Абрашкин А.А.
Якубович Е.И.

Вихревая динамика в лагранжевом описании

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 532.5
ББК 22.253
А 16

Абрашкин А. А., Якубович Е. И. **Вихревая динамика в лагранжевом описании.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 176 с. — ISBN 5-9221-0725-9.

Изучаются проблемы аналитической динамики вихревых образований в жидкости и волн на воде в лагранжевых переменных. Приведен обзор всех известных примеров лагранжевого описания движений жидкости. Предложены новые подходы к исследованию распределенных вихревых течений, основанные на использовании комплексных функций (плоские движения) и матрицы Якоби (пространственные движения). Найдены и проанализированы классы точных решений уравнения Эйлера. Рассмотрены их приложения для описания конкретных типов движений: одиночного плоского вихря, пары вихрей, вихревых шнуров во вращающейся жидкости и т.д. Для изучения волн на воде предложен метод модифицированных лагранжевых координат. На его основе построена слабонелинейная теория вихревых волн на воде. Найдены и исследованы свойства волновых возмущений, распространяющихся на поверхности сдвигового потока, трехмерных вихревых волн (пространственных волн Гуйона), стоячих вихревых волн и пакета волн в слабозавихренной жидкости. Дан вывод новой формы уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа.

Книга рассчитана на специалистов в области гидромеханики, теоретической физики, математики, а также на аспирантов и студентов.

ISBN 5-9221-0725-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

II. Новые методы и подходы

Предисловие

Предлагаемая монография посвящена вопросам динамики вихревых течений. Движение жидкости изучается в переменных Лагранжа. Это отличительная особенность книги.

Гидродинамики обычно предпочитают пользоваться эйлеровым описанием. К примеру, в ставших классическими учебниках Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, Л.Г. Лойцянского и Дж. Бэтчелора уравнения гидродинамики в форме Лагранжа даже не приводятся. В качестве исключений можно указать фундаментальный труд Г. Ламба и двухтомник Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля и Н.В. Розе, но и там лагранжевым переменным посвящено лишь считанное число параграфов. Для решения некоторых типов задач использовать лагранжевые переменные, однако, явно предпочтительнее. Доказательством тому служит, в частности, вышедшая в 1992 году книга В.К. Андреева «Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей». Большая часть задач в ней анализируется с применением лагранжевых координат. В нашей книге будет подробно продемонстрировано, что в лагранжевых переменных удобно описывать не только течения со свободной границей, но и некоторые типы вихревых движений.

Монография адресована всем интересующимся теоретической гидродинамикой, и потому включает ряд общеобразовательных разделов по лагранжевому описанию течений. Во всяком случае, нам бы хотелось, чтобы читатель рассматривал наш труд как своеобразное введение в лагранжеву гидродинамику.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00695). Авторы выражают признательность «Фонду содействия отечественной науке» за поддержку Абрашкина А.А.

А.А. Абрашкин, Е.И. Якубович

Май 2005 г.

Введение

В настоящей монографии изучаются вопросы динамики распределенных вихревых образований в несжимаемой жидкости. Они полностью лежат в русле одного из центральных направлений развития механики жидкости, которое называют динамикой вихрей или вихревой динамикой.

Исторически начало вихревой динамике как самостоятельному направлению гидромеханики положила, по-видимому, статья Гельмгольца 1858 года [1], в которой он сформулировал свои знаменитые теоремы о завихренности. Девятью годами позже Тэйт перевел работу Гельмгольца с немецкого на английский язык [2], чем зафиксировал пристальный интерес европейских механиков того времени к вопросам динамики завихренности.

Примерно в эти же годы Кельвин активно разрабатывает основы описания конкретных вихревых течений [3–6]. К примеру, он нашел скорость распространения вихревого кольца в однородной безграничной жидкости [4] и подробно изучил линейные колебания на поверхности цилиндрического вихря [5]. Развивая аналогию между уравнениями электродинамики и гидродинамики, Кельвин выдвинул вихревую теорию строения вещества [6]. Разумеется, с современной точки зрения она выглядит явно неудовлетворительной, но сам факт ее существования убедительно свидетельствует о том важном значении, которое придавали классики науки фактору завихренности течений.

