol{+} c \leqslant b \boldsymbol{+} c, \end{cases} \quad a,\ b,\ c \in \mathcal{L};\ \mathbf{0} < \mathbf{1}. \tag{1.4}$$

[1]) Шкала $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ — полная дистрибутивная решетка, в которой упорядоченность задана естественным отношением $\leqslant$, $a \vee b \triangleq a \boldsymbol{+} b$, $a \wedge b \triangleq a \bullet b$ [6].

Последовательность $\{a_n\} \subset \mathcal{L}$ назовем сходящейся, если $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \triangleq \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} a_n = \inf\limits_N \sup\limits_{n\geqslant N} a_n \triangleq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$, число a назовем ее пределом, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Заметим, что

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty}(\mathop{\bullet}\limits_{k=n}^{\infty} a_k) = \mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty}(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{k=n}^{\infty} a_k)$;
- операции сложения «$\boldsymbol{+}$» и умножения «$\bullet$» непрерывны: если $a = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то

$$a \boldsymbol{+} b = \lim_{m,n\to\infty}(a_m \boldsymbol{+} b_n),$$

$$a \bullet b = \lim_{m,n\to\infty}(a_m \bullet b_n);$$

- для любых последовательностей $\{a_m\} \subset [0,1]$, $\{b_n\} \subset [0,1]$

$$\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty}(\mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty}(a_m \boldsymbol{+} b_n)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty}(\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty}(a_m \boldsymbol{+} b_n)) = (\mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty} a_m) \boldsymbol{+} (\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty} b_n),$$

$$\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty}(\mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty}(a_m \bullet b_n)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty}(\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty}(a_m \bullet b_n)) = (\mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty} a_m) \bullet (\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty} b_n),$$

$$\mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty}(\mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty}(a_m \bullet b_n)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty}(\mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty}(a_m \bullet b_n)) = (\mathop{\boldsymbol{+}}_{m=1}^{\infty} a_m) \bullet (\mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty} b_n)$$

  и т. п.

Обозначим $\mathcal{L}(X)$ класс функций, определенных на X, со значениями в $\mathcal{L}$, содержащий:

1) вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ все функции $(a \bullet f)(\cdot)$, $a \in [0,1]$, $(a \bullet f)(x) \triangleq \min(a, f(x)) = a \bullet f(x)$, $x \in X$;

2) вместе с каждой парой функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ их сумму $(f_1 \boldsymbol{+} f_2)(\cdot)$ и произведение $(f_1 \bullet f_2)(\cdot)$,

$$\begin{aligned} (f_1 \boldsymbol{+} f_2)(x) &\triangleq f_1(x) \boldsymbol{+} f_2(x) = \max(f_1(x),\ f_2(x)), \\ (f_1 \bullet f_2)(x) &\triangleq f_1(x) \bullet f_2(x) = \min(f_1(x),\ f_2(x)), \end{aligned} \quad x \in X, \tag{1.5}$$

и, следовательно, любую их «линейную комбинацию» $(a_1 \bullet f_1)(\cdot) \boldsymbol{+} (a_2 \bullet f_2)(\cdot)$, $a_1, a_2 \in [0,1]$;

3) вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ функцию $\vartheta \circ f(\cdot)$, $\vartheta \circ f(x) \triangleq \vartheta(f(x))$, $x \in [0.1]$, где $\vartheta(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ — любая непрерывная, строго монотонно убывающая функция, такая, что $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$. В ряде случаев удобно требовать, чтобы $\vartheta(\vartheta(x)) = x$, $x \in [0,1]$, этим свойством обладает, например, $\vartheta(x) = (1 - x^{\alpha})^{1/\alpha}$, $x \in [0,1]$, $\alpha > 0$. Такие функции $\vartheta(\cdot)$ далее называются антитонными (изменяющими упорядоченность на $[0,1]$ на противоположную), или, в силу последнего их свойства, — инволюциями. Наконец,

4) вместе с любой последовательностью функций $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot), \ldots$ — функции

$$\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n\right)(x) \triangleq \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n(x) \triangleq \sup_n f_n(x),$$
$$\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n\right)(x) \triangleq \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n(x) \triangleq \inf_n f_n(x), \quad x \in X, \tag{1.6}$$

и, следовательно, — ее верхний $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \triangleq \inf\limits_N \sup\limits_{n\geqslant N} f_n(x)$ и нижний $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) \triangleq \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(x)$, $x \in X$, пределы, а также — ее предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, если последний существует.

