

В.Г. Иванова, А.И. Тяжев

**Цифровая обработка сигналов
и сигнальные процессоры**

Рекомендовано министерством образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для студентов специальности
210402 «Средства связи с подвижными объектами»
направления подготовки дипломированных
специалистов 210400 – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
Регистрационный номер рецензии №127 от 21.07.2008 г.

Под общей редакцией
д.т.н., профессора Тяжева А.И.

САМАРА - 2008 г.

УДК 621.391.26 (075)
621.391.3 (075)

В.Г. Иванова, А.И. Тяжев

Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры/ Под ред. д.т.н.,
профессора Тяжева А.И.

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности 210402 «Средства связи с подвижными объектами»

Рецензент: Московский технический университет связи и информатики

Аннотация

В системах подвижной связи широко используются микропроцессоры для цифровой обработки сигналов (сигнальные процессоры), в учебном пособии «Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры» в доступной форме изложен материал, описывающий процессы, происходящие в устройствах цифровой обработки сигналов (ЦОС). Описаны процессы дискретизации и квантования сигналов, приводятся сведения из теории Z-преобразования, быстрого преобразования Фурье, вейвлет-преобразований, обширный материал посвящен цифровым фильтрам, цифровым генераторам, фазорасщепителям, демодуляторам и т.д. Описана архитектура сигнальных процессоров и организация вычислений в них, приведены методики расчета различных устройств ЦОС и программы их расчета и моделирования.

Материал пособия содержит много рисунков, поясняющих происходящие в устройствах ЦОС процессы, а также временные диаграммы, графики и характеристики различных устройств ЦОС.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 210402 «Средства связи с подвижными объектами» направления подготовки дипломированных специалистов 210400 Телекоммуникации, оно также окажется полезным для аспирантов, магистрантов и инженерно-технических работников, специализирующихся в области разработки устройств ЦОС, для студентов специальностей 210405 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение», 210302 «Радиотехника», 210403 «Защищенные системы связи», 210404 «Многоканальные телекоммуникационные системы».

Оглавление

Введение.....	
1.Области применения цифровой обработки.....	
2.Классификация сигналов.....	
3. Виды и системы обработки сигналов.....	
4.Элементная база цифровой обработки сигналов.....	
5. Преимущества и недостатки ЦОС по сравнению с аналоговой обработкой....	
1.Дискретизация непрерывных сигналов.....	
1.1.Спектр дискретной косинусоиды. Эффект размножения спектра.....	
1.2.Дискретизация периодического аналогового сигнала с ограниченным спектром. Эффект наложения спектров. Выбор частоты дискретизации.....	
1.3.Дискретизация аperiodических аналоговых сигналов.....	
1.4. Дискретизация узкополосных модулированных сигналов.....	
1.5. Прореживание и интерполяция дискретных сигналов.....	
2.Квантование дискретных сигналов.....	
2.1.Квантование с равномерным шагом (линейное квантование).....	
2.2.Квантователи с переменным шагом квантования (нелинейные квантователи)	
3. Цифровые фильтры.....	
3.1. Свойства Z-преобразования.....	
3.2.Импульсная характеристика цифрового фильтра. Понятие о рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтрах, БИХ- и КИХ- фильтрах.....	
3.3. Определение выходного сигнала фильтра по входному сигналу и импульсной характеристике.....	
3.4. Системная функция цифрового фильтра. Формы программной реализации фильтра.....	
3.5.Частотная характеристика цифрового фильтра.....	
3.6. Цифровой резонатор.....	
3.7. Однородный фильтр.....	
3.8. Триангулярный фильтр.....	
3.9.Устойчивость цифровых фильтров.....	
3.10. Коэффициенты системной функции устойчивого звена второго порядка...	
3.11. Нерекурсивный фильтр с линейной ФЧХ.....	
3.12. Синтез нерекурсивного фильтра с линейной ФЧХ методом ряда Фурье и «окна».....	
3.13. Синтез фильтров с линейной ФЧХ и АЧХ, описываемой функцией без разрывов, методом ряда Фурье.....	
3.14.Расчет нерекурсивных цифровых фильтров с рельефной АЧХ методом наименьших квадратов.....	
3.15. Метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации.....	
3.16. Синтез рекурсивных цифровых фильтров методом билинейного Z – преобразования.....	