Период времени, охватывающий последние десятилетия XIX — первые десятилетия XX столетия, можно назвать «золотым веком» вихревой динамики. На этот промежуток приходится основная масса наиболее ярких аналитических результатов — таких, например, как эллиптический вихрь Кирхгофа [7], вихри Хилла [8], Чаплыгина–Ламба [9, 10], тороидальный вихрь Максвелла [11], интегрируемые случаи движения точечных вихрей [11–14], эллипсоидальные фигуры равновесия [11], неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и знаменитая гипотеза Жуковского. Во второй и третьей четверти XX столетия внимание исследователей к проблемам вихревого движения жидкости заметно снизилось. В вышедшем в 1970 году четырехтомнике «Механика в СССР за 50 лет» [15] это направление гидромеханики даже не было представлено отдельной статьей. Интерес к задачам вихревой динамики в 60-х — начале 70-х годов поддерживали, главным образом, физики, занимавшиеся изучением квантованных вихрей в сверхтекучих жидкостях. Но уже в конце 70-х годов после открытия когерентных структур в турбулентности ситуация качественно переменилась.

При исследовании турбулентного слоя смешения Браун и Рошко [16] обнаружили, что преобладающими движениями в этом слое являются крупномасштабные вихревые движения поперек потока. Эти движения рождаются в области перехода и не исчезают, когда возникает мелкомасштабная турбулентность. Авторы [16] наблюдали спаривание соседних вихрей, то есть слияние в процессе взаимного вращения двух близлежащих вихрей в один большего размера. Схожее поведение вихрей в ламинарном свободном сдвиговом слое обнаружили Винант и Браунд [17], правда, ранее на существование высокорегуляризованных вихревых движений указывал еще Фреймут [18]. Позже организованные вихревые структуры были открыты в струях, следах, внутри пограничных слоев и т. д. (см., например, [19–21]). Это в значительной степени и предопределило всплеск интереса к задачам динамики вихревых ансамблей в последней четверти XX века.

Повышенное внимание механиков к подобного рода исследованиям в настоящее время обусловлено также их разнообразными физическими приложениями. К числу последних следует отнести исследования движения вихревых образований в атмосфере [22-26] и океане [27–39]. Конечно, список цитированных работ по данной тематике является весьма неполным, но он ярко отражает факт распространения достижений теории вихрей в смежные области и демонстрирует очевидную актуальность задач вихревой динамики для изучения природных процессов. Если же, возвращаясь, говорить о направлениях, находящихся собственно в ведении механики жидкости, то здесь следует упомянуть о численных работах, в которых точечные вихри используются в качестве элементарных структур течения (см. ссылки [40–45] и библиографию в них).

В наступившем в середине 70-х годов «серебряном веке» вихревой динамики вновь активизировались попытки гидромехаников отыскать новые точные решения уравнений Эйлера. Среди результатов данного направления выделим прежде всего новые достижения в задаче о движении конечной системы точечных вихрей [46–50], трехмерные вихревые особенности — вортоны [51, 52], точечные вихревые диполи [53], и точечные вихревые квадруполи [54], нестационарные решения, описывающие динамику вихревых нитей [55–58], эллиптические вихри Мура и Сэффмена [58, 59] и Киды [60]. Особо отметим изящную теорию движения турбулентного вихревого кольца, предложенную Б. А. Луговцовым [61–63].

Данная книга продолжает эту линию исследований. Главное внимание в ней уделяется выработке новых аналитических методов описания вихревых течений с помощью лагранжевых координат.

Но вопросы, связанные с эволюцией вихревых структур, составляют лишь часть монографии. Другая ее «половина» посвящена изучению распространения вихревых волн на поверхности жидкости.

В теории волн на воде традиционно широко используется предположение о потенциальности движения жидкости. Оно основывается на теореме Лагранжа, согласно которой, если в начальный момент движение было незавихренным и на жидкость действуют только потенциальные силы, то и в дальнейшем оно останется незавихренным. В реальных условиях эти предположения, однако, не всегда оказываются выполненными.

Начнем с того, что часто процесс волнообразования происходит на фоне сдвигового потока, и потому завихренность как бы присутствует внутри жидкости изначально. Другой фактор привнесения завихренности внутрь жидкости при ее волновом движении связан с проявлением вязких эффектов в приповерхностном слое [64, 65]. Внутри этого слоя формируются дополнительные дрейфовые течения, которые могут влиять на характеристики волны, бегущей вдоль свободной поверхности. Наконец, обратим внимание на возможную неустойчивость потенциальных поверхностных волн по отношению к слабым трехмерным возмущениям завихренности [66]. Это служит еще одним аргументом в пользу важности и актуальности исследования вихревых волн на воде.

