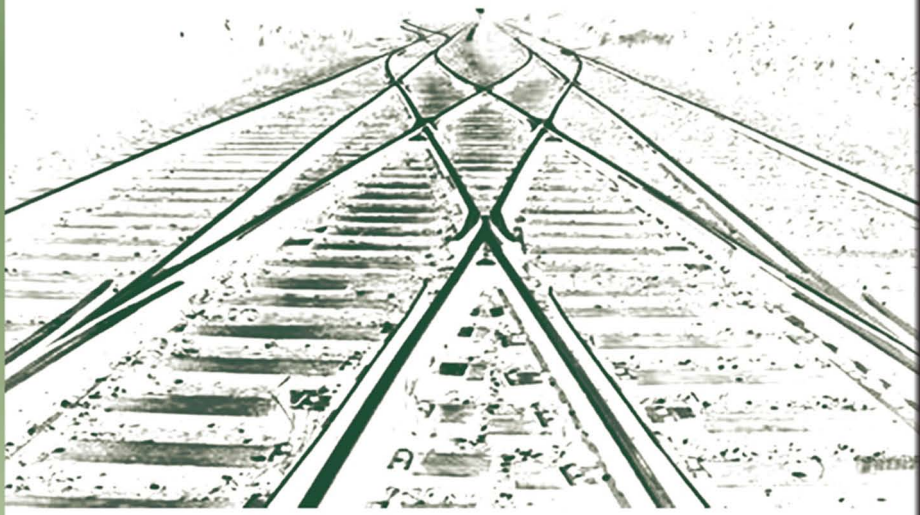
НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Е. К. МАКАРОВ, С. Н. ПОПОВА

УПРАВЛЯЕМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



УДК 517.926+517.977

Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск : Беларус. навука, 2012. – 407 с. – ISBN 978-985-08-1393-0.

Рассматривается задача управления асимптотическими инвариантами нестационарных линейных управляемых систем, удовлетворяющих условиям равномерной полной управляемости и/или равномерной согласованности. Исследуется вопрос о получении достаточных условий разрешимости этой задачи в ее различных постановках. Приводится полное решение проблемы глобальной управляемости показателей Ляпунова для равномерно вполне управляемых систем.

Для специалистов в области теории дифференциальных уравнений и теории управления, студентов и аспирантов университетов.

Библиография: 235 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук В. Т. Борухов,
доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Петров,
заслуженный деятель науки Удмуртской Республики

ISBN 978-985-08-1393-0

© Макаров Е. К., Попова С. Н., 2012
© Оформление. РУП «Издательский дом «Беларуская навука», 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Введение 8

Глава I. **Асимптотические инварианты и управляемость** 29

§ 1. Характеристические показатели Ляпунова 29

§ 2. Асимптотические инварианты и устойчивость 46

§ 3. Управляемые состояния. Матрица Калмана 80

§ 4. Полная управляемость системы на отрезке 86

§ 5. Равномерная полная управляемость 93

Глава II. **Управляемость и согласованность** 101

§ 6. Согласованность систем с наблюдателем 101

§ 7. Следствия для динамической системы сдвигов . . . 114

§ 8. Согласованность и управляемость 122

§ 9. Коэффициентные признаки согласованности 126

§ 10. Метод поворотов Миллионщикова для согласованных систем 130

Глава III. **Локальная достижимость линейных управляемых систем** 137

§ 11. Метод поворотов и локальная достижимость линейных однородных систем 138

§ 12. Управляемость и достижимость 145

§ 13. Локальная достижимость относительно множества 158

§ 14. Согласованность и достижимость 164

§ 15. Некоторые следствия из свойства достижимости . . 174

Глава IV. **Локальная управляемость асимптотических инвариантов** 181

§ 16. Локальная и глобальная управляемость асимптотических инвариантов 181

§ 17. Пропорциональная управляемость полного спектра показателей Ляпунова 186
§ 18. Локальная управляемость спектра и коэффициента неправильности Ляпунова правильных систем . 196
§ 19. Расчлененные линейные системы 201
§ 20. Локальная управляемость показателей Ляпунова расчлененных систем 211
§ 21. Пропорциональная локальная управляемость показателей Ляпунова двумерных систем 218
§ 22. Необходимое условие устойчивости показателей линейной однородной системы 228
§ 23. Необходимость условия равномерной полной управляемости для локальной управляемости показателей Ляпунова 231
§ 24. Управление показателями Ляпунова почти периодического уравнения 247

