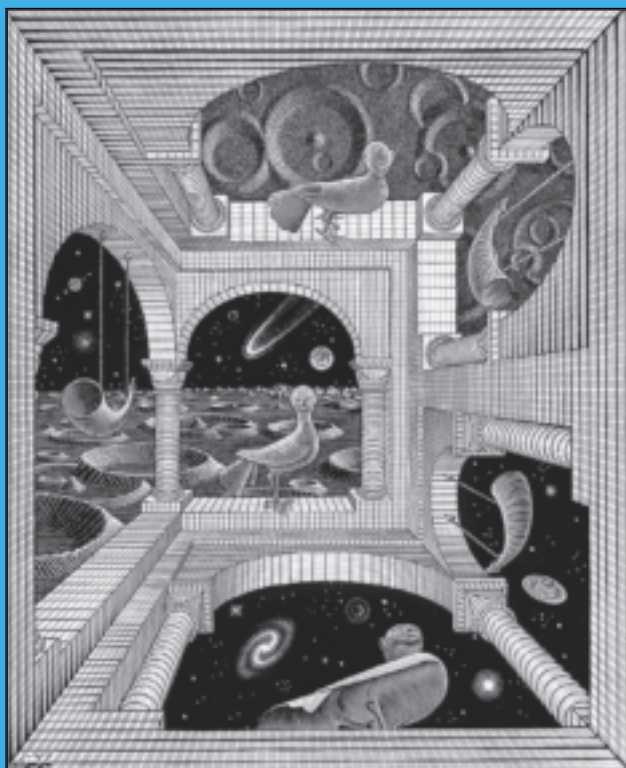


Н. М. Карпушина



**Занимательная математика:
гимнастика для ума или
искусство удивлять?**

ББК 22.12
83.3
УДК 51-78

Ответственный редактор Е. Л. Лозовская
Макет, оформление обложки, верстка З. А. Флоринская
Корректор Ж. К. Борисова
На обложке — картина М. Эшера «Иной мир», 1947 г.

Н. М. Карпушина

ВНЕ ФОРМАТА

Занимательная математика: гимнастика для ума или искусство удивлять?
— М.: АНО Редакция журнала «Наука и жизнь», 2013. — 288 с.

Книга охватывает обширный круг вопросов: от малоизвестных страниц истории науки и биографий ее популяризаторов до увлекательных исследований свойств чисел и фигур и применений математики на практике. В ней наглядно показано, как законы математики проявляются в природе, издавна используются в живописи и архитектуре, не говоря уже о повседневной жизни. И все это разбавлено множеством занимательных задач и головоломок — незаменимой пищей для ума, без которой немислимо ни одно издание подобного рода. Эта книга для тех, кому не чужда математика, кто любит всякие загадки и интеллектуальные развлечения и не прочь побывать в роли исследователя.

Издано при финансовой поддержке Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям в рамках Федеральной целевой программы «Культура России (2012—2018 годы)»

ISBN 978-5-904129-07-1



© Н. М. Карпушина, текст, 2013
© АНО Редакция журнала «Наука и жизнь», 2013
© З. А. Флоринская, оформление, обложка, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Увлечь читателя математикой	10
Неформально о главном.....	12

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ Житейская математика

ГЛАВА 1. КАК МЫ ВИДИМ

Что такое угол зрения.....	14
Опыт с монетами	15
Почему рельсы сходятся	16
Острый глаз.....	17
Под одним углом.....	18
Параллакс: знакомство с явлением.....	20
Вид из окна вагона.....	21

ГЛАВА 2. ОТ ТЕОРИИ — К ПРАКТИКЕ

Доверяй, но проверяй!	23
Наука о видении одним глазом	24
На службе у живописи	26
Между небом и землей.....	27
Простейшие угломеры	29
Недоступные расстояния.....	31
В зрительном зале.....	33

ГЛАВА 3. НЕПОСТИЖИМЫЙ СЛУЧАЙ

Любимчики фортуны	35
Заветная шестерка	36
«Бесплатная» лотерея.....	38
Народная игра	39
Непростительный промах.....	40
Доводы рассудка	42
Словарик.....	44

ГЛАВА 4. ВСЯКАЯ ВСЯЧИНА

Потеря времени	45
Все на праздник колбасы!	46
Кофейное топливо	47
Расплата за лишний вес	47
По закону золотого сечения?	47
Бесполезная реклама	48
История одного долга.....	48
Размер крыла	49
Рекордсмен поневоле	49
Вода из воздуха	50
Карта-невидимка	50
Булочник-мошенник.....	50
Ответы.....	52

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Неожиданная математика

ГЛАВА 1. «ЕСТЬ ТАКОЙ ЗАКОН ПРИРОДЫ...»

Дельный совет от удава	56
Надежная опора	57
Сколько ножек нужно столику?	58
Полезные конструкции	59

ГЛАВА 2. В ПОИСКАХ СЕМИЦВЕТИКА

Дивные творения природы	61
Trientalis, он же троичник, он же седмичник	62
Цветочные мотивы вокруг нас	63
Геометрия орнамента	65
И все-таки он делится!	66

ГЛАВА 3. СЕКРЕТЫ ДРЕВНИХ ЗОДЧИХ

Эффект иррадиации	69
Прямые или кривые?	71
Устойчивее и выше	72
По законам перспективы	73
Оригинальные находки	74

ГЛАВА 4. СТРАННОСТИ КАРТИН

Загадка Леонардо	76
Нереальные объекты	78
Нарушая соразмерность	79
Стоит или падает?	80
Запрещенное изображение	81
Два в одном	82
Ответ	84

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Числа и фигуры

ГЛАВА 1. ВОЛШЕБСТВО И МАГИЯ В КВАДРАТЕ

Из глубины веков	86
В западном искусстве	89
В европейской науке	91
Вопросы, вопросы... ..	92
Проще простого	94
Нет предела совершенству!	95
Делим на части	98