Начало изучению вихревых волн на воде положило знаменитое исследование Герстнера [67], выполненное еще в начале XIX века. В нем было построено точное решение уравнений гидродинамики для установившихся плоских вихревых волн конечной амплитуды на поверхности идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины [11, 13]. Профилем свободной поверхности для волн Герстнера является трохоида, жидкие частицы в них движутся по окружности (дрейф отсутствует!), а завихренность убывает с глубиной. Теория слабонелинейных установившихся волн с более общим распределением завихренности, но по-прежнему при отсутствии сдвигового потока, развивалась в работах Дюбреиль–Жакотэн [68] и Гуйона [69]. В монографии проведено обобщение результатов последних на случай распространения вихревых волн на фоне произвольного, устойчивого сдвигового потока, а также на случай пространственных волн. Эти результаты, дополненные исследованием вихревых стоячих волн на глубокой воде и анализом движения пакета гравитационных волн в слабозавихренной жидкости, позволяют говорить о создании в рамках данной книги слабонелинейной теории вихревых волн на воде.

Проблема описания вихревых волн естественно вписывается в круг вопросов, затрагиваемых вихревой динамикой, поэтому «волновая» и «вихревая» части монографии не столько противостоят, сколько дополняют друг друга. Более того, их объединяют и общие способы математического описания течений, основанные на использовании лагранжевых координат.

Лагранжевые переменные крайне редко используются для решения гидродинамических задач. Причиной тому служит более сложный вид уравнений гидродинамики в форме Лагранжа по сравнению с их эйлеровым аналогом. Среди наиболее впечатляющих примеров применения лагранжевого подхода к задачам вихревой и волновой динамики следует выделить уже упоминавшиеся волны Герстнера: это единственное до сих пор точное решение для гравитационных волн на воде. Лагранжевые координаты использовались Я.И. Секерж–Зеньковичем для изучения потенциальных стоячих волн [70], Л.Н. Сретенским в задаче о кольцевых волнах на поверхности вращающейся жидкости [71], А.С. Мониным для нахождения некоторых свойств, присущих установившимся гравитационным волнам на поверхности жидкости [72, 73], и С.Я. Секерж–Зеньковичем при анализе параметрического возбуждения волн конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разной плотности [74]. Цикл задач по исследованию устойчивости течений со свободной поверхностью в лагранжевом описании изложен в монографии В.К. Андреева [75]. Среди работ иностранных ученых упомянем методическую работу [76], в которой представлен вывод уравнения Шредингера из лагранжевых уравнений гидродинамики для пакета гравитационных волн на мелкой воде, и публикации норвежской группы геофизиков [77, 78], посвященные расчету дрейфовых течений, индуцируемых затухающей гравитационно-капиллярной волной в приповерхностном слое. Этот список, по-видимому, можно несколько расширить, но в целом он по-прежнему будет оставаться фрагментарным и крайне ограниченным. Лагранжевые переменные — весьма непопулярный среди гидромехаников «инструмент исследования».

Напротив, использование лагранжевого подхода выступает характерным отличительным признаком нашей книги. Поэтому ее можно рассматривать, в том числе, как естественное дополнение к уже имеющимся фундаментальным курсам по гидродинамике, основанным исключительно на эйлеровом описании.

Часть I

ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Глава 1

УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

1.1. Особенности лагранжевого подхода

Уравнения движения жидкости можно представить в двух различных формах в зависимости от того, интересуемся ли мы значениями параметров потока в произвольной точке пространства или стремимся определить «историю» индивидуальной жидкой частицы. Уравнения, которые получаются в результате этих подходов, называются соответственно эйлеровой и лагранжевой формами уравнений гидродинамики. Так они названы в честь Леонарда Эйлера (1707–1783) и Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813). На самом деле обе формы уравнений были сформулированы Эйлером в 1755 году (на 33 года раньше Лагранжа) в трактате «Общие принципы движения жидкостей».

