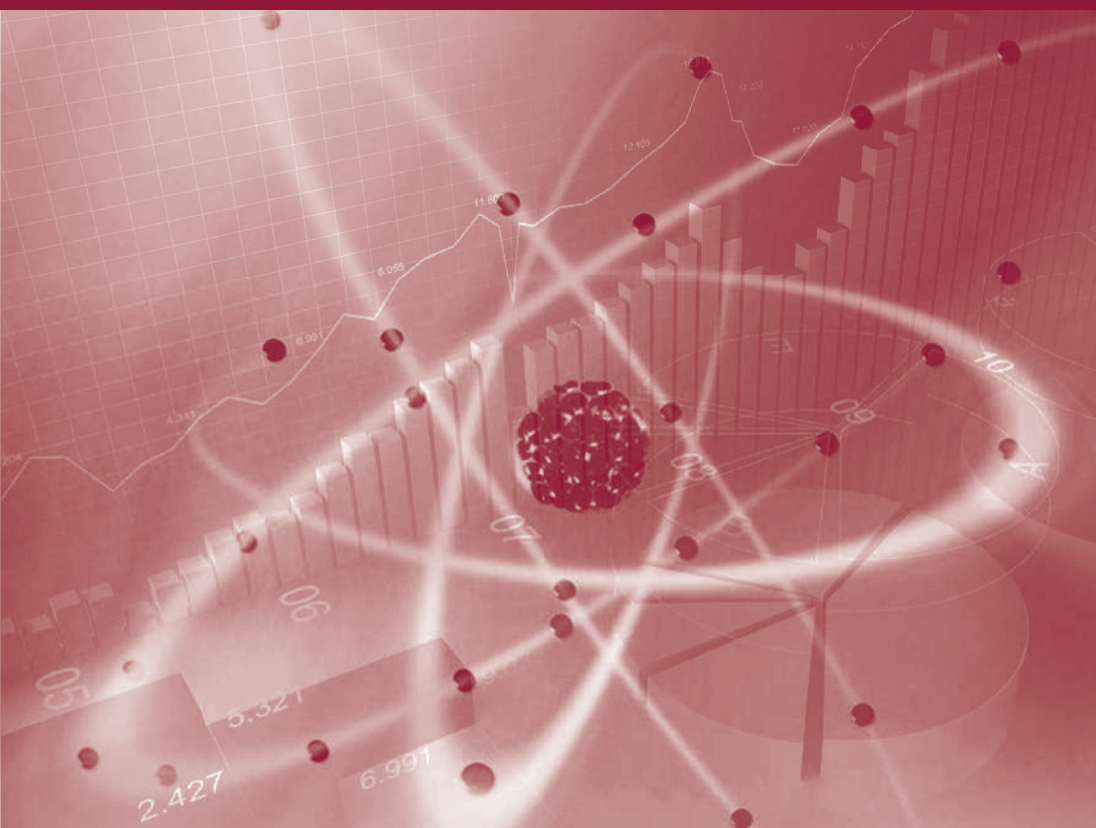


**А. С. Холево**



**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ  
И СТАТИСТИЧЕСКИЕ  
АСПЕКТЫ  
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ**

УДК 519.248.2

ББК 22.171

X71

Холево А. С.

Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.

М.: МЦНМО; НМУ, 2020.

364 с.

ISBN 978-5-4439-3448-8

Книга посвящена основаниям квантовой механики и тем ее вопросам, в которых существенную роль играют вероятностные и статистические представления. За последние годы в этой области был достигнут прогресс, во многом стимулированный новыми приложениями квантовой теории в информатике.

В книге в доступной и математически строгой форме обсуждаются вопросы вероятностной интерпретации, квантово-механические симметрии, проблема соответствия между классическими и квантовыми наблюдаемыми (наблюдаемые «время», «фаза», «угол»), теория канонических коммутационных соотношений и гауссовских состояний, нестандартные соотношения неопределенностей («время—энергия», «фаза—число квантов», «угол—угловой момент»), квантовые неравенства Рао—Крамера и другие принципиальные границы точности квантового измерения.

По сравнению с предыдущим изданием в книге имеется Дополнение, посвященное проблеме скрытых параметров.

Книга предназначена для математиков и физиков (студентов-старшекурсников, аспирантов, научных работников), интересующихся основаниями квантовой теории, ее связями с теорией вероятностей и математической статистикой, вопросами квантового измерения, квантовой метрологии.

Подготовлено на основе книги:

Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. —

Изд. новое. — М.: МЦНМО; НМУ, 2020. — 364 с. —

ISBN 978-5-4439-3448-8

Учебно-методическое издание

6+

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,

тел. (499)241-08-04.

<http://www.mccme.ru>

© Холево А. С., 2020.

© МЦНМО, 2020.