ГЛАВА 2. В КРУГЕ ФРАНКЛИНА

Из простых чисел	100
Прогрессии в квадрате	101

Занятные образцы.....	103
Двенадцать, сто восемьдесят, триста шестьдесят... ..	105
От прямоугольника Нарайаны до куба Эйлера	108
В задачах и головоломках	110
Гимнастика для ума	112
<i>Ответы</i>	114

ГЛАВА 3. ПАЛИНДРОМЫ И «ПЕРЕВЕРТЫШИ» СРЕДИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Задом наперед.....	115
Игры цифр	116
Примечательные пары	118
Числовой конструктор	119
Еще несколько фигур.....	121

ГЛАВА 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ «СМИТЫ»

Невероятное везение профессора Смита	124
Диковинки среди смитов.....	125
Заклученные в квадрат.....	127
Продолжим эксперимент!	129
Такие простые закономерности... ..	130

ГЛАВА 5. СООБЩЕСТВО РЕПЬЮНИТОВ

Увлечение Бернулли.....	132
Магия единицы	133
Вопросы делимости.....	134
Усложняем задачу.....	136
Закономерности разложения	137
Простота и периодичность	139
Череда вопросов.....	140
<i>Ответы</i>	142

ГЛАВА 6. ПОД ЗНАКОМ СИММЕТРИИ

Генератор палиндромов.....	143
В игру вступают степени	144
Семейство «12...n...21».....	145
Дальнейшие исследования	147
<i>Ответы</i>	149

ГЛАВА 7. ПОДЛИННАЯ ИСТОРИЯ ПАУКА И МУХИ

Внутри параллелепипеда.....	150
В стиле вольной интерпретации	152
Из угла в угол	153
Круговой путь.....	155
Петля, дуга, окружность	157
На цилиндрической поверхности	159
Pourquoi pas?	161
<i>Ответы</i>	163

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

Исторические зарисовки

ГЛАВА 1. РЕШЕТЧАТОЕ УМНОЖЕНИЕ

Наследие индусов	167
Как же он действует?	168
Палочки Непера	169
Машина Шиккарда	171

ГЛАВА 2. ВО ВЛАСТИ СЕЧЕНИЙ

Триада Менехма	173
Поперек конуса	174
Древняя рогулька	175
Догадка Тартальи	176
Инструмент да Винчи	177
Стеклорез-циркуль	179
Вездесущий эллипс	180
Ответы	183

ГЛАВА 3. ПОСТИГАЯ ЗАКОНЫ ВСЕЛЕННОЙ

Когда на помощь приходит геометрия	187
Законодатель неба	189
Природа затмения	190
Первый гелиоцентрист	192
Как Эратосфен измерил Землю	193
Далеко ли до Луны?	194
На фоне звезд	195
Вечные спутники	196

ГЛАВА 4. LIBER ABACI

Книга-энциклопедия	198
Заслуги и достижения Леонардо Пизанского	200
Универсальный задачник	202
Знакомые задачи из трактата Фибоначчи	203
Опередивший время	210

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

Творцы занимательной науки

ГЛАВА 1. ДАРОВИТЫЙ МИСТЕР ДОДЖСОН

Человек-загадка	212
Родом из детства	213
В стенах Крайст-Черч	215
Поклонник эпистолярного жанра	218
Из писем к детям	219
Раз задачка, два задачка	221
Талантливый фотограф и страстный театрал	222

Неутомимый выдумщик и изобретатель	224
Лингвист-экспериментатор.....	226
Как превратить косу в бант?	229

ГЛАВА 2. ТАЛАНТЛИВЫЙ ПОПУЛЯРИЗАТОР КЭРРОЛЛ

О пище для ума	231
Как избавиться от праздных мыслей	233
Utile dulci!	234
Математик и логик.....	237
Диаграммы и фишки	239
Задачи на силлогизмы	241
От диаграмм – к формулам	241

ГЛАВА 3. ЯКОВ ПЕРЕЛЬМАН: ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

Проба пера.....	244
Я.П. и другие... ..	245
Благодарный ученик.....	247
У истоков новых изданий	249
Сколько шкаликов в трех бочках?	250
На ниве просвещения	251
В жанре занимательной науки	253
За работу!	255
В стенах ДЗН	257
Сколько весит кирпич?.....	258
Фома неверующий.....	260
«Уважаемый профессор Перельман!»	261

ГЛАВА 4. ТОТ САМЫЙ MARTIN ГАРДНЕР

И это все о нем	265
Репортер, редактор, автор... ..	266
...и ведущий раздела в научном журнале	266
Журналист, мыслитель, критик	268
Корифей занимательной математики	269
Секрет успеха	270
Писатель и его читатель	271
Математика и игра.....	272
Пять простых, но каверзных задач	273
В знак благодарности	275
Десять зарисовок из жизни мастера	277
Ответы.....	283

Именной указатель	284
Предметный указатель	285

НЕФОРМАЛЬНО О ГЛАВНОМ

В основу книги легли эссе, статьи и заметки для детей, знакомых с математикой не понаслышке, и для взрослых, еще не успевших позабыть эту науку. Для тех, кто равнодушен к математике, но и не обременен специальными знаниями, а потому особо восприимчив к любым неожиданностям и вообще ко всему новому. И конечно, для тех, кто любит всякого рода загадки и головоломки и не отказался бы попробовать себя в роли исследователя.

Многие затронутые в книге вопросы, попавшие однажды в поле зрения, и для меня оказывались вновь. Не раз приходилось начинать работу буквально с чистого листа, не имея никакого представления о конечном результате. Состояние неопределенности рождало внутренний диалог в духе беседы Алисы с Чеширским Котом.

«Скажите, пожалуйста, куда мне отсюда идти?

— А куда ты хочешь попасть?