Определим на $\mathcal{L}(X)$ отношение упорядоченности, считая, что $f_1(\cdot) \leqslant f_2(\cdot)$, если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $x \in X$ [1]).

Замечание 1.1. В условиях 2) и 4) достаточно ограничиться требованиями лишь к одной из операций $+$ или $\bullet$, например, — к $+$, так как для любых функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ из $\mathcal{L}(X)$ и любой инволюции $\vartheta(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ $\vartheta \circ (\vartheta \circ f_1 + \vartheta \circ f_2)(\cdot) = (f_1 \bullet f_2)(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и включение $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$ влечет $\vartheta \circ \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} \vartheta \circ f_n\right)(\cdot) = \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n\right)(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Определение 1.1. *Интеграл* $\mathrm{p}(\cdot)$ определим как линейную счетно-аддитивную функцию на $\mathcal{L}(X)$, принимающую значения в $\mathcal{L}$, т.е. такую, что $\forall\ a_1, a_2 \in \mathcal{L}$, $\forall\ f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$\mathrm{p}\Big(\big((a_1 \bullet f_1) + (a_2 \bullet f_2)\big)(\cdot)\Big) = (a_1 \bullet \mathrm{p}(f_1(\cdot))) + (a_2 \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))) \tag{1.7}$$

и $\forall \{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$

$$\mathrm{p}(\sup_n f_n(\cdot)) \triangleq \mathrm{p}(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n(\cdot)) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \triangleq \sup_n \mathrm{p}(f_n(\cdot))\,. \tag{1.8}$$

Класс всех интегралов $\mathrm{p}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$.

Рассмотрим свойства интеграла $\mathrm{p}(\cdot)$. Пусть $h(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$, $x \in X$. Согласно условию (1.7), $\mathrm{p}(h(\cdot)) = \max(\mathrm{p}(f_1(\cdot)), \mathrm{p}(f_2(\cdot)))$. Следовательно, если $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, $x \in X$, то

$$\mathrm{p}(h(\cdot)) = \mathrm{p}(f_1(\cdot)) = \max(\mathrm{p}(f_1(\cdot)), \mathrm{p}(f_2(\cdot))) \geqslant \mathrm{p}(f_2(\cdot)). \tag{1.9}$$

Можно сказать, что $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — *монотонно неубывающая функция*.

Пусть $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$ — *монотонно неубывающая* последовательность, т. е. $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$. Она поточечно сходится, ее предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_n f_n(x)$, $x \in X$, содержится

[1]) Класс $\mathcal{L}(X)$, как частично упорядоченное множество функций $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$, является полной дистрибутивной решеткой относительно операций $(f_1 \vee f_2)(\cdot) \triangleq (f_1 + f_2)(\cdot)$, $(f_1 \wedge f_2)(\cdot) \triangleq (f_1 \bullet f_2)(\cdot)$, [6, 8].

в $\mathcal{L}(X)$, а условия (1.8) и (1.9) фиксируют *непрерывность* $\mathrm{p}(\cdot)$ относительно такой сходимости: $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot)) = \mathrm{p}(\sup\limits_n f_n(\cdot)) = \sup\limits_n \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$. Последнее равенство следует из монотонности $\mathrm{p}(\cdot)$ (1.9).