3.17. Расчет рекурсивных цифровых резонаторов второго порядка.....	
3.18. Расчет взаимно расстроенной пары цифровых резонаторов.....	
3.19. Определение разрядности АЦП и ЦАП при заданных отношениях сигнал-шум на выходах аналогового и цифрового фильтров.....	
3.20. Определение разрядности АЦП по шумам квантования и требованиям к АЧХ фильтра.....	
3.21. Определение разрядности регистров.....	
4. Цифровые фазорасщепители, генераторы и преобразователи частоты...	
4.1. Нерекурсивные 90-градусные фазорасщепители.....	
4.2. Всепропускающая цифровая цепь.....	
4.3. Рекурсивный 90 – градусный фазорасщепитель.....	
4.4. Генераторы пилообразных, прямоугольных, треугольных и трапецеидальных колебаний.....	
4.5. Косинусно-синусные генераторы.....	
4.5.1. Косинусно-синусный генератор с полиномиальной аппроксимацией отсчетов выходных колебаний.....	
4.5.2. Косинусно-синусный генератор с табличной организацией отсчетов выходных колебаний.....	
4.6. Преобразователи частоты.....	
5. Цифровые детекторы.....	
5.1. Амплитудные детекторы.....	
5.1.1. Амплитудный детектор-выпрямитель.....	
5.1.2. Квадратурный амплитудный детектор с блоком извлечения квадратного корня.....	
5.1.3. Синхронный амплитудный детектор с управляемым косинусно-синусным генератором.....	
5.1.4. Синхронный амплитудный детектор с узкополосным фильтром для выделения несущей.....	
5.2. Фазовые детекторы.....	
5.2.1. Фазовый детектор с выходным ФНЧ.....	
5.2.2. Квадратурный фазовый детектор.....	
5.2.3. Квадратурный фазовый детектор с пилообразной детекторной характеристикой.....	
5.3. Частотные детекторы.....	
5.3.1. Автокорреляционный частотный детектор с выходным ФНЧ.....	
5.3.2. Квадратурный автокорреляционный частотный детектор.....	
5.3.3. Квадратурный автокорреляционный частотный детектор с внутренним амплитудным ограничением.....	
5.3.4. Частотный детектор на цифровой линии задержки.....	

5.3.5. Синхронно-фазовый частотный детектор.....	
6. Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование.....	
6.1. Прямое дискретное преобразование Фурье.....	
6.2. Обратное дискретное преобразование Фурье.....	
6.3. Алгоритм быстрого преобразования Фурье с прореживанием во времени...	
6.4. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.....	
6.5. Дискретное косинусное преобразование.....	
6.6. Вейвлет – преобразование.....	
6.6.1. Вейвлет - преобразование аналогового сигнала.....	
6.6.2. Дискретизация непрерывного вейвлет – преобразования.....	
6.6.3. Дискретное вейвлет-преобразование.....	
7. Формирователи и демодуляторы дискретных сигналов.....	
7.1. Цифровой формирователь сигнала бинарной фазоразностной манипуляции (DBPSK).....	
7.1.1. Укрупненный алгоритм формирования сигнала DBPSK.....	
7.1.2. Нерекурсивный ФНЧ с АЧХ вида «приподнятый косинус».....	
7.1.3. Формирование несущей и выходного сигнала.....	
7.2. Автокорреляционный демодулятор сигнала DBPSK.....	
7.2.1. Укрупненный алгоритм функционирования демодулятора.....	
7.2.2. Автокорреляционный детектор.....	
7.2.3. Узел синхронизации.....	
7.2.4. Интегратор и формирователь элементарных посылок.....	
7.3. Когерентный демодулятор сигнала DBPSK.....	
7.3.1. Укрупненный алгоритм функционирования когерентного демодулятора...	
7.3.2. Фазовый детектор и формирователь опорных колебаний.....	
7.4. Цифровой формирователь сигнала квадратурной (четырёхпозиционной) фазоразностной манипуляции DQPSK.....	
7.5. Автокорреляционный демодулятор сигнала DQPSK.....	
7.6. Когерентный демодулятор сигнала DQPSK.....	
7.7. Демодуляторы многочастотных сигналов относительной фазовой манипуляции.....	
7.8. Формирователь сигнала минимальной частотной манипуляции.....	
7.9. Автокорреляционный демодулятор сигналов МЧМ и гауссовской МЧМ.....	
8. Архитектура сигнальных процессоров.....	
8.1. Укрупнённая функциональная схема сигнального процессора.....	
8.2. Ядро процессора семейства ADSP2181.....	
8.2.1. Арифметико-логическое устройство.....	
8.2.2. Аппаратный умножитель-аккумулятор.....	
8.2.3. Устройство сдвига.....	
8.2.4. Генератор адресов команд.....	
8.2.5. Генераторы адресов данных.....	