— Мне все равно, только бы попасть куда-нибудь.

— Куда-нибудь ты обязательно попадешь. Нужно только достаточно долго идти».

Всякий раз, запасаясь терпением и положившись на интуицию, приходилось куда-нибудь идти — искать ответы на самые разные вопросы. И если исходным пунктом всегда была математика, то конечный пункт был непредсказуем. Порой начатые изыскания приводили к неожиданным находкам и открытиям. Каждая глава, подобно пазлу, складывалась из множества разрозненных примеров, историй и зарисовок. И когда все части, наконец, удавалось собрать воедино и обозреть картину целиком, в пору было удивиться: «Ай да математика! Ай да наука! Неисповедимы пути твои!»

Книга охватывает обширный круг вопросов: от малоизвестных страниц истории науки и биографий ее популяризаторов до увлекательных исследований свойств чисел и фигур и применения математики на практике. И все это разбавлено множеством занимательных задач и головоломок — незаменимой пищей для ума, без которой невозможно ни одно издание такого рода.

Всего в книге пять частей:

**ЖИТЕЙСКАЯ МАТЕМАТИКА,
НЕОЖИДАННАЯ МАТЕМАТИКА,
ЧИСЛА И ФИГУРЫ,
ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАРИСОВКИ,
ТВОРЦЫ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ.**

В первой, второй и четвертой частях основное внимание уделено связям математики с разными областями знаний и сферами деятельности. Мы оценим знакомые явления с точки зрения математики, посмотрим, как ее законы проявляются в природе, издавна используются в живописи и архитектуре, не говоря уже о повседневной жизни, и конечно, обратимся к истории науки. Третья часть книги — «самая математическая», поскольку содержит больше всего оригинальных задач и интеллектуальных развлечений, не требующих, однако, каких-то особых познаний и доступных даже школьнику. Наконец, пятая часть — дань уважения и признательности трем выдающимся популяризаторам науки, представляющим разные эпохи и направления в жанре занимательной математики: Льюису Кэрроллу, Якову Перельману и Мартину Гарднеру. Каждому из них посвящена не одна публикация. Однако в большинстве своем это лишь формальные жизнеописания. За их пределами осталось, пожалуй, самое любопытное: круг интересов и увлечений писателей (выходящий далеко за рамки науки и ее популяризации), их творческая кухня и малоизвестные житейские истории, в которых все трое предстают перед нами, что называется, без глянца. Восполним этот пробел хотя бы отчасти.

Как говорил один из героев Анатоля Франса, чтобы переварить знания, надо поглощать их с аппетитом. Так пусть же отменный умственный аппетит никогда не покидает тебя, читатель!

Автор

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Житейская математика

ГЛАВА 1

Как мы видим

— Взгляни-ка на дорогу. Кого ты там видишь?

— Никого, — сказала Алиса.

— Мне бы такое зрение! — заметил Король с завистью. — Увидеть Никого! Да еще на таком расстоянии!

Л. Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

Почему чтобы разглядеть детали висящей на стене картины, мы подходим к ней ближе? Отчего устремляющиеся вдаль рельсы кажутся пересекающимися в воображаемой точке? И можно ли разглядеть спичечную головку с расстояния 10 м? Ответить на эти вопросы помогает наука геометрия, проясняющая некоторые особенности зрительного восприятия.

ЧТО ТАКОЕ УГОЛ ЗРЕНИЯ

Еще Евклид в сочинении «Оптика» говорил: мы видим предмет, когда на него попадают исходящие из глаза и распространяющиеся по прямым линиям лучи зрения. Они образуют «пирамиду зрения» с вершиной в глазу и основанием на поверхности рассматриваемого предмета. Среди множества всех касающихся предмета лучей зрения выделяют два, которые проходят через его крайние точки (как правило, это концы отрезка, являющегося высотой). Они образуют угол, под которым предмет виден целиком, — *угол зрения* (рис. 1). Как и всякий плоский угол, он измеряется в градусах, минутах, секундах или в радианах.

По отношению к наблюдаемому объекту употребляют также термин *угловой размер*. Так поступают, в частности, в аст-

рономии. Например, фраза «Угловой размер Луны равен $0,5^\circ$ » означает, что под углом в полградуса земной наблюдатель видит диаметр лунного диска.

Рассматривая один и тот же предмет из различных точек, мы видим его под разными углами. Иначе говоря, угловой размер предмета определен неоднозначно (в отличие от линейных размеров: длины, ширины и высоты). Его величина зависит от удаленности предмета от глаза, в чем легко убедиться экспериментально. Угловой размер предмета определяют при помощи специальных приборов. Например, в геодезии для измерений на местности используют теодолит, а в астрономии для нахождения высоты светил над горизонтом — секстант.

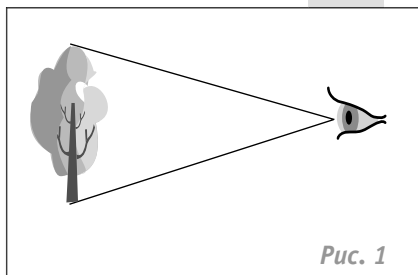


Рис. 1

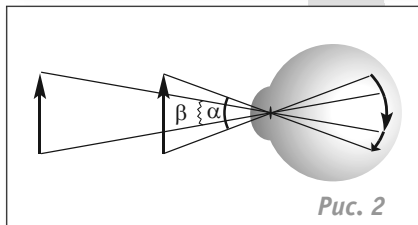


Рис. 2

ОПЫТ С МОНЕТАМИ

Попробуйте сравнить на глаз видимый размер двух одинаковых монет, удаленных от глаза на 50 см и на 1 м. Во сколько раз вторая монета кажется меньше? Запомните ответ, проверим его позже, а пока разберемся, почему чем дальше от глаза находится предмет, тем меньше по размеру он кажется.