Пусть $\{f_n(\cdot)\}$ — произвольная последовательность из $\mathcal{L}(X)$. Поскольку согласно (1.9) для любого $k \geqslant N$ $\mathrm{p}(f_k(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(\inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\cdot))$, $N = 1, 2, \ldots$, то

$$\inf_{k\geqslant N} \mathrm{p}(f_k(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(\inf_{n\geqslant N} f_n(\cdot)), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

и, следовательно, в силу (1.8) и (1.10),

$$\sup_N \mathrm{p}(\inf_{n\geqslant \mathrm{N}} f_n(\cdot)) = \mathrm{p}(\sup_N \inf_{n\geqslant N} f_n(\cdot)) \equiv$$
$$\equiv \mathrm{p}(\liminf_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \sup_N \inf_{n\geqslant N} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)).$$

Аналогично, $\forall N = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{k\geqslant N} \mathrm{p}(f_k(\cdot)) = \mathrm{p}(\sup_{k\geqslant N} f_k(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(\inf_N \sup_{k\geqslant N} f_k(\cdot))$$

и, следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot))$.

В частности, *для всякой сходящейся последовательности* $f_n(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\mathrm{p}(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)), \tag{1.11}$$

т. е. в общем случае $\mathrm{p}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — *полунепрерывная снизу функция*.

Пусть $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — монотонно неубывающая функция $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, и $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — интеграл. Тогда $\widehat{\mathrm{p}}(\cdot) = \gamma(\mathrm{p}(\cdot))\colon \mathcal{L}(X) \to [0,1]$ удовлетворяет условию (1.7), а если $\gamma(\cdot)$ — непрерывная функция, то — условиям (1.7), (1.8), т. е. является интегралом.

Итак, интеграл $\mathrm{p}(\cdot)$ обладает следующими свойствами.

Теорема 1.1. *Функция* $\mathrm{p}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ $\forall \{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$

1. *монотонно не убывает*: *если* $f_1(\cdot) \geqslant f_2(\cdot)$ *означает, что* $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, $x \in X$, *то* $f_1(\cdot) \geqslant f_2(\cdot) \Rightarrow \mathrm{p}(f_1(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(f_2(\cdot))$; *в частности,* $\mathrm{p}((f_1 \bullet f_2)(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(f_1(\cdot)) \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))$, *хотя* $\mathrm{p}((f_1 \bullet f_2)(\cdot)) = f_1 \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))$, *если* $f_1(x) = f_1 = \mathrm{const}$, $x \in X$;
2. *непрерывна относительно сходимости монотонно неубывающей последовательности*: $f_{n+1}(\cdot) \geqslant f_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{p}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$;

3. *полунепрерывна снизу*: $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathrm{p}(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$; $\mathrm{p}(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$; *если, в частности, последовательность* $\{f_n(\cdot)\}$ *сходится к* $f(\cdot)$, *то* $\mathrm{p}(f(\cdot)) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$;
4. *непрерывна в «точке»*: $f(\cdot) = 1(\cdot), 1(x) = 1,\ x \in X$: *для любой последовательности* $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$, *сходящейся к* $1(\cdot)$, $\lim \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \mathrm{p}(1(\cdot))$; *далее будем считать, что* $\mathrm{p}(1(\cdot)) = 1$ (*условие нормировки*).

Доказательство. Следует проверить лишь непрерывность $\mathrm{p}(\cdot)$ в «точке» $1(\cdot)$. Пусть при $n \to \infty$ $f_n(\cdot) \to 1(\cdot)$, тогда в силу монотонности $\mathrm{p}(\cdot)$ $f_n(\cdot) \leqslant 1(\cdot) \Rightarrow \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(1(\cdot))$ и, следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(1(\cdot))$. С другой стороны, в силу полунепрерывности $\mathrm{p}(\cdot)$ снизу $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(1(\cdot))$, поэтому $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \mathrm{p}(1(\cdot))$. ■

Пример 1.1. Поскольку согласно (1.6), (1.5) sup — символ суммирования, а min — символ умножения, определим интеграл $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_g(f(\cdot))$, как «скалярное произведение» фиксированной функции $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ на $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$:

$$\mathrm{p}_g(f(\cdot)) \triangleq \sup_{x\in X} \min(f(x), g(x)), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)\,; \tag{1.12}$$