Глава V. **Глобальная управляемость асимптотических инвариантов** 251

§ 25. Глобальная достижимость, глобальная ляпуновская приводимость и глобальная управляемость асимптотических инвариантов 251
§ 26. Критерии равномерной полной управляемости . . . 264
§ 27. Теорема о глобальной достижимости 281
§ 28. Глобальная ляпуновская приводимость периодических систем 300
§ 29. Глобальная достижимость двумерных систем 310
§ 30. Глобальная скаляризуемость линейных управляемых систем 325
§ 31. Глобальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова, центральных, особых и экспоненциальных показателей 332

Заключение 344

Дополнение. *Козлов А. А.* Теорема о глобальном управлении показателями Ляпунова двумерных систем 346

О тех, кому посвящена эта книга: вместо именного указателя 383

Литература 387

Предметный указатель 404

Некоторые обозначения 406

Нашим Учителям
Николаю Алексеевичу Изобову и
Евгению Леонидовичу Тонкову —
в год их 70-летия

ПРЕДИСЛОВИЕ

Встреча в Минске оказалась для Евгения Леонидовича неожиданно «теплой». Едва выйдя январским утром 1966 года из вагона московского поезда на вокзале белорусской столицы, молодой математик из морозного приуральского Ижевска попал под проливной дождь. Хорошее пальто было безнадежно испорчено[1]. Зато не было испорчено настроение. Дождь стал добрым предзнаменованием: состоявшееся вскоре знакомство Е. Л. Тонкова с Ю. С. Богдановым, Н. А. Изобовым, И. В. Гайшуном, Т. К. Шемякиной, Л. В. Тригубовичем положило начало многолетней дружбе и плодотворному сотрудничеству математиков Беларуси и Удмуртии.

Сама тема этой книги — управление характеристическими показателями Ляпунова и другими асимптотическими инвариантами равномерно вполне управляемых линейных нестационарных систем — впервые прозвучала для широкой аудитории здесь же, в Минске, в 1975 году на заседаниях IV Конференции математиков Белоруссии в яростных дискуссиях Евгения Леонидовича Тонкова и Леонида Евгеньевича Забелло, о чем до сих пор хорошо помнят свидетели тех событий.

Но прежде чем удалось получить первые серьезные продвижения в решении задач управления показателями Ляпунова, несмотря на простоту и ясность выработанных к этому времени их исходных постановок, потребовалось почти два десятилетия интенсивного развития и взаимопроникновения

[1] В конечном счете действие дождя свелось к преобразованию подобия, и некоторое время спустя это уникальное математическое пальто, уже в преобразованном виде, смогло еще раз помочь развитию математики в Удмуртии, защищая от внезапной сентябрьской стужи С. Г. Крейна, специально приехавшего в Ижевск из Воронежа, чтобы прочитать несколько лекций преподавателям и студентам УдГУ.

теории нестационарных линейных систем управления и теории характеристических показателей. Важнейшую роль в этом процессе сыграли работы Е. Л. Тонкова и Н. А. Изобова, а также тесные контакты между Белорусской и Ижевской математическими научными школами. Их не смогли нарушить даже экстремальные трудности и турбулентность безумных 90-х. Напротив, основные результаты были получены именно в те годы. Чудовищные симулякры[1] этой классической эпохи постмодерна явились теми «ужасами мира», отвращение от созерцания которых привело нас, как и средневековых риторов из популярного тогда романа[2], к попыткам решить нерешаемое. Однако, в отличие от них мы не только сохранили спокойную рабочую атмосферу, но и смогли кое-чего достичь.

Разумеется, своим успехом мы во многом обязаны тем, кто нас поддерживал и нам помогал.

В ходе наших работ мы постоянно обращались за помощью к библиотекарям и всегда получали ее в любом требуемом размере. Мы приносим свою благодарность за это им всем: А. С. Кошелевой, которая много лет совмещала в одном лице все мыслимые должности в библиотеке Института математики, заведующей филиалом ЦНБ НАН Беларуси при Институте математики Т. Ф. Готиной, заведующей библиотекой Удмуртского института истории, языка и литературы В. В. Исаковой, а также сотрудникам Национальной библиотеки Удмуртской республики — заведующей отделом краеведческой и финно-угорской литературы Н. П. Лимоновой и ведущим библиотекарям Н. Н. Бочкаревой и А. Л. Семеновой.

Далеко не так беспрекословно, но для тех непростых времен довольно щедро отмерялась нам и помощь материальная.

С российской стороны наши исследования поддерживались Программой Президиума РАН «Математическая теория управления», программой «Университеты России» по направ-

[1] Симулякр — «копия» с оригинала, который никогда не существовал. Если отвлечься от хитросплетений постмодернистских теорий, то нетрудно заметить, что это всего лишь рафинированный термин для описания вполне обыденной ситуации, когда говорят одно, а делают другое, но только в очень далеко зашедшей стадии.