8.3. Укрупнённая функциональная схема процессора TMS320C64xx. Ядро процессора.....	
8.4. Память программ и память данных.....	
8.5. Периферийные устройства.....	
8.5.1. Контроллер прямого доступа к памяти.....	
8.5.2. Многоканальный буферизированный последовательный порт.....	
8.5.3. Блок входов/выходов общего назначения.....	
8.5.4. Хост-интерфейс.....	
8.5.5. Таймеры.....	
8.5.6. Режимы пониженного энергопотребления.....	
9. Данные и их организация в процессоре.....	
9.1. Коды представления двоичных чисел в процессоре.....	
9.1.1. Перевод положительных десятичных чисел в двоичную систему счисления.....	
9.1.2. Прямой и дополнительный коды представления двоичных чисел.....	
9.1.3. Перевод целого числа со знаком, представленного в дополнительном двоичном коде, в десятичную систему счисления.....	
9.1.4. Перевод дробного числа со знаком, представленного в дополнительном двоичном коде, в десятичную систему счисления.....	
9.2. Организация данных в процессоре.....	
9.2.1. Формы и форматы представления данных в процессоре.....	
9.2.2. Представление чисел с фиксированной точкой.....	
9.2.3. Представление чисел с плавающей точкой.....	
10. Система команд и адресация данных.....	
10.1. Формат и структура слова команды.....	
10.2. Непосредственная и прямая адресации данных.....	
10.3. Косвенная адресация.....	
10.4. Адресация циклического буфера данных.....	
10.5. Организация циклических буферов в процессорах TMS320Cxxx.....	
10.6. Основные типы команд процессора.....	
10.6.1. Команды пересылок.....	
10.6.2. Команды арифметических операций.....	
10.6.2.1. Сложение и вычитание.....	
10.6.2.2. Умножение и умножение с накоплением.....	
10.6.2.3. Команды арифметического сдвига.....	
10.6.2.4. Дополнительный набор арифметических команд.....	
10.6.3. Команды логических операций.....	
10.6.4. Команды бит-манипуляций.....	
10.6.5. Команды управления.....	

Приложение 1. Программа синтеза ФНЧ с линейной ФЧХ и АЧХ, задаваемой функцией без разрывов, методом ряда Фурье.....	
Приложение 2. Программа синтеза 90-градусного рекурсивного фазорасщепителя на N всепропускающих цепях.....	
Приложение 3. Ряд и интеграл Фурье.....	
Приложение 4. Расчёт фильтра нижних частот типа «приподнятый косинус» в программной среде Mathcad.....	
Приложение 5. Расчет гауссовского фильтра нижних частот в программной среде Mathcad.....	

Введение

1. Области применения цифровой обработки

Цифровая обработка сигналов возникла в середине прошлого века на стыке математики и вычислительной техники и вскоре нашла широкое применение в различных сферах человеческой деятельности. К ним относятся:

- телекоммуникационные системы (кодирование, модуляция, демодуляция, декодирование, сжатие и восстановление речевых сообщений, подавление эха, защищенная связь);
- радиолокация;
- гидролокация;
- сейсмология (предсказание землетрясений);
- медицина (обработка томограмм, электрокардиограмм, диагностическое формирование изображений, обработка сигнала в слуховых аппаратах);
- добывающая и обрабатывающая промышленность (диагностика и контроль);
- идентификация диктора (определение, кто из ограниченного числа дикторов произнес данную фразу);
- верификация диктора (определение, является ли говорящий тем, за кого он себя выдает);
- анализ временных рядов (трафика в локальных и глобальных сетях передачи данных, колебания численности населения, курсов акций, курсов валют и т.д.)
- обработка телевизионных и компьютерных изображений.

2. Классификация сигналов

Сигналом называется физический процесс, отображающий передаваемое сообщение. В качестве сигнала можно использовать любой физический процесс, изменяющийся в соответствии с переносимым сообщением. Однако в современных системах управления и связи чаще всего используют электрические сигналы. В зависимости от вида функции времени, описывающей сигнал, сигналы делятся на 4 группы:

- **произвольные по величине и непрерывные по времени,**
- **произвольные по величине и дискретные по времени,**
- **квантованные по величине и непрерывные по времени,**
- **квантованные по величине и дискретные по времени.**

Временные диаграммы этих сигналов приведены на рисунке 1.