$\mathrm{p}_g(\cdot)$ — линейная функция [1]), ибо $\forall\ a_1, a_2 \in \mathcal{L}$, $\forall\ f_1(\cdot),\ f_2(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}_g(((a_1 \bullet f_1) \mathbin{\boldsymbol{+}} (a_2 \bullet f_2))(\cdot)) = \\
&= \sup_{x\in X} \min\{\max[\min(a_1,\ f_1(x)), \min(a_2,\ f_2(x))],\ g(x)\} = \\
&= \max\{\min(a_1,\ \sup_{x\in X} \min(f_1(x),\ g(x))), \min(a_2,\ \sup_{x\in X} \min(f_2(x),\ g(x)))\} \triangleq \\
&\triangleq (a_1 \bullet \mathrm{p}_g(f_1(\cdot))) \mathbin{\boldsymbol{+}} (a_2 \bullet \mathrm{p}_g(f_2(\cdot)))\,,
\end{aligned}$$

и счетно-аддитивная, поскольку $\mathrm{p}_g\Big(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)\Big) = \sup\limits_{x\in X} \min\big(\sup\limits_j f_j(x),\ g(x)\big) = \sup\limits_j \sup\limits_{x\in X} \min(f_j(x),\ g(x)) = \sup\limits_j \mathrm{p}_g(f_j(\cdot)) \triangleq \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{p}_g(f_j(\cdot))$.

Вместе с тем

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_g\left(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)\right) &= \sup_{x\in X} \min\left(\sup_N \inf_{n\geqslant N} f_n(x),\ g(x)\right) \leqslant \\
&\leqslant \sup_N \inf_{n\geqslant N} \left(\sup_{x\in X} \min\left(f_n(x),\ g(x)\right)\right) = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{p}_g\left(f_n(\cdot)\right),
\end{aligned}$$

[1]) Содержательная интерпретация линейности $\mathrm{p}_g(\cdot)$ дана в § 14.2.

т. е. интеграл $\mathrm{p}_g(\cdot)$, как и в общем случае $\mathrm{p}(\cdot)$, лишь полунепрерывен снизу.

Наконец, согласно условию нормировки интеграла $\mathrm{p}(\cdot)$ в п. 4 теоремы 1.1 функция $g(\cdot)$ в (1.12) должна удовлетворять условию $\sup\limits_{x\in X} g(\cdot) = 1$.

Впрочем, далее в § 9–11 будет показано, *что для должным образом продолженного интеграла* $\mathrm{p}(\cdot)$ *равенство* (1.12) *представляет его общее выражение.*

Заметим, что

$$\mathrm{p}_{\overset{\infty}{\underset{j=1}{+}} g_j}(f(\cdot)) = \overset{\infty}{\underset{j=1}{+}} \mathrm{p}_{g_j}(f(\cdot)),\ \mathrm{p}_{\overset{\infty}{\underset{j=1}{\bullet}} g_j}(f(\cdot)) \leqslant \overset{\infty}{\underset{j=1}{\bullet}} \mathrm{p}_{g_j}(f(\cdot)).$$

§ 2. Мера возможности. Определение и свойства

Чтобы определить меру возможности, следует конкретизировать содержимое класса $\mathcal{L}(X)$, включив в него индикаторные функции некоторых подмножеств X.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{A}_0$ — конечная или счетная совокупность некоторых подмножеств X, $\mathcal{A} \triangleq \sigma\mathcal{A}_0$ — минимальная σ-алгебра подмножеств X, содержащая все подмножества из $\mathcal{A}_0$ (т. е. $\mathcal{A}$ — σ-замыкание $\mathcal{A}_0$), $\mathcal{L}(X)$ — минимальный по включению класс функций $f(\cdot) : X \to [0,1]$, содержащий индикаторные функции $\chi_A(\cdot) : X \to \{0,1\}$ всех подмножеств $A \in \mathcal{A}_0$. Тогда $\mathcal{L}(X)$ класс всех $\mathcal{A}$-измеримых функций $f(\cdot) : X \to [0,1]$.*

Доказательство. Так как для любых множеств $A_i \in \mathcal{A}_0$, $i = 1,2,\ldots$, $\chi_{A_i}(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $i = 1,2,\ldots$, то и индикаторные функции $\chi_{X\setminus A_i}(\cdot) = \vartheta \circ \chi_{A_i}(\cdot)$, $i = 1,2,\ldots$, $\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}(\cdot) = (\overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} \chi_{A_i})(\cdot)$, $\chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i}(\cdot) = (\overset{\infty}{\underset{i=1}{\bullet}} \chi_{A_i})(\cdot)$ содержатся в $\mathcal{L}(X)$, т. е. $\mathcal{L}(X)$ содержит индикаторные функции $\chi_A(\cdot)$ всех множеств $A \in \mathcal{A}$.