Лагранжев способ описания движения жидкости заключается в том, что за основу рассмотрения берется движение фиксированных «жидких частиц», прослеживаемое, начиная с некоторого момента времени. Если при эйлеровом подходе изучается поле скоростей в точке с координатами x, y, z, то при лагранжевом следят за каждой частицей жидкости, предварительно «пометив» их (перенумеровав). Таким образом, неизвестными функциями будут x, y, z, а независимыми переменными «номера» частиц и время. Выбор этих меток в значительной степени произволен, необходимо лишь следить за однозначностью «нумеровки» и чтобы все частицы были «сосчитаны». Например, ими могут быть начальные координаты частиц жидкости x_0, y_0, z_0. Но это лишь один из вариантов введения переменных Лагранжа.

Дадим их общее определение. Обозначим компоненты поля скорости течения соответственно $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, тогда справедливы следующие равенства:

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \qquad (1.1)$$

Здесь x, y, z рассматриваются уже как функции независимого переменного t. Очевидно, что это суть уравнения, из которых определяются траектории частиц. Решения уравнений (1.1) можно представить в виде

$$x = X(a,b,c,t), \quad y = Y(a,b,c,t), \quad z = Z(a,b,c,t), \qquad (1.2)$$

где a, b, c — некоторые произвольные постоянные, определяющие положение жидких частиц. В частном случае их можно выбрать совпадающими с начальными координатами жидких частиц, так что

$$x_0 = a, \;\; y_0 = b, \;\; z_0 = c. \qquad (1.3)$$

Однако в самом общем случае каждая из переменных a, b, c является некоторой функцией от координат начального положения жидкой частицы. Три произвольных постоянных в выражениях (1.2) выступают в качестве своеобразных меток для отдельной жидкой частицы. Будем в дальнейшем называть их лагранжевыми координатами.

В эйлеровом пространстве переменных x, y, z линии, соответствующие осям лагранжевой системы координат, будут, вообще говоря, сложными нестационарными кривыми. Рассмотрим, например, множество частиц, имеющих координаты $b = 0$, $c = 0$, то есть расположенных вдоль линии изменения координаты a. С течением времени эта жидкая «ось» будет искривляться и перемещаться в пространстве. То же самое можно сказать об «осях» b и c. Их можно считать осями «жидкой» системы координат. Эта система, вообще говоря, криволинейна, неортогональна и нестационарна; в движущейся жидкости ее оси непрерывно деформируются, следуя за составляющими их жидкими частицами. Иными словами, эта система «вморожена» в жидкую среду, и суть лагранжевого описания в гидродинамике, следовательно, состоит во введении вмороженной в жидкость системы координат.

«Лагранжев метод самым непосредственным образом связан с реальными движениями отдельных элементов жидкости, совокупность которых и составляет течение, поэтому его можно считать физически более *естественным* (курсив наш — авт.), чем эйлеров метод описания» [79]. Тем не менее, переменные Лагранжа редко используются в гидромеханике. Это связано как с громоздкостью уравнений гидродинамики в форме Лагранжа, так и со сложной формой их нелинейности. В отличие от эйлерового подхода, к тому же, в лагранжевых переменных нелинейный вид имеет не только уравнение движения, но и уравнение неразрывности.

Выигрышные стороны использования лагранжевых координат, однако, часто выявляются на уровне постановки задачи. Уравнения в форме Лагранжа обладают тем важным преимуществом, что их решение следует искать в заданной области пространства переменных.

В частности, при рассмотрении волн на воде можно считать, что неизвестной форме свободной поверхности отвечает значение вертикальной лагранжевой координаты, равное нулю, а всей области волнового движения — нижнее полупространство лагранжевых переменных.

Или другой пример. Как известно, в плоском течении идеальной несжимаемой жидкости завихренность жидких частиц сохраняется. Вследствие этого при изучении динамики завихренных областей (локализованные вихри, волны на воде) более удобно задавать начальное распределение завихренности именно в лагранжевых координатах.

Чтобы от лагранжевых переменных перейти к эйлеровым, надо продифференцировать по времени функции X, Y, Z, получив, тем самым, выражения для компонент скорости как функций лагранжевых переменных a, b, c и t, а затем исключить лагранжевые переменные, выразив их через X, Y, Z, t. В итоге получится зависимость компонент скорости от координат x, y, z (см. (1.2)) и времени t, то есть поле скоростей в представлении Эйлера. Правда, провести эту процедуру аналитически, как правило, удается провести лишь в исключительных случаях.