ISBN 978-5-4439-3448-8

# Оглавление

|                                                                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие . . . . .                                                                                         | 6          |
| Введение . . . . .                                                                                            | 8          |
| <b>Глава I. Общее понятие статистической модели . . . . .</b>                                                 | <b>13</b>  |
| § 1. Состояния и измерения . . . . .                                                                          | 13         |
| § 2. Некоторые геометрические понятия . . . . .                                                               | 19         |
| § 3. Определение статистической модели . . . . .                                                              | 27         |
| § 4. Классическая статистическая модель . . . . .                                                             | 28         |
| § 5. Редукция статистической модели. Классическая модель с ограничениями на множество измерений . . . . .     | 33         |
| § 6. Статистическая модель квантовой механики . . . . .                                                       | 39         |
| § 7. Замечания к проблеме скрытых переменных . . . . .                                                        | 46         |
| Комментарии . . . . .                                                                                         | 52         |
| <b>Глава II. Математический аппарат квантовой теории . . . . .</b>                                            | <b>57</b>  |
| § 1. Операторы в гильбертовом пространстве . . . . .                                                          | 57         |
| § 2. Состояния и измерения в квантовой теории . . . . .                                                       | 64         |
| § 3. Спектральное разложение ограниченных операторов . . . . .                                                | 66         |
| § 4. Спектральное разложение неограниченных операторов . . . . .                                              | 71         |
| § 5. О реализации измерения . . . . .                                                                         | 77         |
| § 6. Соотношения неопределенностей и совместная измеримость . . . . .                                         | 81         |
| § 7. Ядерные операторы и операторы Гильберта—Шмидта . . . . .                                                 | 86         |
| § 8. Пространства $\mathcal{L}^2$ , ассоциированные с квантовым состоянием . . . . .                          | 93         |
| § 9. Соотношения неопределенностей для измерений с конечным вторым моментом . . . . .                         | 99         |
| § 10. Матричное представление квадратично суммируемых операторов. Коммутационный оператор состояния . . . . . | 101        |
| Комментарии . . . . .                                                                                         | 106        |
| <b>Глава III. Симметрии в квантовой механике . . . . .</b>                                                    | <b>109</b> |
| § 1. Статистическая модель и принцип относительности . . . . .                                                | 109        |
| § 2. Однопараметрические группы сдвигов и соотношения неопределенностей . . . . .                             | 114        |
| § 3. Кинематика квантовой частицы с одной степенью свободы . . . . .                                          | 119        |
| § 4. Теорема единственности. Представление Шрёдингера и импульсное представление . . . . .                    | 123        |
| § 5. Состояния минимальной неопределенности. Соотношения полноты и ортогональности . . . . .                  | 126        |
| § 6. Совместные измерения координаты и скорости . . . . .                                                     | 129        |
| § 7. Динамика квантовой частицы с одной степенью свободы . . . . .                                            | 135        |
| § 8. Наблюдаемая времени. Соотношение неопределенностей «время—энергия» . . . . .                             | 139        |

|                                                                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 9. Квантовый осциллятор и измерение фазы . . . . .                                                                                             | 145        |
| § 10. Представление по когерентным состояниям . . . . .                                                                                          | 151        |
| § 11. Представления группы вращений и угловые моменты . . . . .                                                                                  | 156        |
| § 12. Измерение угла поворота . . . . .                                                                                                          | 162        |
| Комментарии . . . . .                                                                                                                            | 166        |
| <b>Глава IV. Ковариантные измерения и оптимальность . . . . .</b>                                                                                | <b>171</b> |
| § 1. Параметрические группы симметрий и ковариантные измерения                                                                                   | 171        |
| § 2. Структура ковариантного измерения . . . . .                                                                                                 | 174        |
| § 3. Измерение параметров в ковариантном семействе состояний . .                                                                                 | 177        |
| § 4. Измерения угловых параметров . . . . .                                                                                                      | 182        |
| § 5. Соотношения неопределенностей для угловых величин . . . . .                                                                                 | 186        |
| § 6. Ковариантные измерения углового параметра в случае произ-<br>вольного представления группы $T$ . . . . .                                    | 190        |
| § 7. Ковариантные измерения параметра сдвига . . . . .                                                                                           | 194        |
| § 8. Случай неприводимого представления . . . . .                                                                                                | 203        |
| § 9. Оценивание чистого состояния . . . . .                                                                                                      | 208        |
| § 10. Измерение параметров ориентации . . . . .                                                                                                  | 213        |
| Комментарии . . . . .                                                                                                                            | 217        |
| <b>Глава V. Гауссовские состояния . . . . .</b>                                                                                                  | <b>222</b> |
| § 1. Квазиклассические состояния квантового осциллятора . . . . .                                                                                | 222        |
| § 2. Каноническое коммутационное соотношение для многих степе-<br>ней свободы . . . . .                                                          | 226        |
| § 3. Доказательство теоремы единственности Стоуна—фон Нейма-<br>на. Преобразование Вейля . . . . .                                               | 230        |
| § 4. Характеристическая функция и моменты состояния . . . . .                                                                                    | 237        |
| § 5. Структура общего гауссовского состояния . . . . .                                                                                           | 244        |
| § 6. Характеристическое свойство гауссовских состояний . . . . .                                                                                 | 249        |
| Комментарии . . . . .                                                                                                                            | 254        |
| <b>Глава VI. Несмещенные измерения . . . . .</b>                                                                                                 | <b>256</b> |
| § 1. Квантовый канал связи . . . . .                                                                                                             | 256        |
| § 2. Нижняя граница для дисперсии измерения одномерного пара-<br>метра . . . . .                                                                 | 259        |
| § 3. Случай параметра сдвига . . . . .                                                                                                           | 263        |
| § 4. Измерение силы, действующей на пробный объект . . . . .                                                                                     | 269        |
| § 5. Граница для матрицы ковариации измерения многомерного па-<br>раметра, основанная на симметричных логарифмических про-<br>изводных . . . . . | 273        |
| § 6. Граница, основанная на правой логарифмической производной                                                                                   | 277        |
| § 7. Общая граница для среднеквадратичного отклонения . . . . .                                                                                  | 284        |
| § 8. Линейные измерения . . . . .                                                                                                                | 290        |

---

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| § 9. Измерение параметров среднего значения гауссовского состоя-  |     |
| ния . . . . .                                                     | 296 |
| Комментарии . . . . .                                             | 300 |
| Дополнение.                                                       |     |
| Статистическая структура квантовой теории и скрытые параметры . . | 304 |
| § 1. Введение . . . . .                                           | 304 |
| § 2. Структура статистических теорий . . . . .                    | 309 |
| § 3. Проблема скрытых параметров . . . . .                        | 328 |
| Библиография . . . . .                                            | 354 |

## Глава I

# Общее понятие статистической модели

### § 1. Состояния и измерения

В основе теоретической модели реального явления или объекта лежат в конечном счете данные опыта; совокупность всевозможных экспериментов вместе с полным описанием их результатов образует «остов» всякой теоретической модели. Рассмотрим схематизированное описание произвольного эксперимента и проследим, как отсюда возникают основные элементы теоретической модели.