Следовательно $\mathcal{L}(X)$ содержит и все $\mathcal{A}$-измеримые кусочно-постоянные функции $f_n(\cdot) = (\overset{n}{\underset{i=1}{+}}(c_i^{(n)} \bullet \chi_{A_i^{(n)}}))(\cdot)$, где $c_i^{(n)} \in [0,1]$, $A_i^{(n)} \in \mathcal{A}$, $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^{(n)} = X \in \mathcal{A}$, $n = 1,2,\ldots$, а также $(\sup\limits_n f_n)(\cdot)$, $(\inf\limits_n f_n)(\cdot)$, $(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$, $(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$.

Чтобы увидеть, что $\mathcal{L}(X)$ — класс $\mathcal{A}$-измеримых функций, определенных на X и принимающих значения в $[0,1]$, заметим, что всякую $\mathcal{A}$-измеримую функцию $f(\cdot)$ можно представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности кусочно-постоянных $\mathcal{A}$-измеримых функций. А именно, последовательности

$$\underline{f}_n(x) \triangleq \overset{n}{\underset{k=1}{+}} \left(a_k^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x)\right), \quad \overline{f}_n(x) \triangleq \overset{n}{\underset{k=1}{+}} \left(a_{k-1}^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x)\right),$$
$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in X, \tag{2.1}$$

равномерно сходятся к $f(x)$, $x \in X$, если $A_1^{(n)} = \{x \in X,\ a_1^{(n)} \leqslant f(x) \leqslant a_0^{(n)}\}$, $A_k^{(n)} = \{x \in X,\ a_k^{(n)} \leqslant f(x) < a_{k-1}^{(n)}\}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, $1 = a_0^{(n)} > a_1^{(n)} > \ldots > a_n^{(n)} = 0$, и $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}\right) \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку $\sup\limits_{x \in X} \left(f(x) - \underline{f}_n(x)\right) \leqslant \varepsilon^{(n)}$, $\sup\limits_{x \in X} \left(\overline{f}_n(x) - f(x)\right) \leqslant \varepsilon^{(n)}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для любой последовательности $\mathcal{A}$-измеримых функций $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$ функции $(\sup\limits_n f_n)(\cdot)$, $(\inf\limits_n f_n)(\cdot)$, $(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$ и $(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$ $\mathcal{A}$-измеримы и принадлежат $\mathcal{L}(X)$. ■

Всякое множество $A \in \mathcal{A}$ называется *событием*; последнее можно задать его и. ф. $\chi_A(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$. Любая функция $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ определяет *нечеткое событие* (ассоциированное с нечетким множеством, см. § 3) и называется его индикаторной функцией (и. ф.) [1])

Определение 2.1. *Мерой возможности*, или, короче, *возможностью*, назовем функцию $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, определенную равенством $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{A}$, ее значение $\mathrm{P}(A) \triangleq \mathrm{p}(\chi_A(\cdot)) \in [0, 1]$ назовем возможностью события $A \in \mathcal{A}$, шкалу $\mathcal{L} = \left([0, 1], \leqslant, +, \bullet\right)$ назовем шкалой значений возможности P.

Теорема 2.1. *Возможность* $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, *обладает следующими свойствами.*

1). *Для любых* A, $B \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{p}((\chi_A + \chi_B)(\cdot)) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B), \tag{2.2}$$

и, как следствие, $\mathrm{P}(X) = \mathrm{P}((X \setminus A) \cup A) = \max(\mathrm{P}(X \setminus A),\ \mathrm{P}(A))$, $A \in \mathcal{A}$. *Кроме того,* $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, *если* $A \subset B$ (*монотонность возможности*), *и, как следствие,* $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{p}((\chi_A \bullet \chi_B)(\cdot)) \leqslant \min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B)$, A, $B \in \mathcal{A}$.