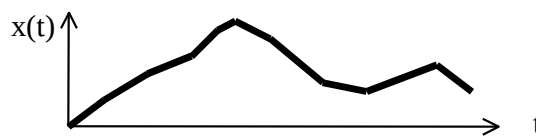
Произвольный по величине и непрерывный по времени сигнал называют **аналоговым**, т.к. он является аналогом большинства физических процессов, протекающих в природе (например, изменение температуры воздуха,

атмосферного давления, влажности, освещённости, электрического напряжения аккумулятора во времени и т.д.).

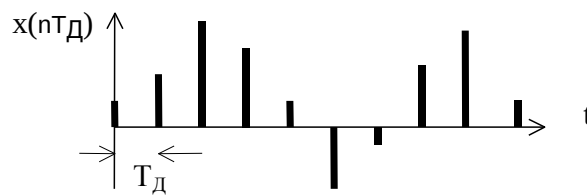
Произвольный по величине и дискретный по времени сигнал называют **дискретным**, квантованный по величине и непрерывный по времени - **квантованным**, квантованный по величине и дискретный по времени - **цифровым**.

Цифровой сигнал отличается от дискретного тем, что может принимать не любые, а только квантованные значения. Необходимость квантования объясняется тем, что в вычислительных устройствах значение сигнала должно быть представлено числом конечной разрядности. При двоичной системе счисления и использовании r -разрядных кодовых комбинаций получается 2^r уровней квантования. Отметим, что при $r \rightarrow \infty$ цифровой и дискретный сигналы идентичны.

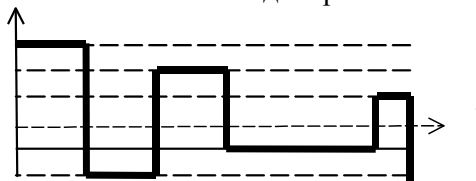
В таблице 1 приведены значения цифрового сигнала в двоичной системе счисления в моменты времени $0, T_d, 2 T_d$ и т.д. при использовании трехразрядной кодовой комбинации.



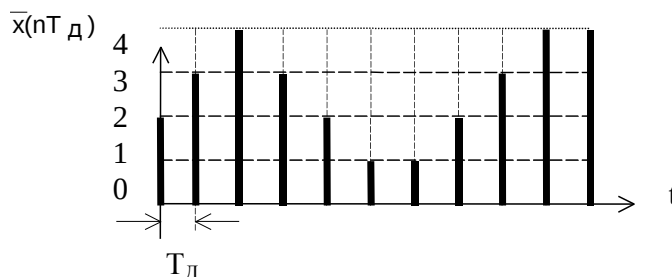
Произвольный по величине и непрерывный по времени



Произвольный по величине и дискретный по времени



Квантованный по величине и непрерывный по времени



Квантованный по величине и дискретный по времени

Рисунок 1 – Временные диаграммы сигналов четырех типов

Таблица 1. Значения цифрового сигнала в двоичной системе счисления

t	0	T_d	$2T_d$	$3T_d$	$4T_d$	$5T_d$	$6T_d$
$\bar{x}(nT_d)$	010	011	100	011	010	001	001

Каждый разряд двоичного числа передается своим электрическим сигналом, в котором нулю кодовой комбинации соответствует один уровень напряжения (уровень логического нуля), а единице - другой уровень напряжения (уровень логической единицы).

Если все разряды кодовой комбинации представляются одновременно, то говорят, что используется **параллельный код**, а если последовательно, то **последовательный**.

В качестве примера на рисунках 2 и 3 приведены временные диаграммы электрических сигналов, соответствующих цифровому сигналу таблицы 1, представленному в параллельном (рисунок 2) и последовательном (рисунок 3) коде.

При использовании последовательного кода требуется только одна линия для передачи данных (плюс общий провод), а при использовании параллельного кода количество линий должно быть равно количеству двоичных разрядов кодовой комбинации. Линии передачи данных в параллельном коде образуют шину данных.