Во всяком эксперименте можно выделить две основные стадии. В первой стадии — стадии приготовления — фиксируется определенная экспериментальная ситуация, т. е. устанавливаются исходные условия, задаются «входные данные» эксперимента. В следующей стадии измерения определенным образом «приготовленный» объект воздействует на тот или иной измерительный прибор, результатом чего в каждом индивидуальном эксперименте являются те или иные «выходные данные» (рис. 1). Важнейшим условием, которому должен удовлетворять всякий научный эксперимент, является условие воспроизводимости, т. е. возможности неограниченного повторения данного измерения в данной экспериментальной ситуации. Рассмотрим последовательность одинаковых и независимых повторений некоторого эксперимента. Результаты подобных индивидуальных экспериментов, как правило, не будут строго одинаковы. Практически всегда получаемые результаты подвержены случайному разбросу, амплитуда которого варьируется в зависимости от характера эксперимента и природы исследуемого объекта. Наличие ошибок измерения является объективным фактом, мимо которого не может пройти ни одна разумная теория эксперимента. Существуют, однако, обширные классы явлений, для которых разброс экспериментальных результатов оказывается настолько несущественным, что его вообще можно не принимать в расчет. Это относится, например, к механическому поведению макроскопических объектов или к процессам, протекающим в электрических цепях. Соответствующие теории — классическая механика и теория электрических цепей — исходят из предпосылки, что возможно сколь

угодно точное, в идеале — абсолютно точное измерение параметров, характеризующих поведение объекта. В таких случаях говорят, что объект допускает детерминированное описание. Подчеркнем, что детерминированное описание обычно является лишь некоторым приближением к реальности, справедливым лишь постольку, поскольку оно согласуется с данными опыта.

Плодотворность детерминистических представлений в классической теоретической физике XVII—XIX вв. породила иллюзию универсальности детерминированного описания. Однако по мере проникновения экспериментальной физики в область явлений микромира становилась все более ясной неприменимость в этой области детерминированного описания, заимствованного из классической механики, и необходимость привлечения статистических концепций. Характерный пример ситуации, в которой приходится существенно учитывать разброс результатов измерения, дают эксперименты по рассеянию частиц. В подобных экспериментах невозможно точно предсказать, в каком направлении рассеется данная частица, — можно лишь говорить о вероятности рассеяния в том или ином направлении. Можно было бы привести целый ряд других примеров, однако заинтересованный читатель легко найдет их в курсах квантовой физики. В настоящее время необходимость статистического описания микромира можно считать общепризнанной.

Говоря о возможности статистического описания, мы подразумеваем, что рассматриваемое явление удовлетворяет следующему фундаментальному требованию, включающему в себя условие воспроизводимости, которое для удобства ссылок мы будем называть статистическим постулатом: *всякий эксперимент допускает в принципе неограниченное число повторений; индивидуальные результаты в последовательности одинаковых независимых экспериментов могут быть различны, однако появление того или иного результата в достаточно длинной последовательности характеризуется определенной частотой (устойчивость частот)*. Тогда, абстрагируясь от практической невозможности произвести неограниченную последовательность одинаковых экспериментов, можно принять предположение, что результаты эксперимента допускают теоретическое описание в виде вероятностей тех или иных исходов. Точнее говоря, следует различать понятия индивидуального эксперимента, результатом которого являются конкретные данные, и эксперимента как совокупности всевозможных индивидуальных

реализаций. Понимая эксперимент именно в этом смысле, естественно считать его конечным результатом распределение вероятностей. При этом детерминированная зависимость результатов эксперимента от входных данных уступает место статистической: функцией входных данных является распределение вероятностей результатов измерения.

Примером эксперимента как совокупности индивидуальных реализаций являются распространенные в физике наблюдения над пучками идентичных независимых частиц. Предположим, что для регистрации частиц, рассеянных на некотором препятствии, используется экран-детектор, попадание в который индивидуальной частицы вызывает, например, почернение фотоэмульсии. Тогда в результате экспозиции достаточно интенсивного пучка частиц на экране образуется некоторое распределение темных и светлых пятен, которое по существу дает представление о плотности распределения вероятностей попадания индивидуальной частицы. Хорошо известные из оптики дифракционные картины, образующиеся при рассеянии естественного света (который есть не что иное, как хаотический поток огромного числа фотонов), дают визуальное представление плотности распределения вероятностей для индивидуального фотона.

Разумеется, статистическое описание не является прерогативой явлений микромира. При исследовании физических объектов, состоящих из огромного числа частиц, таких как газы, жидкости или кристаллы, экспериментатор имеет возможность варьировать по своему произволу лишь весьма ограниченное число входных данных, таких как объем, давление, температура. Огромное количество переменных, характеризующих подробности поведения составных частей системы, остается вне контроля исследователя; их неконтролируемые изменения могут оказывать влияние на индивидуальные результаты измерений, вызывая флуктуации, учет которых имеет существенное значение для понимания механизма явлений, происходящих в таких больших системах. Статистика наблюдений играет важнейшую роль в вопросах передачи информации, где флуктуации параметров физического носителя информации являются источником разного рода «шумов», искажающих сообщение.

Подобная ситуация может иметь место и в биологических исследованиях. Например, проводя апробацию какого-либо метода лечения, исследователь располагает лишь ограниченным набором «входных данных», характеризующих его пациентов (возраст, пол,

группа крови и т. п.). Однако эффект лечения в каждом индивидуальном случае будет определяться, вообще говоря, не только этими «интегральными» параметрами, но и целым рядом других, неучтенных либо не поддающихся учету внутренних факторов. Таким образом, эффект лечения, или, на нашем языке, «результат измерения», не является, вообще говоря, однозначной функцией известных данных пациента; в таких случаях статистический подход бывает весьма уместным и плодотворным.