2). *Возможность* $\mathrm{P}(\cdot)$ *счетно-аддитивна*: *для любой последовательности событий* A_1, A_2, …

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sup_n \mathrm{P}(A_n) \triangleq \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} \mathrm{P}(A_n). \tag{2.3}$$

[1]) В § 3 и 12 смысл терминов «нечеткое множество» и «нечеткое событие» будет проанализирован детально.

Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *и* $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то, как следствие счетной аддитивности и монотонности* $\mathrm{P}(\cdot)$, *получаем непрерывность* $\mathrm{P}(\cdot)$ *относительно такой сходимости*: $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_n \mathrm{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

3). $\overline{A} \triangleq \bigcap\limits_N \bigcup\limits_{n\geqslant N} A_n$ — *событие, каждая точка которого принадлежит бесконечно многим из* $A_1, A_2, \ldots$; *его возможность*

$$\mathrm{P}(\overline{A}) \leqslant \inf_N \mathrm{P}(\bigcup_{n\geqslant N} A_n) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{n\geqslant N} A_n) = \\ = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geqslant N} \mathrm{P}(A_n) \triangleq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n);$$

$\underline{A} \triangleq \bigcup\limits_N \bigcap\limits_{n\geqslant N} A_n$ — *событие, каждая точка которого принадлежит всем* $A_1, A_2, \ldots$, *исключая, быть может, конечное их число*; *его возможность*

$$\mathrm{P}(\underline{A}) = \sup_N \mathrm{P}(\bigcap_{n\geqslant N} A_n) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}(\bigcap_{n\geqslant N} A_n) \leqslant \\ \leqslant \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geqslant N} \mathrm{P}(A_n) \triangleq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n);$$

Так как $\underline{A} \subset \overline{A}$, *то* $\mathrm{P}(\underline{A}) \leqslant \mathrm{P}(\overline{A})$.
Если последовательность $A_1, A_2, \ldots$ *сходится* [1] *и* $A = \underline{A} = \overline{A} \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то* $\mathrm{P}(A) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *то есть возможность* $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ *полунепрерывна снизу. В частности, если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, *то* $A = \bigcap\limits_n A_n$ *и* $\mathrm{P}(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *но если* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *то* $A = \bigcup\limits_n A_n$ *и* $\mathrm{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

4). *Для любой сходящейся к* X *последовательности* $A_1, A_2, \ldots$ (*т.е. такой, что* $X = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant N} A_n = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n\geqslant N} A_n$) *последовательность* $\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(A_2), \ldots$ *сходится и ее предел равен* $\mathrm{P}(X)$, *т. е. возможность* $\mathrm{P}(\cdot)$ *непрерывна в* X, $\mathrm{P}(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *ибо согласно свойству* 3) $\mathrm{P}(X) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *а в силу монотонности* 1) $\mathrm{P}(\cdot)$ $\mathrm{P}(A_n) \leqslant \mathrm{P}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и поэтому* $\mathrm{P}(X) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

---

[1] Последовательность $A_1, A_2, \ldots$ называется сходящейся, если ее *нижний предел* $\underline{A} \triangleq \bigcup\limits_N \bigcap\limits_{n\geqslant N} A_n$ совпадает с *ее верхним пределом* $\overline{A} \triangleq \bigcap\limits_N \bigcup\limits_{n\geqslant N} A_n$, множество $A = \underline{A} = \overline{A}$ называется ее пределом. Это определение эквивалентно определению поточечной сходимости последовательности индикаторных функций $\chi_{A_1}(\cdot), \chi_{A_2}(\cdot), \ldots$: $\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\cdot) \equiv \chi_{\underline{A}}(\cdot) = \chi_{\overline{A}}(\cdot) \equiv \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\cdot)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\cdot) = \chi_A(\cdot)$.