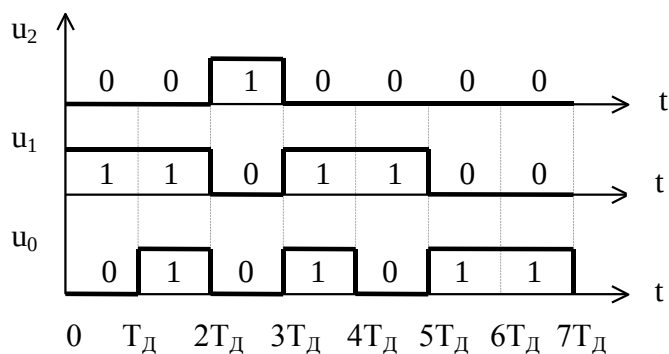


Рисунок 2 - Временные диаграммы электрических сигналов при использовании параллельного кода

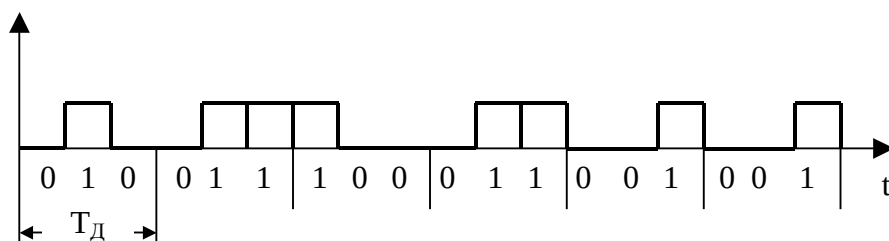


Рисунок 3 - Временные диаграммы электрического сигнала при использовании последовательного кода

Так как при параллельном коде все разряды передаются по шине одновременно, то он обеспечивает более высокое быстродействие, поэтому широко применяется при цифровой обработке сигналов в сигнальных процессорах. Однако ввод и вывод данных из процессора часто осуществляют в последовательном коде, так как это позволяет существенно сократить количество выводов микросхемы.

3. Виды и системы обработки сигналов

Обработка заключается в преобразовании сигнала в другой, являющийся более предпочтительным с точки зрения выделения сообщения. Типичными видами обработки являются:

- * модуляция,
- * детектирование,
- * фильтрация,
- * преобразование частоты сигнала,
- * спектральный анализ,
- * усиление и т.д.

В зависимости от типа обрабатываемых сигналов системы обработки подразделяются на аналоговые и цифровые.

На рисунке 4 представлена структурная схема системы цифровой обработки аналогового сигнала. Она состоит из входного фильтра нижних частот (ФНЧ) или полосового фильтра (ПФ), которые служат для ограничения спектра входного сигнала перед его дискретизацией, аналого-цифрового преобразователя (АЦП), цифрового сигнального процессора (ЦСП), цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и интерполирующего фильтра (ФНЧ или ПФ), сглаживающего выходной сигнал ЦАП. Утолщёнными стрелками обычно изображают шину данных, по которой передаётся цифровой сигнал.

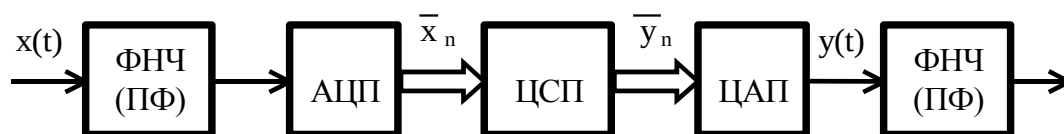


Рисунок 4 – Система цифровой обработки аналогового сигнала

Система цифровой обработки сигналов представляет собой комплекс аппаратно-программных средств, обеспечивающих обработку сигналов в соответствии с заданным алгоритмом.

Принято алгоритмы ЦОС представлять в наглядной графической форме с использованием системы обозначений, приведенной на рисунке 5, где представлены операции сложения, умножения на константу (А), вычитания, перемножения двух переменных, задержки на один интервал дискретизации, децимации (уменьшения частоты дискретизации в M_0 раз), интерполяции (увеличения частоты дискретизации в M_0 раз).