На этих двух примерах мы видели, что источником случайного разброса в результатах измерения может быть неопределенность значений некоторых «скрытых переменных», находящихся вне контроля экспериментатора. Природа статистичности поведения объектов микромира не столь ясна, хотя пятидесятилетний опыт успешного применения статистических концепций в квантовой теории, несомненно, свидетельствует о том, что они дают правильную картину.

Мы не будем затрагивать здесь вопрос о природе статистичности в микрофизике, хотя и коснемся некоторых математических аспектов соответствующей «проблемы скрытых переменных» в § 7. Основное внимание мы уделим следствиям сформулированного выше статистического постулата для произвольного объекта, удовлетворяющего этому требованию. Мы покажем, что уже на таком общем уровне возникают фундаментальные понятия состояния и измерения, играющие, в частности, столь важную роль в квантовой теории.

Условно представим себе объект как «черный ящик», на «входе» которого могут создаваться те или иные исходные условия  $\tilde{S}$ . После того как объект приготовлен определенным образом, экспериментатор производит то или иное измерение и получает данные  $u$ . Выходные данные  $u$  могут иметь различный характер. Они могут быть дискретными, например, в том случае, когда измерительный прибор является пороговым устройством, регистрирующим наличие или отсутствие определенной частицы, либо непрерывными, если прибор имеет шкалу или несколько шкал. Выходными данными могут быть показания нескольких приборов. Наконец, результатом измерения может быть целая траектория — фотография следа частицы. Чтобы дать единообразное рассмотрение всевозможных ситуаций, мы будем полагать, что множество индивидуальных результатов измерения образует некоторое измеримое пространство  $U$  с  $\sigma$ -алгеброй измеримых подмножеств  $\mathcal{A}(U)$ . Измеримому подмно-

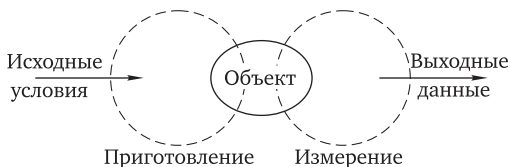


Рис. 1

жеству  $B \subset U$  соответствует событие: результат измерения и лежит<sup>1</sup> в  $B$ .

Согласно статистическому постулату результат индивидуально-го эксперимента можно рассматривать как реализацию некоторой случайной величины, принимающей значения в  $U$ . Пусть  $\mu_{\tilde{S}}(du)$  — распределение вероятностей этой случайной величины. Индекс  $\tilde{S}$  отражает зависимость статистики результатов измерения от процедуры приготовления, т. е. от исходных условий эксперимента, так что

$$\mu_{\tilde{S}}(B) = \Pr\{u \in B \mid \tilde{S}\}, \quad B \in \mathcal{A}(U),$$

есть условная вероятность получить результат  $u \in B$  при исходных условиях  $\tilde{S}$ . Можно сказать, что полное статистическое описание результатов измерения дается отображением  $\tilde{S} \rightarrow \mu_{\tilde{S}}(du)$ , сопоставляющим конкретным исходным условиям  $\tilde{S}$  распределение вероятностей  $\mu_{\tilde{S}}$  на пространстве  $U$  результатов измерения. При этом следует подчеркнуть, что, давая полное описание результатов измерения, это отображение не содержит никаких указаний ни о конкретном механизме измерения, ни о его последствиях для рассматриваемого объекта. С этой точки зрения измерительные процедуры не различаются, если для любых исходных условий  $\tilde{S}$  они приводят к одному и тому же распределению вероятностей  $\mu_{\tilde{S}}$ , хотя практически они могут осуществляться совершенно различными приборами. Каждой конкретной измерительной процедуре отвечает отображение  $\tilde{S} \rightarrow \mu_{\tilde{S}}$ , однако одно такое отображение может объединять в себе целый класс измерительных процедур, не различающихся статистикой результатов. Точно так же исходные условия  $\tilde{S}_1$  и  $\tilde{S}_2$  являются неразличимыми с точки зрения статистики результатов изме-

<sup>1</sup> Читатель, не знакомый с концепцией измеримости, может условно представлять себе  $U$  как область в многомерном пространстве, а  $B$  — как «достаточно хорошее» подмножество множества  $U$ . Однако у нас  $U$  может быть гораздо более сложным образованием — например, пространством непрерывных функций.

рения, если  $\mu_{\tilde{S}_1} = \mu_{\tilde{S}_2}$  для любого отображения  $\tilde{S} \rightarrow \mu_{\tilde{S}}$ , описывающего измерительную процедуру. Объединим неразличимые процедуры приготовления  $\tilde{S}$  в классы эквивалентности  $S = [\tilde{S}]$ , которые назовем *состояниями*. Пусть  $\mathfrak{S}$  — множество всевозможных состояний. Поскольку распределение вероятностей  $\mu_{\tilde{S}}$  одно и то же для всех  $\tilde{S}$  из одного класса  $S$ , его можно считать функцией состояния,  $\mu_{\tilde{S}} = \mu_S$ . Отображение  $S \rightarrow \mu_S$  из множества состояний в множество распределений вероятностей на пространстве результатов  $U$  будем называть измерением (со значениями в  $U$ ).