Физик объяснил бы это так: угол, под которым виден предмет, уменьшается при его удалении от глаза, и изображение предмета на сетчатке занимает меньше места (рис. 2). Математика такой ответ вряд ли устроит — его нужно обосновать. Почему же уменьшается этот угол, а вместе с ним и размер изображения на сетчатке?

Пусть AB и AC — изображения на сетчатке*

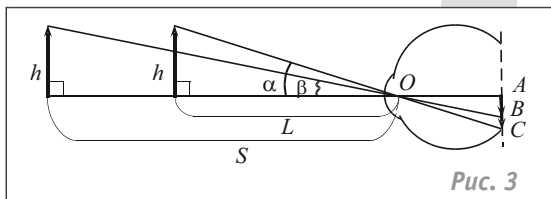


Рис. 3

* Для простоты изложения поверхность сетчатки изображена плоской, а не сферической и один из лучей зрения выбран так, что он перпендикулярен высоте предмета.

предмета высотой h , удаленного от глаза на расстояния S и L соответственно, тогда $\beta < \alpha$ и $AB < AC$ (рис. 3). Действительно, поскольку $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{AB}{AC} = \frac{L}{S} < 1$, то $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \alpha$, откуда $\beta < \alpha$ (так как мы имеем дело с острыми углами, а для малых углов вообще можно считать $\operatorname{tg} \beta = \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$) и, кроме того, $AB < AC$.

Вернемся к вопросу, с которого начали. И опыт, и рассуждения подсказывают, что углы, под которыми видны монеты, а значит, и размеры изображений на сетчатке должны отличаться, как и расстояния монет от глаза, в два раза. В самом деле, если $S = 2L$, то $AB = \frac{AC}{2}$. Поэтому вторая монета кажется вдвое меньше первой. Более того, при изменении расстояния в другое число раз результат будет аналогичным, поскольку, как мы убедились, *величина угла зрения обратно пропорциональна расстоянию до предмета*.

От величины угла зрения зависит также, насколько детально можно рассмотреть предмет. Чем больше этот угол, тем крупнее изображение каждого фрагмента на сетчатке глаза, оно «захватывает» все больше нервных окончаний, благодаря чему мы начинаем различать в предмете подробности, которых не видели раньше. Поэтому, чтобы разглядеть детали висящей на стене картины или мелкий шрифт на странице книги, нужно увеличить угол зрения, подойдя к холсту ближе (приблизив текст к глазам). А если предмет слишком мал, чтобы рассмотреть его как следует невооруженным глазом, придется воспользоваться лупой или другим оптическим прибором, который позволит увидеть его под большим углом.

ПОЧЕМУ РЕЛЬСЫ СХОДЯТСЯ

По мере удаления предмета от глаза мы сначала перестаем различать его детали, затем очертания, наконец, наступает момент, когда предмет становится настолько мал, что воспринимается как точка. Вспомните часто наблюдаемую зрительную иллюзию: две «убегающие» вдаль параллельные линии, например железнодорожные рельсы или края шоссе, кажутся сходящимися в некоторой точке на горизонте. При этом сама точка представляется нам бесконечно удаленной и недостижимой. Такое же впечатление создают ряды объектов, расположенных



по краям прямолинейной дороги: фонарные или телеграфные столбы, деревья аллеи, опоры свода станции метро. Зрение словно пытается убедить нас, что вопреки законам геометрии параллельные прямые пересекаются.

Все дело в рассмотренной выше особенности зрительного восприятия. Объект (шпала), находящийся на различных расстояниях от наблюдателя, виден под разными углами зрения. При удалении вдоль параллельных прямых (рельсов) его угловой размер уменьшается, что приводит к видимому уменьшению расстояния между линиями (оно определяется величиной шпалы). Очевидно, когда угол зрения достигает некоторой «критической» величины, глаз перестает различать удаляющийся объект как тело, имеющее размеры, и прямые «сливаются» для него в одну точку. Иначе говоря, существует предельное значение угла зрения — наименьшее значение, при котором глаз способен видеть раздельно две точки.

ОСТРЫЙ ГЛАЗ

Так и есть. Для здорового глаза при нормальном освещении это значение равно примерно $1'$. Под таким углом с расстояния 1,7 м видна типографская точка диаметром всего 0,5 мм. А вот разглядеть спичечную головку размером 2,5 мм с расстояния

10 м невозможно: угол зрения достигает предельного значения уже на расстоянии 8,5 м.

Способность человеческого глаза различать две близко расположенные точки называют *остротой зрения*. Ее определяют как отношение $1'$ к предельному значению угла зрения испытуемого. Считается, что нормальная острота зрения равна единице. Однако у некоторых людей она достигает 1,5—2 единиц и более. Они в буквальном смысле слова обладают острым глазом и видят окружающий мир «дальше и глубже», чем обычный человек.

Отменным зрением могли бы похвастаться древние охотники и воины, основным оружием которых на протяжении многих столетий был лук. Славой искусных лучников пользовались в разное время древнеегипетские, скифские, русские, английские воины. Известно, например, что последние с расстояния 100 м могли попасть стрелой в стрелу с древком толщиной всего 1 см. Только люди с очень острым зрением способны разглядеть на таком расстоянии мишень столь малого диаметра.

Необычайно острым зрением обладали и тульские мастера — герои сказа Николая Лескова «Левша», подковавшие аглицкую блоху. По легенде, мастера изготовили для блохи крошечные подковки и выбили на них свои имена. А особо отличился Левша: он сделал к подковкам такие маленькие гвоздики, что их и в микроскоп нельзя было разглядеть. И, кстати, именно остротой зрения Алисы, увидевшей на дороге Никого, восхитился Белый Король.