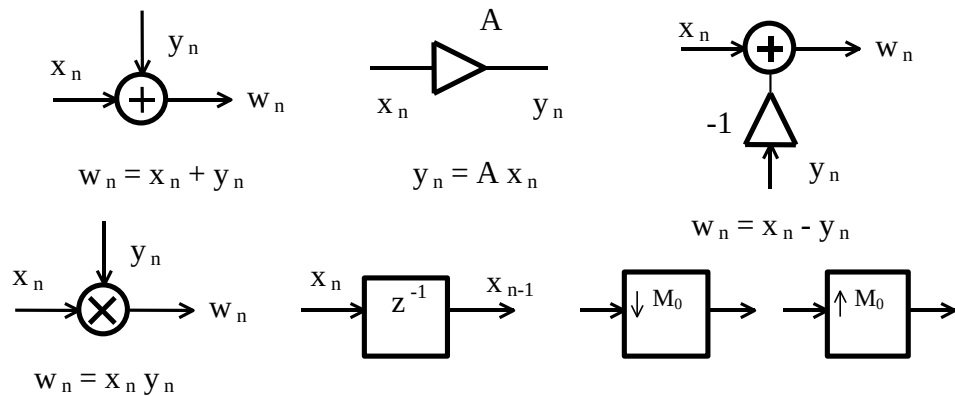


Рисунок 5 - Обозначение операций цифровой обработки сигналов

В качестве примера использования обозначений рассмотрим простейший алгоритм ЦОС, графическое представление которого дано на рисунке 6.

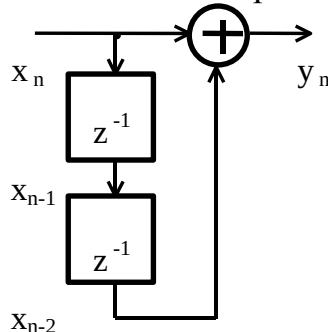


Рисунок 6 – Графическое представление простейшего алгоритма цифровой обработки

Пусть дискретный сигнал x_n определяется следующими соотношениями

$$x_n = x_{1n} + x_{2n}, \quad x_{1n} = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad x_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Для определения выходного сигнала y_n заполним таблицу 2 при нулевых начальных условиях, т.е. при $x_{-1} = x_{-2} = 0$.

По данным таблицы на рисунке 7 приведены временные диаграммы сигналов x_{n1} , x_{n2} , x_n и y_n .

Из рисунка 7 следует, что данный цифровой узел выделяет из входного сигнала, представляющего сумму двух синусоидальных колебаний, только одно из них, более низкочастотное, т.е. обладает фильтрующими свойствами. Следовательно, выполненные арифметические операции реализуют

простейший фильтр нижних частот. Обратите внимание на то, что первые два отсчета выходного сигнала соответствуют переходному процессу. Кроме того, в установившемся режиме выходное синусоидальное колебание сдвинуто во времени относительно соответствующей составляющей входного сигнала и имеет отличную от нее амплитуду.

Таблица 2. Определение сигнала на выходе цифрового узла

n	$x_{1,n}$	$x_{2,n}$	x_n	x_{n-1}	x_{n-2}	y_n
0	0	0	0	0	0	0
1	0.707	1	1.707	0	0	1.707
2	1	0	1	1.707	0	1
3	0.707	-1	-0.293	1	1.707	1.414
4	0	0	0	-0.293	1	1
5	-0.707	1	0.293	0	-0.293	0
6	-1	0	-1	0.293	0	-1
7	-0.707	-1	-1.707	-1	0.293	-1.414
8	0	0	0	-1.707	-1	-1
9	0.707	1	1.707	0	-1.707	0
10	1	0	1	1.707	0	1
...	...	...	...	...	...	...
17	0.707	1	1.707	0	-1.707	0