Статистический постулат налагает определенное ограничение на структуру множества состояний  $\mathfrak{S}$  и описывающее измерение отображение  $S \rightarrow \mu_S$ . Пусть  $\{S_\alpha\}$  — какие-либо состояния. Предположим, что экспериментатор не знает точно, в каком из этих состояний приготовлен объект, однако ему известны вероятности  $\{p_\alpha\}$  того, что приготовленным состоянием является  $\{S_\alpha\}$ . Фактически это означает, что в неограниченной последовательности индивидуальных экспериментов объект приготавливается в одном из состояний  $\{S_\alpha\}$ , причем появление состояния характеризуется соответствующей частотой. Физически это соответствует флуктуациям тех или иных параметров, характеризующих приготовительную процедуру. Пусть в каждом из индивидуальных экспериментов производится одно и то же измерение. Тогда согласно статистическому постулату и элементарным свойствам вероятностей появление того или иного результата  $u$  будет описываться распределением вероятностей  $\mu(du) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mu_{S_{\alpha}}(du)$ . Описанную выше ситуацию можно рассматривать как определенный способ приготовления состояния (смешивание), при котором значение некоторого параметра  $\alpha$  не фиксируется точно, а выбирается согласно априорному распределению  $\{p_{\alpha}\}$ . Обозначим такое состояние-смесь следующим образом:

$$S = S(\{S_{\alpha}\}, \{p_{\alpha}\}), \quad (\text{I.1.1})$$

так что для любого измерения  $S \rightarrow \mu_S$  выполняется равенство

$$\mu_S(du) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mu_{S_{\alpha}}(du). \quad (\text{I.1.2})$$

Таким образом, следует допустить, что для каждого набора состояний  $\{S_{\alpha}\} \subset \mathfrak{S}$  и распределения вероятностей  $\{p_{\alpha}\}$  существует однозначно определенное состояние-смесь  $S(\{S_{\alpha}\}, \{p_{\alpha}\})$ , характеризующее соотношениями (I.1.2). Оказывается, тогда множество со-

стояний можно естественно отождествить с выпуклым подмножеством некоторого линейного пространства, так что будет выполняться равенство  $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) = \sum_{\alpha} p_\alpha S_\alpha$ . Для точной формулировки этого и ряда других утверждений нам потребуются сведения из теории выпуклости, изложению которых посвящается следующий параграф.

## § 2. Некоторые геометрические понятия

Пусть  $S_1, \dots, S_n$  — точки некоторого линейного пространства  $\mathcal{L}$ , а  $p_1, \dots, p_n$  — набор вещественных чисел, удовлетворяющий условиям

$$p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1,$$

т. е. конечное распределение вероятностей. Тогда точка

$$S = \sum_{j=1}^n p_j S_j$$

называется *выпуклой комбинацией* точек  $S_j$  с коэффициентами (весаами)  $\{p_j\}$ . *Выпуклой оболочкой* множества точек  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$  называется совокупность выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек  $\{S_j\} \subset \mathcal{K}$ . Множество  $\mathfrak{S}$  называется *выпуклым*, если оно совпадает со своей выпуклой оболочкой, т. е. содержит выпуклую комбинацию любого конечного набора своих точек. Если ограничиться двумя точками  $S_0, S_1$ , то совокупность их выпуклых комбинаций геометрически представляет собой отрезок, соединяющий эти точки:

$$\{S: S = p_0 S_0 + p_1 S_1; p_0, p_1 \geq 0, p_0 + p_1 = 1\}.$$

Нетрудно убедиться, что множество  $\mathfrak{S}$  выпукло тогда и только тогда, когда вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и соединяющий их отрезок.

Абстрактное множество  $\mathfrak{S}$  назовем *пространством смесей*, если каждому конечному набору элементов  $\{S_\alpha\}$  и распределению вероятностей  $\{p_\alpha\}$  сопоставлен однозначный элемент-смесь  $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) \in \mathfrak{S}$ . Предполагается, что смесь набора копий одного и того же элемента  $S_0$  вновь дает  $S_0$ , т. е. если  $S_\alpha \equiv S_0$  для всех  $\alpha$ , то  $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) = S_0$ . Примером пространства смесей является выпуклое множество, если смесь определяется как выпуклая комбинация.

Пусть  $F$  — отображение пространства смесей  $\mathfrak{S}$  в какое-либо линейное пространство. Оно называется *аффинным*, если для любой

смеси  $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})$  выполняется равенство

$$F(S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} F(S_{\alpha}).$$

Множество аффинных отображений непусто, поскольку отображение, при котором образом любого  $S \in \mathfrak{S}$  является один и тот же вектор  $b$ , аффинно. Очевидно, что образ выпуклого множества при аффинном отображении является выпуклым множеством. В линейных пространствах существует тесная связь между аффинными и линейными отображениями: именно, всякое аффинное отображение  $F$  выпуклого множества  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{L}$  является сужением на  $\mathfrak{S}$  отображения вида  $F(T) = A(T) + b$ ,  $T \in \mathfrak{S}$ , где  $A$  — линейное отображение. В частности, всякий аффинный функционал (т. е. отображение на вещественную прямую  $\mathbb{R}$ ) с точностью до постоянного слагаемого совпадает с сужением на  $\mathfrak{S}$  линейного функционала на  $\mathcal{L}$ .

Пространство смесей называется *отделимым*, если для любых двух различных элементов  $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$  найдется такой аффинный функционал  $\varphi$  на  $\mathfrak{S}$ , что  $\varphi(S_1) \neq \varphi(S_2)$ .

Примером отделимого пространства смесей является множество состояний из § 1. В самом деле, для любого измерения  $S \rightarrow \mu_S$  и любого подмножества  $B \in \mathcal{A}(U)$  функционал  $S \rightarrow \mu_S(B)$  является аффинным в силу равенства (I.1.2). По построению для любых состояний  $S_1$  и  $S_2$  должно найтись такое измерение  $S \rightarrow \mu_S$ , что  $\mu_{S_1} \neq \mu_{S_2}$ , т. е.  $\mu_{S_1}(B) \neq \mu_{S_2}(B)$  для некоторого  $B$ . Из следующего предложения вытекает, что всякое множество состояний можно рассматривать как выпуклое подмножество некоторого линейного пространства с операцией выпуклой комбинации в качестве смешивания.