ПОД ОДНИМ УГЛОМ

На практике приходится сравнивать относительные размеры сразу нескольких находящихся в поле зрения предметов. Если последние удалены от глаза на одно и то же расстояние и расположены достаточно близко друг от друга, их сравнить легко. В этом случае мы редко ошибаемся в своей оценке: более высокий предмет виден под большим углом, поэтому и кажется выше. В самом деле, если $H > h$, то $\text{tg } \beta < \text{tg } \alpha$, $\beta < \alpha$ (рис. 4). Сложнее провести подобную оценку, когда предметы находятся на различных расстояниях от глаза.

Часто можно наблюдать под одним и тем же углом зрения предметы разного размера (рис. 5). В этот момент их видимые размеры кажутся одинаковыми, в чем легко убедиться на

простом опыте. Если выстроить по росту несколько матрешек и смотреть на них со стороны самой маленькой фигурки, а затем начать медленно отходить назад, не изменяя направления взгляда, то можно наблюдать, как матрешки будут постепенно «сливаться», загораживая одна другую. Наконец, на некотором расстоянии будет видна только одна из них — та, что расположена ближе остальных. Если теперь сместить фигурки в стороны так, чтобы все они были полностью видны, матрешки будут казаться одного размера.

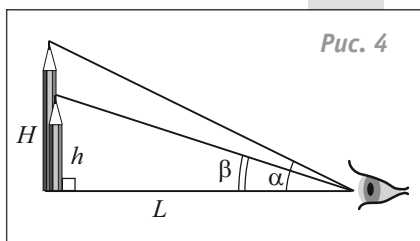


Рис. 4

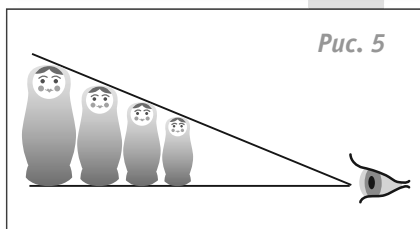


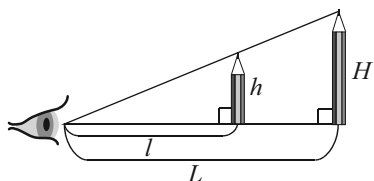
Рис. 5

Аналогичный опыт легко провести с любыми имеющимися под рукой предметами (наибольшего визуального эффекта удастся достичь, если взять предметы одинаковой формы, скажем, спичку и карандаш или орех и апельсин). Тогда достаточно сравнить их линейные размеры. Результат будет таким же.

Похожее явление можно наблюдать и в природе. Так, во время полного солнечного затмения Луна целиком закрывает собой Солнце, и размеры их кажутся одинаковыми, поскольку оба тела видны с Земли под одним углом. Случается подобное и с некоторыми двойными звездами. Если плоскости орбит входящих в их состав звезд проходят через нашу планету, то при «полном затмении» главной звезды менее ярким спутником они обе оказываются видны земному наблюдателю под одним углом. Правда, последний настолько мал, что даже в самые мощные телескопы нельзя разглядеть звезды в форме дисков, как мы видим ту же Луну или Солнце. Поэтому о наступлении «полного звездного затмения» можно судить по уменьшению блеска (видимой яркости) звезды, которая в этот момент словно ирриво подмигивает нам.

Во всех рассмотренных примерах мы имеем дело с подобными фигурами либо соответствующими отрезками (высотами, диаметрами) различных по форме фигур. Поэтому можно утверждать, что если два предмета видны под одним углом зрения, то их линейные размеры отличаются во столько же раз, во

Рис. 6



сколько раз отличаются расстояния до предметов (рис. 6): $\frac{H}{h} = \frac{L}{l}$.

Это равенство позволяет не только сравнить расстояния, а также относительные размеры двух объектов, наблюдаемых под одним углом зрения, но и найти любую из входящих в него величин по трем остальным.

ПАРАЛЛАКС: ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЕМ

Возьмите карандаш и держите его перед собой на вытянутой руке. Посмотрите на него сначала правым, потом левым глазом. Что вы заметили? Теперь отодвиньте руку немного в сторону и, продолжая удерживать ее в поле зрения, повторите опыт, попеременно закрывая то один, то другой глаз. Опять тот же эффект? Карандаш словно перескакивает с одного места на другое! Почему?

Это явление поясняет рис. 7, на котором точки L и P обозначают зрачки глаз, а точки B и C — видимые положения конца карандаша: *при изменении точки наблюдения* (сначала была P , затем стала L) *изменяется видимое положение рассматриваемого объекта* (с B на C), что и приводит к эффекту перескакивания.

Видимое изменение положения предмета вследствие перемещения глаза наблюдателя из точки A в точку B называется параллактическим смещением, или просто *параллаксом* (от греч.

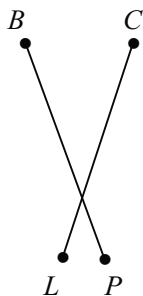


Рис. 7

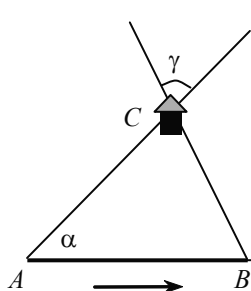


Рис. 8

parallaxis — отклонение), а длина отрезка AB — его базисом. Параллакс характеризуется величиной угла γ между лучами зрения, направленными на предмет из точек A и B (рис. 8). Если в качестве базиса выбрано расстояние между зрачками

глаз человека, говорят о параллаксе зрения, имея в виду различие в восприятии предмета левым и правым глазом.