1.2. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа

Будем предполагать, что движущаяся жидкость сплошным образом заполняет пространство или определенную его часть и что во время движения не происходит ни потери вещества, ни его возникновения (нет источников и стоков). Это предположение налагает некоторое условие на изменения плотности и объема жидкости, носящее название уравнения неразрывности.

Рассмотрим два положения одного и того же жидкого объема в моменты t_0 и t; пусть в момент t_0 жидкий объем τ_0 ограничен некоторой замкнутой поверхностью, которая в момент t переходит также в замкнутую поверхность, ограничивающую объем в момент τ. «Частица» жидкости, имеющая в момент t_0 координаты x_0, y_0, z_0, перейдет в момент t в положение с координатами x, y, z, причем

$$\begin{aligned} x_0 &= X(a, b, c, t_0), \qquad & x &= X(a, b, c, t); \\ y_0 &= Y(a, b, c, t_0), \qquad & y &= Y(a, b, c, t); \\ z_0 &= Z(a, b, c, t_0), \qquad & z &= Z(a, b, c, t), \end{aligned} \tag{1.4}$$

плотность жидкой частицы в начальный момент $\rho_0(a, b, c, t_0)$ в момент t будет уже $\rho\,(a, b, c, t)$. Но масса жидкого объема при его движении не меняется, поэтому справедливо соотношение:

$$\iiint\limits_{\tau_0} \rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0 = \iiint\limits_{\tau} \rho\, dx\, dy\, dz. \tag{1.5}$$

Заменим теперь в обоих интегралах переменные x, y, z переменными a, b, c по формулам перехода (1.4); по известным правилам преобразования интеграла при замене переменных имеем:

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\tau_0} \rho\, D\, da\, db\, dc, \tag{1.6}$$

где D есть функциональный определитель

$$D = \frac{D(X, Y, Z)}{D(a, b, c)} = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

здесь и далее нижние индексы означают взятие производной по соответствующей переменной.

Перенося в (1.5) все члены в одну часть и применяя (1.6), найдем

$$\iiint\limits_{\tau_0} (\rho_0\, D_0 - \rho\, D)\, da\, db\, dc = 0,$$

где D_0 имеет аналогичное с D значение. Отсюда, ввиду произвольности взятого первоначально объема τ_0, в любой момет t должно иметь место соотношение

$$\rho_0\, D_0 - \rho\, D = 0,$$

или подробнее

$$\rho_0(a, b, c, t_0) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_0}{\partial a} & \dfrac{\partial y_0}{\partial a} & \dfrac{\partial z_0}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial b} & \dfrac{\partial y_0}{\partial b} & \dfrac{\partial z_0}{\partial b} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial c} & \dfrac{\partial y_0}{\partial c} & \dfrac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix} = \rho(a, b, c, t) \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Оно и является искомым уравнением неразрывности в переменных Лагранжа. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принимает вид:

$$\begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_0}{\partial a} & \dfrac{\partial y_0}{\partial a} & \dfrac{\partial z_0}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial b} & \dfrac{\partial y_0}{\partial b} & \dfrac{\partial z_0}{\partial b} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial c} & \dfrac{\partial y_0}{\partial c} & \dfrac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix} = D_0(a, b, c). \tag{1.8}$$

Если лагранжевые переменные совпадают с начальными координатами жидкой частицы (см. (1.3)), то правая часть (1.8) равна единице.

В общем случае детерминант D является функцией только лагранжевых координат и не зависит от времени.

Уравнение непрерывности можно записать более компактно. Введем в рассмотрение матрицу Якоби

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} X_a & X_b & X_c \\ Y_a & Y_b & Y_c \\ Z_a & Z_b & Z_c \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

элементами которой служат производные текущих координат частиц по лагранжевым переменным. Как и сами функции X, Y, Z, эти элементы зависят от переменных Лагранжа и времени. Если зависимость X, Y, Z от a, b, c линейна, матрица $\widehat{R}$ состоит только из функций времени.