**Предложение I.2.1.** *Всякое отделимое пространство смесей  $\mathfrak{S}$  взаимно однозначно и аффинно отображается на выпуклое подмножество линейного пространства.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$  — линейное пространство всех аффинных функционалов на  $\mathfrak{S}$ . Рассмотрим сопряженное пространство  $\mathcal{L} = \mathfrak{A}(\mathfrak{S})'$  всех линейных функционалов на  $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ . Для каждого  $S \in \mathfrak{S}$  введем  $\widehat{S} \in \mathcal{L}$ , полагая

$$\widehat{S}(\varphi) = \varphi(S), \quad \varphi \in \mathcal{L}.$$

Отображение  $S \rightarrow \widehat{S}$  является аффинным, так как

$$\sum_j p_j \widehat{S}_j(\varphi) = \sum_j p_j \varphi(S_j) = \varphi(S(\{S_j\}, \{p_j\})) = \widehat{S}(\{S_j\}, \{p_j\})(\varphi),$$

и взаимно однозначным, так как из того, что  $\widehat{S}_1(\varphi) = \widehat{S}_2(\varphi)$ , следует, что  $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$  для всех аффинных функционалов  $\varphi$ . Предположение доказано.  $\square$

Простейшим примером выпуклого множества является  $n$ -мерный симплекс, который определяется как выпуклая оболочка  $n + 1$  точек  $S_0, \dots, S_n$  общего положения в пространстве размерности не меньше  $n$  (точки  $S_0, \dots, S_n$  называются точками общего положения, если  $n$  векторов  $S_0S_1, \dots, S_0S_n$  линейно независимы). В случае  $n = 1$  симплекс является отрезком, в случае  $n = 2$  — треугольником, в случае  $n = 3$  — тетраэдром (рис. 2). Точки  $S_0, \dots, S_n$  называются вершинами симплекса.

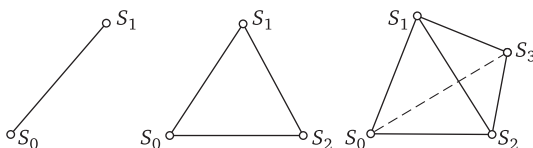


Рис. 2

Фундаментальную роль в теории выпуклых множеств играет понятие крайней точки. Точка  $S$  называется *крайней точкой* выпуклого множества  $\mathfrak{S}$ , если она не является внутренней точкой отрезка, целиком лежащего в  $\mathfrak{S}$ , т. е. не может быть представлена в виде  $S = p_0S_0 + p_1S_1$ , где  $p_0, p_1 > 0$ ,  $p_0 + p_1 = 1$ ,  $S_0, S_1 \in \mathfrak{S}$  и  $S_0 \neq S_1$ . Множество всех крайних точек назовем *остовом* выпуклого множества. В конечномерном линейном пространстве имеет место следующий результат.

**Теорема I.2.2.** *Всякое компактное (ограниченное и замкнутое) выпуклое множество  $\mathfrak{S}$  совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.*

В произвольном выпуклом множестве одну и ту же точку  $S$  можно представить в виде выпуклой комбинации крайних точек, вообще говоря, разными способами. *Разложение по крайним точкам однозначно для любой точки  $S \in \mathfrak{S}$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{S}$  является симплексом.* Заметим, что крайними точками симплекса являются его вершины.

Теорема I.2.2, определение и характеристическое свойство симплекса обобщаются и на бесконечномерный случай, однако аккурратное изложение этих вопросов потребовало бы больше места, чем

позволяют рамки этой книги. В то же время для понимания следующих параграфов достаточно приведенных выше конечномерных результатов. Остановимся лишь на одном примере, который встретится дальше.

Рассмотрим множество всевозможных распределений вероятностей  $\mathfrak{P}(\Omega)$  на некотором фиксированном измеримом пространстве  $\Omega$ . Это множество является выпуклым, так как всякая выпуклая комбинация или «смесь» распределений  $P_j(d\omega)$ , очевидно, является распределением на  $\Omega$ :

$$P(A) = \sum_j p_j P_j(A), \quad A \in \mathcal{A}(\Omega).$$

Всякой точке  $\omega \in \Omega$  отвечает  $\delta$ -распределение, сосредоточенное в точке  $\omega$ :

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & A \ni \omega, \\ 0, & A \not\ni \omega. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}(\Omega)$  разделяет точки пространства  $\Omega$ , т. е. для любых  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  существует такое  $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ , что  $\omega_1 \in A, \omega_2 \notin A$ . Тогда соответствие  $\omega \rightarrow \delta_\omega$  является взаимно однозначным. Крайними точками множества  $\mathfrak{P}(\Omega)$  являются  $\delta$ -распределения и только они. Очевидно, что для любого  $P \in \mathfrak{P}(\Omega)$  выполняется равенство

$$P(A) = \int_{\Omega} \delta_\omega(A) P(d\omega), \quad A \in \mathcal{A}(\Omega). \quad (I.2.1)$$

Это представление является непрерывным аналогом разложения по крайним точкам, причем роль набора коэффициентов  $p_j$  здесь играет распределение  $P(d\omega)$ . Представление (I.2.1) однозначно, так что выпуклое множество  $\mathfrak{P}(\Omega)$  обладает свойством, характеризующим в конечномерном случае симплекс, и мы сохраним за ним это название.

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда  $\Omega = \Omega_n$  состоит из конечного числа  $n$  точек ( $\mathcal{A}(\Omega_n)$  является булевой алгеброй всех подмножеств пространства  $\Omega_n$ ). Тогда множество

$$\mathfrak{P}_n = \left\{ P = [p_1, \dots, p_n] : p_j \geq 0, \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\},$$

очевидно, является  $(n-1)$ -мерным симплексом с вершинами

$$[1, 0, \dots, 0], \quad \dots, \quad [0, \dots, 0, 1].$$

Для нас будет удобно записывать  $P$  в виде диагональной  $(n \times n)$ -матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix}.$$

Тогда условия, характеризующие  $P$ , запишутся в виде

$$P \geq 0, \quad \text{Tr } P = 1, \quad (\text{I.2.2})$$

где  $\text{Tr}$  обозначает *след матрицы*, т. е. сумму диагональных элементов.