[2] *Имя розы*, роман Умберто Эко: «. . . было время, когда, чтобы забыть об ужасах мира, грамматики брались за труднейшие вопросы. Я слышал, что в те времена однажды риторы Габунд и Теренций пятнадцать дней и пятнадцать ночей дискутировали о звательном падеже к «я» и в конце концов подрались» [229, с. 322].

лению «Фундаментальные проблемы математики и механики» (проект 1.5.22), Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94–01–00843–а, 97–01–00413, 99–01–00454, 03–01–00014, 06–01–00258), Конкурсным центром фундаментального естествознания (гранты 93–1–46–18, 97–0–1.9, Е 00–1.0–5, Е 02–1.0–100) и Конкурсным центром Удмуртского государственного университета (грант 97–04). С белорусской стороны исследования проводились в ходе выполнения заданий государственных программ фундаментальных исследований «Математические структуры» и «Математические модели», а также НИР по договору №Ф05–081 с Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований.

С 2007 года между Удмуртским государственным университетом и Институтом математики НАН Беларуси действует Соглашение о сотрудничестве и совместной деятельности. Именно в его рамках и осуществлялась подготовка рукописи этой книги.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность руководству Удмуртского государственного университета и Института математики НАН Беларуси, чьи помощь и понимание сделали возможной нашу совместную работу даже в самые трудные времена.

Ижевск,
август 2010 года

ВВЕДЕНИЕ

Толлозэ тодытэк, туннэзэ уд тоды.
Удмурт визъкыл[1]

Што было, тое ведаем, а што будзе,
тое ўбачым.
Беларуская прыказка

Как это часто случается, в начале всего было слово: стабилизация. И сперва речь в дискуссиях зачинателей новой теории шла главным образом о ней, чему свидетельством их статьи [213, 55]. К концу 1960-х, когда стала вызревать сама идея управления асимптотическими свойствами нестационарных линейных систем, это слово обозначало очень широкую область исследований, уже тогда почти необъятную по обилию результатов, разнообразию задач, подходов и методов. Не пытаясь дать здесь сколь-нибудь обширную библиографию по этой теме, лишь вскользь затрагиваемой нами, укажем только на публикации Р. Калмана [92, 239, 240] и Н. Н. Красовского [98 – 102], неоднократно процитированные в работах по теории управления асимптотическими инвариантами и оказавшие огромное влияние на ее становление.

В самом широком смысле слова, стабилизация — это такое воздействие на управляемый объект, при котором его поведение становится устойчивым, причем различным видам устойчивости соответствуют различные виды стабилизации.

С точки зрения классической теории автоматического регулирования наибольший интерес представляла задача о стабилизации управляемого объекта, поведение которого описывается стационарной линейной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где A и B — вещественные матрицы подходящих размеров. Под стабилизацией этого объекта (или, что то же самое, системы (0.1)) обычно понимается введение такой обратной связи

[1] Не зная вчерашнее, не узнаешь сегодняшнее. *Удмуртская пословица* [206, с. 117].

$u = Ux$ с постоянным матричным коэффициентом U, что получающаяся замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BU)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

становится асимптотически устойчивой.

В силу известного критерия [48, с. 89] задача стабилизации системы (0.1) сводится к перемещению в открытую левую полуплоскость комплексной плоскости всех собственных значений $\lambda_i(A + BU)$, $i = 1, \ldots, n$, матрицы $A + BU$ под воздействием стационарного матричного управления $U \in \mathrm{M}_{mn}$. Отсюда понятно, что ее решение далеко не единственно, хотя бы потому, что характеристические корни $\lambda_i(A + BU)$ можно разместить в левой полуплоскости по-разному. И если их положение относительно мнимой оси, то есть величина $\alpha = -\max\limits_i \mathrm{Re}\lambda_i(A+BU) > 0$, определяет асимптотическую скорость затухания переходного процесса в системе по экспоненте $e^{-\alpha t}$, то в зависимости от их взаимного расположения меняется качество этого процесса, определяемое в первую очередь количеством, размахом и длительностью колебаний параметров состояния системы в его ходе, что принято характеризовать такими показателями, как колебательность, перерегулирование и быстродействие [162, с. 111]. Естественное желание получить быструю и плавную (монотонную или почти монотонную) стабилизацию системы в требуемом состоянии привело к задачам синтеза регуляторов с дополнительными критериями качества [112]. Один из часто применяемых методов такого синтеза — метод размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы, которые для системы (0.1) совпадают с корнями характеристического многочлена $\lambda_i(A + BU)$.