Матрица $\widehat{R}$ описывает изменение бесконечно малого элемента жидкости $d\vec{X}\{dX, dY, dZ\}$, соответствующего приращению лагранжевых координат $d\vec{a}\,\{da, db, dc\}$:

$$d\vec{X} = \widehat{R}\,d\vec{a}.$$

Уравнение непрерывности при таком подходе формулируется как условие постоянства во времени детерминанта матрицы $\widehat{R}$:

$$\det\widehat{R} = \det\widehat{R}_0, \quad \widehat{R}_0 = \widehat{R}\Big|_{t=0} \tag{1.10}$$

При выполнении соотношений (1.3) матрица $\widehat{R}_0$ является единичной.

1.3. Уравнения движения в форме Лагранжа

1.3.1. Векторная и координатная формы. Чтобы получить уравнения движения в форме Лагранжа, запишем уравнение Ньютона для отдельной жидкой частицы

$$\vec{r}_{tt} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} \equiv -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \vec{f}, \tag{1.11}$$

p — давление, ρ — плотность жидкости, а $\vec{f}$ — внешняя сила, действующая на единицу массы. В правых частях равенств (1.11) присутствует дифференцирование по неизвестным функциям $X(a,b,c,t)$, $Y(a,b,c,t)$, $Z(a,b,c,t)$. Чтобы исключить его, умножим скалярно уравнение (1.11) на вектор, касательный к одной из жидких координатных кривых, например, $\vec{r}_a$. Тогда получим:

$$\vec{r}_{tt}\vec{r}_a = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p\,\vec{r}_a + (\vec{f}\cdot\vec{r}_a) = -\frac{1}{\rho}\,p_a + (\vec{f}\cdot\vec{r}_a). \tag{1.12}$$

Это и есть одно из трех уравнений движения жидкости в форме Лагранжа. Аналогично получаются и уравнения в проекции на оси b и c:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{tt}\vec{r}_b &= -\frac{1}{\rho}\,p_b + (\vec{f}\cdot\vec{r}_b); \\ \vec{r}_{tt}\vec{r}_c &= -\frac{1}{\rho}\,p_c + (\vec{f}\cdot\vec{r}_c). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Уравнения (1.12), (1.13) представляют векторную форму уравнения движения. В координатной форме они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X_{tt}X_a + Y_{tt}Y_a + Z_{tt}Z_a &= -\frac{1}{\rho}\,p_a + (f_1\cdot X_a + f_2\cdot Y_a + f_3\cdot Z_a), \\ X_{tt}X_b + Y_{tt}Y_b + Z_{tt}Z_b &= -\frac{1}{\rho}\,p_b + (f_1\cdot X_b + f_2\cdot Y_b + f_3\cdot Z_b), \\ X_{tt}X_c + Y_{tt}Y_c + Z_{tt}Z_c &= -\frac{1}{\rho}\,p_c + (f_1\cdot X_c + f_2\cdot Y_c + f_3\cdot Z_c). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь f_1, f_2, f_3 — компоненты силы $\vec{f}$ в проекции на декартовые оси x, y, z соответственно. Вместе с уравнением неразрывности (1.8) уравнения (1.14) образуют полную систему уравнений невязкой жидкости в переменных Лагранжа.

С помощью матрицы Якоби $\widehat{R}$ уравнения (1.14) записываются следующим образом [80]:

$$\widehat{R}^{\mathsf{T}}(\vec{X}_{tt} - \vec{f}(\vec{X}, t)) = -\frac{1}{\rho}\,\nabla_{\vec{a}}\,p. \tag{1.15}$$

Верхний индекс «T» обозначает операцию транспонирования, а в правой части использовано обозначение оператора градиента по лагранжевым переменным.

1.3.2. Преобразование Вебера. Предположим, что внешняя сила является потенциальной, то есть

$$\vec{f} = -\nabla H,$$

здесь в правой части записан градиент по переменным Эйлера для потенциала H.

Для градиентной силы уравнения (1.14) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{tt}X_a + Y_{tt}Y_a + Z_{tt}Z_a &= -\frac{1}{\rho}\,p_a - H_a; \\ X_{tt}X_b + Y_{tt}Y_b + Z_{tt}Z_b &= -\frac{1}{\rho}\,p_b - H_b; \\ X_{tt}X_c + Y_{tt}Y_c + Z_{tt}Z_c &= -\frac{1}{\rho}\,p_c - H_c. \end{aligned} \tag{1.16}$$