Если  $X$  — случайная величина на  $\Omega_n$ , принимающая значения  $x_1, \dots, x_n$ , то, полагая

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix},$$

получаем, что математическое ожидание величины  $X$  относительно распределения вероятностей  $P$  равно

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = \text{Tr } PX. \quad (\text{I.2.3})$$

Рассмотрим множество  $\Omega_n$  случайных величин, удовлетворяющих условию  $0 \leq x_j \leq 1$ , т. е.

$$0 \leq X \leq I, \quad (\text{I.2.4})$$

где  $I$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица. Тогда  $\Omega_n$  будет выпуклым множеством — единичным гиперкубом, а его крайними точками будут вершины гиперкуба, т. е. такие матрицы  $X$ , для которых  $x_j$  равно 0 или 1. Для таких матриц  $X^2 = X$ , так что крайними точками множества  $\Omega_n$  являются проекционные матрицы.

Этот простейший пример позволяет естественно подойти к другому, который представляет основной интерес в связи с квантовой теорией. Мы можем рассматривать (комплексные)  $(n \times n)$ -матрицы как операторы, действующие в  $n$ -мерном унитарном пространстве  $\mathcal{H}$  вектор-столбцов  $\varphi = [\varphi_j]$ ,  $\psi = [\psi_j]$ . Скалярное произведение векторов  $\varphi$  и  $\psi$  определяется формулой  $(\varphi|\psi) = \sum \bar{\varphi}_j \psi_j$ . Мы будем использовать обозначения Дирака  $|\varphi\rangle, |\psi\rangle, \dots$  для вектор-столбцов  $\varphi, \psi, \dots$  и  $\langle\varphi|, \langle\psi|, \dots$  для эрмитово сопряженных вектор-строк  $\varphi^*, \psi^*, \dots$ . Тогда скалярное произведение получается графическим объединением символов сомножителей  $\langle\varphi|$  и  $|\psi\rangle$ . «Внешнее» произведение  $|\psi\rangle\langle\varphi|$  является  $(n \times n)$ -матрицей с компонентами  $[\psi_j \bar{\varphi}_k]$ .

Если  $\psi$  — единичный вектор,  $(\psi|\psi) = 1$ , то  $S_\psi = |\psi)(\psi|$  является матрицей (ортогональной) проекции на вектор  $\psi$ .

Согласно конечномерной спектральной теореме для всякой эрмитовой  $(n \times n)$ -матрицы  $X$  найдется ортонормированный базис собственных векторов  $\{e_j; j = 1, \dots, n\}$ , в котором  $X$  имеет диагональный вид

$$X = \sum_{j=1}^n \lambda_j |e_j)(e_j|, \quad (I.2.5)$$

где  $\lambda_j$  — (вещественные) собственные числа матрицы  $X$ , отвечающие собственным векторам  $e_j$ .

В соотношении (I.2.5) числа  $\lambda_j$  не обязательно различны. Обозначим через  $x_1, \dots, x_m$  ( $m \leq n$ ) различные собственные числа матрицы  $X$ , занумерованные в порядке возрастания, и пусть

$$E_k = \sum |e_j)(e_j|$$

(где сумма распространяется на все  $e_j$ , отвечающие собственному числу  $x_k$ ) — матрица проекции на инвариантное подпространство матрицы  $X$ , отвечающее собственному числу  $\lambda_k$ . Тогда имеет место другая форма спектрального представления:

$$X = \sum_{k=1}^m x_k E_k. \quad (I.2.6)$$

Рассмотрим множество  $\mathfrak{S}_n$  всех комплексных эрмитовых  $(n \times n)$ -матриц  $S = [s_{jk}]$ , удовлетворяющих условиям типа (I.2.2):

$$S \geq 0, \quad \text{Tr } S = 1, \quad (I.2.7)$$

где первое условие означает неотрицательную определенность матрицы. Согласно конечномерной спектральной теореме

$$S = \sum_{j=1}^n \lambda_j S_{\psi_j}, \quad (I.2.8)$$

где  $\lambda_j$  — собственные числа матрицы  $S$ , а  $S_{\psi_j} = |\psi_j)(\psi_j|$  — взаимно ортогональные проекторы на единичные собственные векторы матрицы  $S$ . Из условий (I.2.7) следует, что собственные числа матрицы  $S$  образуют распределение вероятностей, т. е.

$$\lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

В частности,  $0 \leq \lambda_j \leq 1$ , и из равенства (I.2.8) следует, что

$$S - S^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j (1 - \lambda_j) S_{\psi_j} \geq 0,$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда  $S = S_{\psi_k}$  для некоторого  $\psi_k$ , т. е. если  $S$  — одномерный проектор.

**Предложение I.2.3.** *Множество  $\mathfrak{S}_n$  выпукло, а его крайними точками являются в точности одномерные проекторы.*

**Доказательство.** Первое утверждение следует из того, что оба условия (I.2.7) выдерживают образование выпуклых комбинаций. Докажем, что всякий одномерный проектор  $S$  является крайней точкой. Пусть

$$S = p_0 S_0 + p_1 S_1; \quad p_0, p_1 > 0, \quad p_0 + p_1 = 1.$$

Возводя это соотношение в квадрат, вычитая  $S^2$  из  $S$  и учитывая, что  $S \geq S^2$  для  $S \in \mathfrak{S}_n$ , получаем

$$S - S^2 = p_0 (S_0 - S_0^2) + p_1 (S_1 - S_1^2) + p_0 p_1 (S_0 - S_1)^2 \geq p_0 p_1 (S_0 - S_1)^2.$$

Поскольку  $S$  — одномерный проектор, получаем, что  $S = S^2$ , откуда следует, что  $S_0 = S_1$ . Таким образом,  $S$  является крайней точкой.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим спектральное разложение (I.2.8). Так как  $S_{\psi_j} \in \mathfrak{S}_n$  и  $S_{\psi_j} \neq S_{\psi_k}$  при  $j \neq k$ , для матрицы  $S$ , являющейся крайней точкой множества  $\mathfrak{S}_n$ , сумма (I.2.8) может содержать только одно ненулевое слагаемое. Следовательно,  $S = S_{\psi_j}$  для некоторого  $\psi_j$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Формула (I.2.8) дает один из многих вариантов разложения  $S$  по крайним точкам.