Возможности этого метода не исчерпываются лишь задачами регулирования, сводящимися к удержанию системы в заданном состоянии. В задаче стабилизации наиболее важны свойства установившегося режима. Для следящих систем в первую очередь нужно обеспечить высокое качество переходных процессов при изменении задающего сигнала. Если система (0.1) вполне управляема, то введение в нее обратной связи по состоянию $u = Ux + v$, где U — произвольная $n \times m$-матрица, не нарушает этого свойства, и скорректированная система

$$\dot{x} = (A + BU)x + Bv, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

также вполне управляема [221, с. 77]. Изменяя за счет подходящего выбора U расположение собственных значений матрицы $A + BU$, можно, не увеличивая размерности синтезируемой системы автоматического управления, обеспечить ее устойчивость, выбрать подходящее быстродействие и подавить паразитные колебания.

Весь круг вопросов, относящихся к решению таких задач, весьма близкий к инженерной практике, обычно обозначается как теория модального управления. Ее подробное освещение можно найти в книге [108] или, например, в [162].

Типичной задачей модального управления является задача о назначении спектра для системы (0.3), в которой за счет выбора матрицы управления U требуется обеспечить точные равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

для произвольного наперед заданного набора комплексных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

В случае системы с одним входом, когда $m = 1$, $b{:=}B \in \mathrm{M}_{n,1}$ — вектор, а управление u — скаляр, разрешимость задачи о назначении спектра эквивалентна обратимости матрицы

$$S := [b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b].$$

Этот критерий может быть легко получен, например, как следствие метода преобразования векового уравнения, предложенного в 1931 году великим русским механиком и кораблестроителем А. Н. Крыловым в работе [104] (см. также [43, с. 190–192]). Судя, однако, по тому, что писал П. Бруновский в своей работе [231], уже к 1969 году фактическое авторство за давностью лет забылось, а сам результат считался общеизвестным.

Принципиальным моментом здесь является тот очевидный факт, что условие обратимости матрицы S при $m = 1$ представляет собой не только необходимое и достаточное условие разрешимости задачи о назначении спектра, но и критерий полной управляемости системы (0.1). Основываясь на этом наблюдении, румынский математик В. М. Попов в начале 1960-х годов доказал [161] (см. также монографии [245, с. 352; 221, с. 79]), что и в общем случае произвольного $m \in \mathbb{N}$ необходимое и достаточное условие разрешимости задачи о назначении спектра для системы (0.2) совпадает с критерием полной

управляемости системы (0.1), то есть с условием

$$\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n, \tag{0.4}$$

незадолго до этого предложенным Р. Калманом [92, 239, 240]. Позднее М. Уонэм в своей работе [250] уточнил, что если числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ образуют спектр вещественного типа (такой, каким может обладать вещественная матрица), то матрица обратной связи U может быть выбрана вещественной.

Может показаться удивительным, особенно с позиций нынешнего дня, что вплоть до конца пятидесятых годов прошлого века в теории автоматического управления рассматривались почти исключительно стационарные системы. Начала теории управляемости для стационарных и нестационарных систем были сформулированы одновременно [92, 239, 240] около 1960 года, но реальный интерес к нестационарным задачам появился не ранее середины шестидесятых, а первые попытки постановки и решения задач стабилизации и, тем более, задач модального управления для нестационарных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{0.5}$$

относятся лишь к концу 1960-х и даже началу 1970-х годов. Возможно, такое промедление было вызвано некоторой неэффективностью калмановского критерия полной управляемости для нестационарных систем, выражающегося не через коэффициенты системы, а через ее матрицу Коши. Не следует также забывать и о том, что после основополагающего труда «Общей задачи об устойчивости движения» А. М. Ляпунова [115, с. 7 – 263], в теории дифференциальных уравнений систематические исследования нестационарных линейных систем возобновились лишь в середине XX века[1].

[1] Это хорошо прослеживается по библиографии обзора Л. Чезари [227], где на фоне довольно многочисленных публикаций межвоенного периода по различным разделам асимптотической теории дифференциальных уравнений почти совершенно теряются работы классиков теории показателей О. Перрона, К. П. Персидского и особенно П. Боля, значение достижений которого было оценено лишь много позже [46, с. 211]. В послевоенное время ситуация радикально изменилась. Мировая война, поставив перед математиками новые задачи, возродила интерес к идеям А. М. Ляпунова и резко активизировала исследования по теории нестационарных линейных систем. Время начала работы Н. П. Еругина над «Приводимыми системами» [49] —1942 год — совсем не случайно.

В одной из первых работ по модальному управлению для нестационарных систем [231] П. Бруновский показал, что *для ω-периодических систем* (0.5) *с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами разрешимость задачи о назначении спектра мультипликаторов при всяком допустимом наборе их предписанных значений μ_i, $i = 1, \ldots, n$, эквивалентна полной управляемости рассматриваемой системы.* При этом матрица управляющего воздействия $U(\cdot)$ может быть выбрана из множества ω-периодических непрерывно дифференцируемых $m \times n$-матриц.