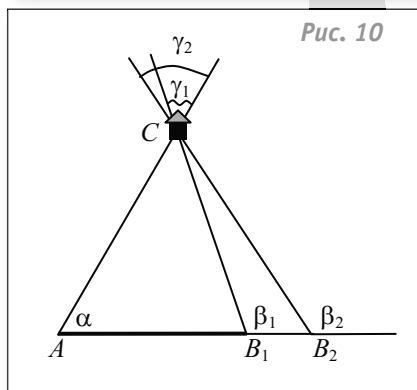
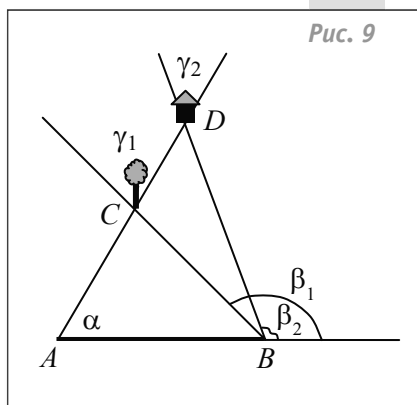
ВИД ИЗ ОКНА ВАГОНА

Как вычислить угол γ ? Представьте, что, сидя в поезде, вы движетесь из точки A в точку B и наблюдаете из окна вагона за некоторым объектом, например за домом, расположенным на пригорке в точке C . Дом виден из точек A и B под углами α и β к направлению движения (см. рис. 8). Углы ACB и γ равны как вертикальные, а из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что $\angle ACB = \beta - \alpha$, откуда $\gamma = \beta - \alpha$.

Какими свойствами обладает параллакс? Иначе говоря, от чего зависит величина угла γ ? Попробуем ответить на вопрос, продолжив наше воображаемое путешествие. Из окна вагона видно множество объектов, удаленных от поезда на различные расстояния. Кажется, что предметы перемещаются с разными скоростями (на самом деле, конечно, это мы проносимся мимо них), и чем дальше находится предмет, тем медленнее он «движется». Почему?

Рис. 9 иллюстрирует, как для одного и того же базиса AB при изменении положения луча зрения, направленного из точки A на объекты C и D , изменяется соответствующий угол между направлением движения и лучом зрения, выходящим уже из точки B . Так как $\beta_2 < \beta_1$, то $\gamma_2 < \gamma_1$, то есть параллактическое смещение более удаленного объекта меньше.

Еще ярче проявляется обнаруженная закономерность при наблюдении за проплывающим над головой облаком или за солнцем — оно кажется словно застывшим на небе. Итак, чем дальше от движущегося наблюдателя находится предмет, тем меньше его параллакс, то есть



видимое перемещение в пространстве. Таким образом, параллакс является важным показателем удаленности предметов, поэтому он широко используется в геодезии и астрономии для измерения недоступных расстояний.

Разберемся, как влияет на параллактическое смещение увеличение длины базиса. Из рис. 10 ясно: если $AB_2 > AB_1$, то $\beta_2 > \beta_1$, поэтому $\gamma_2 > \gamma_1$. Таким образом, *при увеличении базиса параллакс увеличивается.* Это приводит к тому, что видимые какое-то время объекты «выпадают» из поля зрения движущегося наблюдателя, а их место занимают новые.

А теперь попробуйте ответить на такие вопросы. Можно ли утверждать, что любые два объекта, расположенные на прямой, параллельной базису AB , имеют одинаковый параллакс? Если смотреть одним глазом на вытянутый перед собой палец руки, медленно поворачивая при этом голову из стороны в сторону, то можно заметить, что палец перемещается в противоположном движению головы направлении относительно фона удаленных предметов. Как вы это объясните?

Мы обсудили лишь некоторые особенности восприятия глазом окружающего мира и дали им геометрическое толкование, ограничившись примерами из повседневной жизни. Между тем закономерности зрения издавна широко используются на практике. Об этом расскажем подробнее дальше.

ГЛАВА 2

От теории — к практике

— Все страньше и страньше! — воскликнула Алиса. От изумления она совсем забыла, как нужно говорить.

Л. Кэрролл. Алиса в Стране чудес

Мы раскрыли лишь несколько секретов зрения и изложили «теорию вопроса» с точки зрения геометрии. Но даже этих знаний вполне хватит как для объяснения многих наблюдаемых явлений и оптических иллюзий, так и для решения самых разных задач, связанных с понятием угла зрения.

ДОВЕРЯЙ, НО ПРОВЕРЯЙ!

С давних пор человек не только поражался обманам зрения, но и сознательно прибегал к некоторым из них в своей деятельности. Немало примеров тому имеется в искусстве — архитектуре* и живописи. Большой интерес к оптическим иллюзиям проявляли в разное время и представители естественных наук, в частности физики и астрономы, которых всегда волновала надежность визуальных наблюдений. Сами ученые создали немало обманчивых картинок, наглядно демонстрирующих, сколь ограничены возможности человеческого глаза.

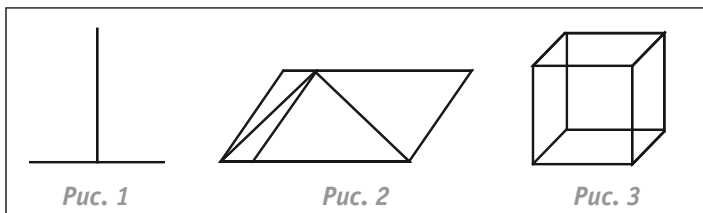


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Вот несколько классических образцов зрительных иллюзий, связанных с геометрическими фигурами. Взгляните на Т-образную фигуру (рис. 1), состоящую из двух отрезков. Сравните их на глаз. Вам кажется, что вертикальный отрезок длиннее гори-

* Подробнее об этом см. в главе «Секреты древних зодчих» второй части книги.

зонтального? На самом деле они равны, в чем легко убедиться, воспользовавшись циркулем или линейкой. А что скажете о длинах диагоналей параллелограммов (рис. 2)?

Приведем пример зрительной иллюзии другого рода. Перед вами изображение каркаса куба (рис. 3). С какой стороны вы смотрите на фигуру: сверху или снизу? А может быть, сбоку? При длительном наблюдении происходит удивительная трансформация: кажется, что грани куба все время меняют свое положение! При этом взгляд фиксируется то на одной, то на другой грани.