Рассмотрим также выпуклое множество  $\mathfrak{X}_n$  всех эрмитовых  $(n \times n)$ -матриц  $X$ , удовлетворяющих ограничению (I.2.4). Покажем, что крайними точками множества  $\mathfrak{X}_n$  являются проекторы, т. е. эрмитовы матрицы, удовлетворяющие условию  $X^2 = X$ , и только они. Доказательство того, что всякий проектор является крайней точкой, проводится так же, как в предложении I.2.3. Докажем, что всякая крайняя точка обязательно является проектором. Запишем спектральное разложение матрицы  $X$  в виде (I.2.6), где  $x_k$  — собственные числа матрицы  $X$  (с учетом кратности), а  $E_k$  — проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному числу  $x_k$ . Пусть  $x_1 > \dots > x_m$ , тогда, применяя к сумме (I.2.6) преобразо-

вание Абеля и учитывая, что  $E_1 + \dots + E_m = I$ , получаем

$$X = (1 - x_1) \cdot 0 + \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) \cdot E'_k + x_m \cdot I,$$

где  $E'_k = E_1 + \dots + E_k$ . Так как проекторы  $0, I$ , а также  $E'_k$  принадлежат  $\mathfrak{X}_n$ , а все коэффициенты при них неотрицательны и в сумме составляют 1, матрица  $X$  является выпуклой комбинацией (несовпадающих) проекторов. Если  $X$  — крайняя точка, то сумма должна состоять из одного слагаемого, так что матрица  $X$  должна быть проектором. Еще раз подчеркнем, что разница между множествами  $\mathfrak{P}_n$  и  $\mathfrak{S}_n$ , (соответственно между  $\mathfrak{O}_n$  и  $\mathfrak{X}_n$ ) заключается в том, что во втором случае рассматриваются все эрмитовы матрицы, удовлетворяющие равенству (I.2.7) (соответственно (I.2.4)), тогда как в первом — только диагональные, или, что то же самое, одновременно диагонализуемые (коммутирующие) матрицы. Поэтому второй случай можно рассматривать как «некоммутативный» аналог первого; так, матрицу  $S \in \mathfrak{S}_n$  можно назвать «некоммутативным распределением вероятностей», а эрмитову матрицу  $X$  — «некоммутативной случайной величиной», задав среднее значение формулой типа (I.2.3). Дальше мы увидим, что здесь кроется нечто большее, чем простая аналогия.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть и случай вещественных симметричных матриц, однако для квантовой теории основной интерес представляет именно комплексный случай. В заключение рассмотрим подробнее структуру выпуклого множества  $\mathfrak{S}_n$  в простейшем «некоммутативном» случае  $n = 2$ . Всякая матрица  $S \in \mathfrak{S}_2$  может быть записана в виде

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & 1 - \theta_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.2.9})$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  — вещественные числа, называемые параметрами Стокса. Условие  $S \geq 0$  равносильно неравенству  $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \leq 1$ . Таким образом,  $\mathfrak{S}_2$  как выпуклое множество представляет собой шар в трехмерном вещественном пространстве; крайними точками являются матрицы, для которых точка  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$  лежит на сфере  $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$ . В случае  $n > 2$  множество  $\mathfrak{S}_n$  является уже некоторым собственным подмножеством  $(n^2 - 1)$ -мерного вещественного шара и дать ему компактное геометрическое описание представляется затруднительным.

### § 3. Определение статистической модели

Основываясь на рассуждениях из § 1, введем следующее определение: *статистической моделью*<sup>1</sup> назовем совокупность  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ , состоящую из некоторого выпуклого множества  $\mathfrak{S}$  и некоторого класса  $\mathfrak{M}$  аффинных отображений множества  $\mathfrak{S}$  в множества распределений вероятностей на различных пространствах  $U$ . Элементы множества  $\mathfrak{S}$  называются *состояниями*, а отображения из  $\mathfrak{M}$  — *измерениями*. Проблему теоретического описания всякого объекта или явления, удовлетворяющего статистическому постулату, можно тогда сформулировать как задачу построения соответствующей статистической модели. Говоря подробнее, такое построение должно, во-первых, содержать описание математических объектов  $\mathfrak{S}$  (множества теоретических состояний) и  $\mathfrak{M}$  (множества теоретических измерений) и, во-вторых, устанавливать правила соответствия между реальными процедурами приготовления и измерения и теоретическими объектами, т. е. задавать вложение экспериментальных данных в статистическую модель.

В классической теории вероятностей и математической статистике рассматриваются статистические модели, в которых множество состояний  $\mathfrak{S}$  имеет особо простую структуру. Квантовая теория имеет дело с радикально отличной статистической моделью. Мы рассмотрим эти модели в следующих параграфах.

В этой главе мы часто будем проводить рассуждения на измерениях с конечным числом значений. В этом случае множество  $U$  возможных результатов индивидуального измерения конечно и распределение вероятностей результатов измерения задается конечным набором аффинных вещественных функций  $\{\mu_S(u); u \in U\}$  на  $\mathfrak{S}$ , удовлетворяющим условиям

$$\mu_S(u) \geq 0, \quad u \in U, \quad \sum_{u \in U} \mu_S(u) = 1. \quad (\text{I.3.1})$$

Здесь  $\mu_S(u)$  — вероятность результата  $u$  относительно состояния  $S$ . Для любого  $B \subset U$  имеем

$$\mu_S(B) = \sum_{u \in B} \mu_S(u).$$

Технически этот случай гораздо проще непрерывного, и в то же время он позволяет понять основные положения теории. Практиче-

---

<sup>1</sup> Концепция статистической модели будет рассмотрена во всех подробностях в Дополнении.