Если мы ставим своей целью распространить этот результат на общие линейные нестационарные системы, то нам необходимо прежде всего ответить на три вопроса: во-первых, что понимать под спектром замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.6}$$

во-вторых, каким образом следует интерпретировать условие полной управляемости, и, в-третьих, из какого класса выбирать матрицу обратной связи U.

Для периодических систем разумное решение этих вопросов, принятое в [231], очевидно. Как следует из теории Флоке – Ляпунова [48, с. 183 – 190], эти системы по своим свойствам очень близки к стационарным, что позволяет почти буквально перенести на них большинство элементов постановки задачи модального управления. В качестве спектра ω-периодической системы (0.6) естественно рассматривать совокупность ее мультипликаторов $\mu_1, \ldots, \mu_n$, то есть собственных значений ее матрицы монодромии $X_U(\omega, 0)$ [48, с. 183,185]; здесь $X_U(t, s)$ — матрица Коши системы (0.6). Вместо коэффициентного условия полной управляемости (0.4) следует пользоваться ее определением [93, с. 43], а матричное управление $U(\cdot)$ представляется столь же естественным выбирать так, чтобы замкнутая система (0.6) принадлежала тому же классу систем, что и свободная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{0.7}$$

Свойства общих нестационарных линейных систем намного более разнообразны, а возможности выбора различных числовых и нечисловых характеристик поведения их решений

значительно шире, чем для стационарных. В случае нестационарных и непериодических систем самым естественным обобщением понятия спектра является, по-видимому, понятие полного спектра показателей Ляпунова [115, с. 34] (см. также [74, с. 71 – 72; 86, с. 16]). Действительно, если система (0.7) стационарна, то ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из набора вещественных частей собственных значений матрицы коэффициентов A [48, с. 138]. Если же матрица коэффициентов $A(\cdot)$ системы (0.7) имеет период ω, то ее мультипликаторы μ_j и характеристические показатели Ляпунова $\lambda_j(A)$ связаны равенствами [48, с. 185]

$$\lambda_j(A) = \frac{1}{\omega} \ln |\mu_j|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Основные определения и некоторые теоремы теории характеристических показателей Ляпунова приведены ниже в § 1–2. За более детальным и обширным изложением этой теории следует обратиться к работам [1, 17, 27, 46, 48, 74, 86, 115].

Важнейшее свойство показателей Ляпунова состоит в том, что для любой линейной системы именно они определяют ее асимптотическую устойчивость. Поэтому задача управления показателями включает в себя как частный случай задачу стабилизации. Из последующих событий и содержания статей [212, 213, 55, 57] явствует, что как раз вопрос о способе выбора стабилизирующей обратной связи $u = U(t)x$ для нестационарной системы (0.5) и обсуждался в 1975 году на IV Конференции математиков Белоруссии [54]. К этому времени уже был известен ряд работ советских и зарубежных математиков, посвященных стабилизации нестационарных линейных управляемых систем, в том числе [98 – 102, 236, 203, 249], однако общая задача об управлении характеристическими показателями Ляпунова еще не была сформулирована в пригодном для решения виде.

Одним из различий в подходах, выявившихся в минских дискуссиях 1975 года, стало расхождение в выборе формы условия управляемости в постановке задачи управления показателями Ляпунова. Как известно, критерий (0.4) полной управляемости стационарных систем не переносится на случай произвольных линейных управляемых систем. Его обобщение,

которое состоит в том, что ранг матрицы управляемости

$$Q(t) := [Q_0(t), Q_1(t), \ldots, Q_{n-1}(t)], \tag{0.8}$$

где $Q_0(t) := B(t), Q_i(t) := A(t)Q_{i-1}(t) - \dot{Q}_{i-1}(t), i = 1, \ldots, n-1$, должен достигать в некоторой точке рассматриваемого промежутка наибольшего возможного значения, равного n (размерности системы), справедливо только в случае аналитических коэффициентов (А. Чанг, [232]). Для систем с гладкими неаналитическими коэффициентами (даже класса C^∞) — это лишь достаточное, но не необходимое условие полной управляемости (Н. Н. Красовский, [102, с. 148]), которое одновременно является и достаточным условием стабилизируемости (Н. Н. Красовский, [99; 101, с. 499]).