Причины одних зрительных иллюзий давно установлены, других — до конца не выяснены до сих пор. Так, на восприятие длины и кривизны линий значительное влияние оказывают их положение, размеры фигур, в которые они включены, и наличие прилегающих или пересекающих линий. Например, длину горизонтального отрезка глаз всегда оценивает точнее, чем вертикального, который выглядит больше, чем есть на самом деле. При визуальном сравнении диагоналей параллелограммов на рис. 2 кажется, что у левого параллелограмма диагональ короче, хотя она такая же, как у правого. В данном случае свойство всей фигуры мы ошибочно переносим на ее элемент.

Иллюзия с кубом имеет иное объяснение. Дело в том, что любое изображение может быть истолковано по-разному, однако зрительная система человека отдает предпочтение наиболее привычной и вероятной интерпретации. Для данного изображения куба равновероятны сразу несколько таких интерпретаций, поскольку оно не содержит точных признаков того, какие точки находятся ближе (выше) других. Поэтому наша зрительная система и колеблется в выборе решения: видимые образы периодически сменяют друг друга.

Вспомните, как обычно избавляются от этой зрительной иллюзии и добиваются однозначности в восприятии рисунка куба. Невидимые ребра, то есть те из более удаленных ребер, что заслонены от взгляда передней гранью куба, выделяют особо — пунктиром, тем самым придавая изображению глубину.

НАУКА О ВИДЕНИИ ОДНИМ ГЛАЗОМ

Вопросы изображения на плоскости пространственных фигур с давних пор волновали не только геометров, но и художников, стремившихся научиться рисовать трехмерные объекты на

двумерном холсте. Как писал Леонардо да Винчи (1452—1519), «первое намерение живописца сделать так, чтобы плоская поверхность показывала тело рельефным и отделяющимся от этой плоскости».

Художники хотели вызвать у зрителя ощущение пространства, находящегося за плоскостью картины. Последняя должна была играть роль своеобразного окна, в котором окружающий мир предстал бы таким, каким мы его видим сквозь прозрачное стекло. Для этого необходимо было найти метод изображения объемных тел, который не только отражал бы их структуру и взаимное расположение в пространстве, в том числе удаленность от наблюдателя, но и учитывал бы механизмы работы человеческого глаза. Таким методом стала линейная перспектива (от лат. *perspicio* — ясно вижу), которую иногда справедливо называют наукой о видении одним глазом.

Разработанная в соответствии с особенностями зрительного восприятия, линейная перспектива позволяет изобразить видимый предмет наиболее реалистично. При взгляде на картины, написанные по ее законам, возникает ощущение, что рассматриваешь трехмерную сцену. Как же создается столь поразительная иллюзия пространства? Вспомним: чем дальше от глаза находится предмет, тем меньше он кажется. Учитывая эту особенность зрения, художник рисует на заднем плане предметы и человеческие фигуры меньшего размера, чем на переднем, создавая впечатление их разной удаленности и добиваясь тем самым глубины изображения. Визуальный эффект усиливают сходящиеся в воображаемой точке параллельные линии.

Перспектива рассчитана на фиксированную точку зрения, поэтому, чтобы полнее ощутить ее действие, следует рассматривать картину с определенной позиции. Причем одним глазом, который, как советовал зрителю Леонардо да Винчи, должен находиться на таком же расстоянии от полотна, той же высоте и смотреть в том же направлении, что выбрал для себя художник, делая набросок.

А вот самому художнику, желающему видеть, насколько его картина соответствует предмету, срисованному с натуры, Леонардо рекомендовал сравнивать изображение на холсте с отражением предмета в зеркале, поскольку последнее «содержит в себе истинную [объемную, трехмерную] картину на [плоской] поверхности; и совершенная картина, исполненная на поверхности какой-либо плоской материи, подобна поверхности зеркала».



А. Дюрер. Перспектограф. 1525 г.

Также Леонардо описал *перспектограф* — приспособление для построения перспективного изображения предметов и людей, позже получившее известность благодаря гравюрам Дюрера. На стекле с квадратной сеткой художник вычерчивал видимый образ (разделенный на фрагменты), чтобы затем перенести его на разграфленную бумагу; при этом дополнительно он мог использовать окулярную шкалу, как в оптическом приборе.

НА СЛУЖБЕ У ЖИВОПИСИ

С точки зрения геометрии линейная перспектива — это способ изображения фигур, основанный на применении центрального проектирования. Рассмотрим задачу на построение перспективного изображения, или центральной проекции, фигуры (от лат. *projectio* — бросание вперед). Пусть выбрана плоскость проекций π , на которой строится изображение, и задан центр проекции — точка O , ей не принадлежащая. Тогда произвольная точка M фигуры будет проецироваться в точку M'

пересечения прямой OM с плоскостью π . Ясно, что при разных положениях плоскости π получатся различные изображения одной и той же фигуры.

В живописи плоскость проекций (полотно картины) обычно находится между центром проекции (глазом художника) и объектом, так что точка M' оказывается между точками O и M . При этом плоскость π перпендикулярна предметной плоскости α , на которой располагаются изображаемые объекты.

Итак, каждому художнику, пишущему в реалистической манере, приходится решать геометрическую задачу на построение центральной проекции объектов на картинную плоскость. Очевидно, что точки основания картины (лежащие на линии пересечения плоскостей α и π) проецируются в себя. На рис. 4 показано, как получается изображение произвольной точки M плоскости α (цифры 1—4 указывают порядок проведения прямых).

Если точка K не лежит в предметной плоскости, то сначала из нее опускают перпендикуляр на α (отрезок KM на рис. 4), затем для его основания выполняют построения 1—3. Наконец, проводят прямую KO , пересечение которой с плоскостью π и есть изображение точки K .