Много позднее, уже в 1984 году, Е. Л. Тонков писал в [216, с. 18]: «Вопрос об эффективных условиях полной управляемости ... (важность которого отмечалась Н. Н. Красовским еще в 1968 году [102, с. 15]) по-прежнему не получил существенного развития». Но в то время, в середине 70-х, многие математики продолжали вести поиск эффективных, в первую очередь коэффициентных, условий полной управляемости, пригодных для нестационарных систем с негладкими коэффициентами. Такие результаты тогда и в последующие годы в Минске и Ижевске получали В. Т. Борухов [21, 20], Л. Е. Забелло [51, 52, 53, 56], А. А. Леваков [111], С. А. Минюк [150], С. Ю. Култышев и Е. Л. Тонков [109], Л. И. Родина и Е. Л. Тонков [192] и другие авторы. Много работал в этом направлении и Минский семинар по проблемам управления, где эта задача ставилась Р. Габасовым и Ф. М. Кирилловой и решалась на основе идеологии определяющего уравнения [32, с. 71; 33].

Программу решения задачи управления показателями Ляпунова и другими асимптотическими характеристиками линейных систем, основанную на поиске подходящих условий полной управляемости, предложил и много лет упорно отстаивал Л. Е. Забелло [55, 57, 58]. К сожалению, ему не удалось далеко продвинуться в этом направлении, не в последнюю очередь потому, что поиск требуемых условий управляемости оказался малорезультативным.

Альтернативный подход, представленный работами [203, 249], основан на понятии дифференциальной управляемости [241, 248] (см. также [40, с. 223]). Система (0.5) является диф-

ференциально управляемой на отрезке J, если она вполне управляема на любом сколь угодно малом его подотрезке $J' \subset \subset J$. Если матрица управляемости (0.8) системы (0.5) определена при всех $t \in J$ и всюду на J выполнено условие $\operatorname{rank} Q(t) = n$, то, во-первых, система (0.5) является дифференциально управляемой, и, во-вторых, по матрице управляемости $Q(t)$ можно построить нестационарное преобразование фазового пространства, приводящее эту систему к канонической форме, которая в случае $m = 1$ эквивалентна скалярному уравнению n-го порядка, а в случае $m > 1$ — системе нескольких независимых скалярных уравнений со скалярным же управлением в правой части каждого уравнения ([205, с. 41 – 53; 40, с. 243 – 316]. В свою очередь, задача управления характеристическими показателями Ляпунова скалярного уравнения

$$x^{(n)} + \alpha_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n(t)x = u$$

решается простой обратной связью

$$u = (\alpha_n(t) - \beta_n)x + \ldots + (\alpha_1(t) - \beta_1)x^{(n-1)},$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — коэффициенты многочлена $\lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + + \ldots + \beta_n$, имеющего своими корнями требуемые значения показателей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Поэтому, если построенное по матрице управляемости преобразование, приводящее систему (0.5) к канонической форме, оказывается ляпуновским (или обобщенным ляпуновским), то становится возможным управление характеристическими показателями этой системы, а также ее правильностью, приводимостью и другими асимптотическими характеристиками [204, с. 33; 40, с. 310–311].

Для систем (0.5) с матрицей $A(\cdot)$ класса $C^{2n-2}(\mathbb{R})$ и матрицей $B(\cdot)$ класса $C^{2n-1}(\mathbb{R})$ достаточные условия управляемости полного спектра характеристических показателей Ляпунова получены Е. Я. Смирновым [203 – 205] и В. А. Воловичем [249]. В работах И. В. Гайшуна [34 – 40] для случая $m = 1$ было достигнуто существенное снижение требований к гладкости коэффициентов систем вида (0.5), допускающих приведение к нормальной форме Фробениуса, то есть к виду, эквивалентному скалярному уравнению, что позволило значительно расширить класс систем, охватываемых достаточными

условиями управляемости показателей. Вся совокупность систем с одним входом, приводимых к формам Фробениуса и Хессенберга, полностью описана В. Т. Боруховым и И. В. Гайшуном в статье [22]. Несколько иной метод построения функциональных классов коэффициентов систем, приводящихся к различным нормальным формам, развивается А. И. Астровским [6]. Эти исследования пока не завершены [7, 8]. В статьях Е. Л. Тонкова [246, 220] и В. А. Зайцева [64, 65], также для случая $m = 1$, была предпринята попытка радикально, до уровня измеримости и ограниченности, снизить требования к коэффициентам систем в теоремах о приводимости к виду, эквивалентному скалярному уравнению, однако к настоящему времени законченные результаты получены здесь лишь для двумерных систем.

Изложенный подход к решению задачи управления показателями Ляпунова очень привлекателен своей эффективностью, обусловленной коэффициентным и явным характером большинства возникающих в нем условий. Однако он, по-видимому, не может быть реализован для общих систем вида (0.5) с произвольными коэффициентами из обычных функциональных классов, поскольку они должны либо обладать достаточно высокой гладкостью, либо удовлетворять весьма сложным и специфическим соотношениям.

Подход, которого мы придерживаемся в этой книге, был сформулирован Е. Л. Тонковым на основе результатов работ [236, 212, 213]. В нем предполагается управление произвольными асимптотическими характеристиками равномерно вполне управляемых по Калману линейных систем с негладкими коэффициентами, замкнутых обратной связью, принадлежащей тому же функциональному классу, что и коэффициенты исходной системы.

Напомним, что линейная система (0.5) называется равномерно вполне управляемой (Р. Калман, [239]), если существуют такие числа $\vartheta > 0$ и $\alpha > 0$, что матрица управляемости (матрица Калмана)

$$W(t_0, t_0 + \vartheta) := \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s)\, ds$$

при всяком $t_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$W(t_0, t_0 + \vartheta) \geqslant \alpha E,$$

которое понимается в смысле квадратичных форм, то есть для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\xi^* W(t_0, t_0 + \vartheta)\xi \geqslant \alpha\|\xi\|^2.$$

Если система (0.5) удовлетворяет условиям этого определения, то при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ матрица $W(t_0, t_0+\vartheta)$ обратима, и на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ можно построить калмановское управление

$$u_K(t; t_0, x_0) = -B^*(t)X^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_0 + \vartheta)x_0,$$

которое разрешает задачу управления в 0 из начального состояния x_0 на этом отрезке и, кроме того, удовлетворяет оценке $\|u_K(t; t_0, x_0)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ с константой γ, не зависящей от t_0 и x_0. Существование такого управления является альтернативным определением равномерной полной управляемости [213], более наглядно поясняющим смысл этого термина.

Следуя традициям асимптотической теории линейных систем, в дальнейшем (в основном тексте книги, но не в дополнении к ней) будем рассматривать однородные системы вида (0.7) с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами. Совокупность всех таких систем обозначим $\mathcal{M}_n$. Чтобы замкнутая управлением

$$u = U(t)x \tag{0.9}$$

система (0.5) принадлежала тому же классу $\mathcal{M}_n$, потребуем кусочной непрерывности и ограниченности матрицы $B(\cdot)$, и само́ матричное управление $U(\cdot)$ будем выбирать из множества $KC_{mn}(\mathbb{R})$ кусочно непрерывных и ограниченных на числовой прямой $m \times n$-матриц.

Японские математики М. Икеда, Х. Маеда и Ш. Кодама в своей работе [236], опубликованной еще в 1972 году, но получившей широкую известность в Советском Союзе лишь после опубликования ее реферата в РЖ Математика (1973, 6Б285)[1], установили, что для системы (0.5) с ограниченными

[1] Пометку «Заказал» почерком Е. Л. Тонкова до сих пор можно видеть на полях напротив этого реферата в экземпляре реферативного журнала, хранящемся в библиотеке кафедры дифференциальных уравнений математического факультета УдГУ.

коэффициентами равномерная полная управляемость в смысле Калмана эквивалентна равномерной стабилизируемости замкнутой системы (0.6), означающей, что за счет выбора линейной обратной связи (0.9) для любого наперед заданного числа $m > 0$ можно добиться выполнения при всех $s \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant s$ неравенства

$$\|X_U(t,s)\| \leqslant a(m)e^{-m(t-s)}, \tag{0.10}$$

в котором число $a(m)$ зависит только от заданного m. Отсюда, в частности, следует, что верхний особый (генеральный) показатель $\Omega^0(A+BU)$ и все характеристические показатели Ляпунова $\lambda_i(A+BU)$, $i = 1, \ldots, n$, замкнутой системы (0.6) можно сделать меньшими любого наперед заданного отрицательного числа $-m$. Е. Л. Тонковым показано [212, 213], что для равномерно вполне управляемых почти периодических и рекуррентных систем с почти периодической или же, соответственно, рекуррентной обратной связью имеет место аналогичная эквивалентность.

Доказательство устойчивости замкнутых систем в этих работах проводилось в рамках второго (прямого) метода Ляпунова, поэтому такое его усовершенствование, которое позволило бы получить более детальные результаты о поведении ляпуновских показателей, вероятнее всего, невозможно. В связи с этим Е. Л. Тонковым была поставлена задача о глобальном управлении показателями Ляпунова, состоящая в построении для равномерно вполне управляемой системы (0.5) обратной связи вида (0.9), которая бы обеспечила совпадение совокупности характеристических показателей Ляпунова системы (0.6) с заранее заданным набором вещественных чисел. При постановке этой задачи по аналогии с уже решенным вопросом о стабилизируемости предполагалось, что в общем или, по крайней мере, рекуррентном случае равномерная полная управляемость по Калману системы (0.5) окажется эквивалентной глобальной управляемости ляпуновских показателей замкнутой системы (0.6), понимаемой в смысле следующего определения.