Вообще, построение центральной проекции фигуры — задача не простая. Она рассматривается в одном из разделов прикладной математики — начертательной геометрии, изучающей пространственные фигуры при помощи построения их изображений на плоскости проекций. Начертательная геометрия широко применяется в инженерном деле, строительной практике, в архитектуре и живописи.

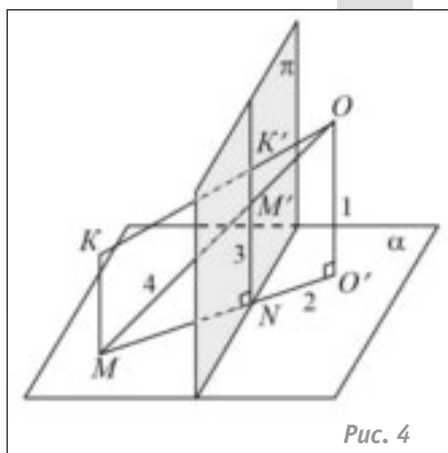


Рис. 4

МЕЖДУ НЕБОМ И ЗЕМЛЕЙ

Находясь на открытом пространстве, на равнине или в море, можно наблюдать вокруг доступную взору часть земной поверхности. Ее граница — линия, визуально разделяющая небо и землю, называется видимым горизонтом. Всякий раз при по-

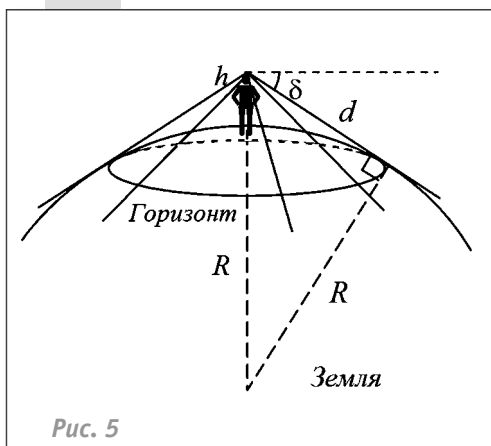


Рис. 5

пытке приблизиться к ней в любом направлении, линия перемещается вместе с нами, оставаясь недостижимой. Что это: еще одна зрительная иллюзия?

На этот раз нет. Линия горизонта не только существует, но и имеет вполне определенную форму и длину. Из-за ограниченности поля зрения взору доступна лишь ее небольшая часть, которую глаз воспринимает как прямую. На самом деле эта линия

— замкнутая кривая. Она состоит из точек касания выходящих из глаза в разных направлениях лучей зрения с земной поверхностью, а все такие точки образуют окружность (рис. 5).

А вот то, что линия горизонта находится на уровне глаз — на высоте h , нам только кажется, она всегда расположена ниже. Обман зрения объясняется тем, что рост человека ничтожно мал по сравнению с размером видимого участка земли, который можно считать плоским. Поэтому угол δ между лучами зрения, один из которых параллелен плоскости земли, а другой ее касается (см. рис. 5), столь мал, что неуловим для глаза.

Желая обозреть окрестности, мы взбираемся на близлежащий холм или горку, уверенные, что оттуда дальше видно. Так и есть, но почему? Этому имеется простое геометрическое объяснение. Дальность видимого горизонта, то есть расстояние d от глаза до линии горизонта, можно вычислить по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Поскольку высота h чрезвычайно мала по сравнению с радиусом Земли — R , слагаемым h^2 можно пренебречь и считать

$$d = \sqrt{2Rh} \approx 113\sqrt{h}.$$

Отсюда следует, что чем выше над землей расположена точка наблюдения, тем дальше и больше вокруг из нее видно. В частности, значение d зависит от роста. Например, если Гулливер мог видеть окружающую территорию в радиусе 3 мили, то

перед жителями Лилипутии и Бробдингнега она простиралась в радиусе 0,9 мили и 10,4 мили соответственно. В реальности разница, конечно, не столь велика и заметна глазу.

Полученная формула позволяет не только оценивать дальность горизонта*, но и судить о том, какая величина растет быстрее и насколько: h или d . С увеличением высоты подъема в k раз дальность горизонта увеличивается в $\sqrt{k}$ раз, что гораздо медленнее, чем может показаться поначалу. Так, если h станет больше в два раза, то d увеличится почти наполовину, а если h возрастет в сто раз, то d — только в десять.

Интересно, что просчет в оценке расстояния вызван не обманом зрения, а интуицией. Она же является причиной другой пространственной ошибки: большинству людей кажется, что площадь круга, ограниченного линией горизонта, измеряется сотнями, а то и тысячами квадратных километров. Однако это не так. Для стоящего на равнине человека среднего роста площадь обозреваемого участка земли составляет примерно 70 км². И в том и в другом случае доверять следует, конечно, математическим расчетам.

ПРОСТЕЙШИЕ УГЛОМЕРЫ

Обратимся теперь к астрономическим наблюдениям. В древности высоту небесных светил (угол между направлением на светило и плоскостью истинного горизонта) и угловые расстояния (углы между любыми двумя видимыми объектами) определяли при помощи примитивных инструментов, принцип действия которых основан на понятии угла зрения.

Один таких инструментов — посох Якова, предшественник современного секстанта. Он состоял из стержня и скользящей по нему поперечной рейки. На стержень были нанесены деления, которые соответствовали разным углам (для разметки требовался транспорт). Наблюдатель подносил один конец посоха к глазу, другой направлял в сторону светила и затем перемещал рейку до тех пор, пока два ее конца не касались линии горизонта и светила (рис. 6), после чего оставалось «снять показания» — посмотреть, какому делению на стержне соответствует рейка. Посох Якова легко сделать своими руками, он вполне годится для приближенного измерения углов в любой плоскости.

* Расчет делается чисто геометрический, не учитывающий физических факторов, которые на практике могут по-разному влиять на дальность видимого горизонта.