Определение 0.1. Характеристические показатели линейной системы (0.6) называются **глобально управляемыми**, если для всякого набора вещественных чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ найдется кусочно непрерывная ограниченная на $\mathbb{R}$ матрич-

ная функция $U(\cdot)$ такая, что выполнены равенства

$$\lambda_i(A+BU)=\mu_i, \quad i=1,\dots,n,$$

где $\lambda_1(A+BU)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A+BU)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (0.6) при $U=U(\cdot)$.

Несколько забегая вперед, укажем, что эти первоначальные предположения оправдались лишь частично (см. § 31).

Большую роль в развитии исследований в этом направлении сыграла работа тамбовского математика В. А. Лунькова [113] — первая работа, полностью посвященная вопросу о, как в ней сказано, «размещаемости характеристических показателей линейной системы». Она содержала существенные неточности в рассуждениях и поэтому долгое время оставалась недооцененной. В действительности в этой статье В. А. Луньковым были предвосхищены и использованы многие из технических приемов, приведших впоследствии, при их корректном применении, к успешному решению задачи глобального управления показателями. Не менеее важно и то, что основная ошибка в построениях этой статьи заключалась в непосредственном применении калмановского управления для построения обратной связи. Вскрытие этой ошибки стало важным шагом к пониманию сути решаемой задачи.

Первые реальные продвижения в решении задачи управления спектром показателей Ляпунова были сделаны С. Н. Поповой в 1992 году в работах [163, 164], в которых рассматривался вопрос о локальной управляемости показателей.

Определение 0.2 [163]. Характеристические показатели Ляпунова системы (0.6) называются локально управляемыми, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что всякому набору вещественных чисел $\mu_1,\dots,\mu_n$, таких, что $\max\limits_{i=1,\dots,n}|\mu_i|\leqslant\delta$ и $\lambda_i(A)+\mu_i\leqslant\lambda_{i+1}(A)+\mu_{i+1}$ при всех $i\in\{1,\dots,n-1\}$, отвечает кусочно непрерывная ограниченная матричная функция $U_\mu(\cdot)$, удовлетворяющая условию $\|U_\mu(t)\|\leqslant\varepsilon$ и обеспечивающая выполнение равенств

$$\lambda_i(A+BU)=\lambda_i(A)+\mu_i, \quad i=1,\dots,n;$$

здесь $\lambda_i(A)$ — показатели системы (0.7).

При таком определении свойство локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова системы (0.6)

эквивалентно открытости в точке $U(t) \equiv 0$ отображения, которое каждому допустимому управляющему воздействию $U(\cdot)$ ставит в соответствие совокупность характеристических показателей Ляпунова системы (0.6) с таким $U(\cdot)$. Необходимо отметить, что определение 0.2 не вполне соответствует понятию об управляемости и заметно отличается от исходной постановки задачи об управлении спектром, существенно ее усиливая за счет условий малости, накладываемых на используемые управления. В работе [59] В. А. Зайцевым и Е. Л. Тонковым использовалось несколько иное

Определение 0.3. Характеристические показатели линейной системы (0.6) локально управляемы, если найдется такое $\delta > 0$, что для всякого набора чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$ такого, что $\max\limits_i |\mu_i| \leqslant \delta$ и $\lambda_i(A) + \mu_i \leqslant \lambda_{i+1}(A) + \mu_{i+1}$ при всех $i \in \in \{1, \ldots, n-1\}$, найдется кусочно непрерывная ограниченная матричная функция U_μ из некоторого заданного класса допустимых управлений, обеспечивающая выполнение равенств $\lambda_i(A + BU) = \lambda_i(A) + \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$.

При таком подходе локальная управляемость показателей уже может рассматриваться как необходимое условие или же некий ослабленный вариант глобальной их управляемости. Тем не менее, мы будем в дальнейшем придерживаться первоначального определения 0.2 в соответствии с опубликованными работами.

Проблема управления асимптотическими характеристиками дифференциальных систем возникла на стыке двух классических теорий — теории управления и теории характеристических показателей Ляпунова — и для успешного решения составляющих ее задач потребовалось создать методы и освоить идеи, являющиеся результатом взаимного проникновения и взаимного обогащения этих теорий.

Ключевую роль в доказательствах многих теорем об управлении показателями, как в [163, 164], так и в последующих работах, играет представление матрицы Коши $X_U(t, s)$ замкнутой системы (0.6) на отрезках фиксированной длины ϑ в виде

$$X_U(t + \vartheta, t) = H(t)X(t + \vartheta, t), \tag{0.11}$$

или же в виде

$$X_U(t + \vartheta, t) = X(t + \vartheta, t)H(t), \tag{0.12}$$