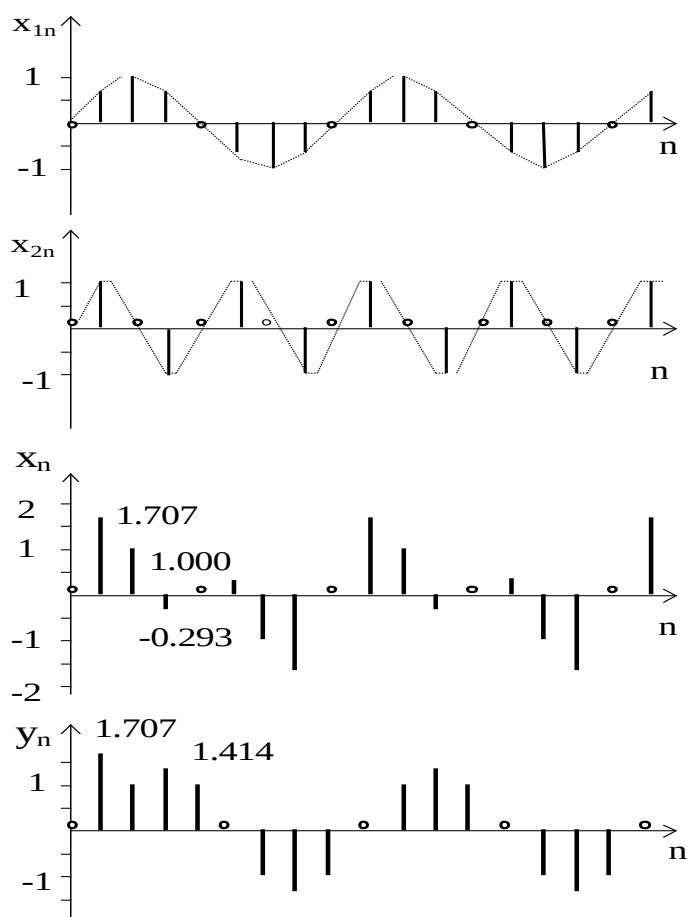


Рисунок 7 –Временные диаграммы сигналов цифрового узла на рисунке 6

4.Элементная база цифровой обработки сигналов

В качестве элементной базы цифровой обработки сигналов используются цифровые сигнальные процессоры, представляющие собой однокристальные специализированные ЭВМ.

К ним предъявляются следующие требования:

- 1.Высокое быстродействие (высокая производительность).
- 2.Высокая точность вычислений, которая достигается за счет повышения разрядности процессоров с фиксированной точкой и использования процессоров с плавающей точкой.
- 3.Низкое энергопотребление.
- 4.Низкая стоимость.
- 5.Наличие эффективных программно-аппаратных средств разработки и подробной документации.

Ведущие позиции на рынке сигнальных процессоров занимают фирмы Texas Instrument, Motorola, Analog Devices и др.

Фирма Texas Instrument является лидером на рынке цифровых сигнальных процессоров (ЦСП). Она производит более половины выпускаемых в мире ЦСП.

Новые разработки фирмы Texas Instrument можно разделить на 3 семейства: C2000, C5000, C6000.

Процессоры семейства C2000 относятся к наиболее дешевым моделям и имеют производительность 20-40 MIPS. (MIPS - Million Instructions per Second – миллион инструкций (команд) в секунду). Важным преимуществом этого семейства является наличие встроенных АЦП, что позволяет создавать законченные устройства на одной микросхеме.

Семейство C5000 - мощные процессоры с фиксированной запятой. Они предназначены как для ресурсоемких мобильных телекоммуникационных систем, так и для стационарных систем. Эти процессоры имеют производительность до 200 MIPS и свехнизкое энергопотребление. Например, 16-разрядный с фиксированной точкой процессор TMS320C5 при производительности 320 MIPS потребляет 80 мВт. Напряжение источника питания процессоров семейства C5000 составляет 0.9 -1.2В. Высокая производительность и низкое энергопотребление служат определяющими факторами для применения процессоров семейства C5000 в персональных беспроводных системах передачи данных.

Семейство C6000 включает процессоры как с фиксированной, так и с плавающей точкой, их производительность достигает 8800 MIPS.

Например, TMS320C62xx – процессоры с фиксированной точкой и производительностью от 1200 до 2400 MIPS,

TMS320C67xx – с плавающей точкой и производительностью 600 ..1000 MFLOPS (миллион инструкций с плавающей точкой в секунду),

TMS320C64xx – с фиксированной точкой, производительностью до 8800 MIPS и тактовой частотой до 1.1 ГГц.

Цифровые сигнальные процессоры C67х имеют совместимость по командам и по выводам с аналогичными процессорами C62х, что позволяет разработчику быстро выполнять прототипы программ, используя плавающую точку, и легко переходить затем к процессорам с фиксированной точкой.

Процессоры этого семейства применяются в базовых станциях беспроводной связи, модемах, радиолокации, в трехмерной графике и т.д.

Одной из разработок фирмы Analog Devices является процессор ADSP-21535 Blackfin, который работает на частоте 300 МГц и способен производить 600 миллионов инструкций умножения с накоплением в секунду при энергопотреблении менее 42 мВт и напряжении питания 0.9В. В процессоре реализовано динамическое управление энергопотреблением.

5. Преимущества и недостатки ЦОС по сравнению с аналоговой обработкой

К преимуществам ЦОС относятся:

1. Высокая точность обработки.
2. Возможность реализации сложных алгоритмов с помощью стандартных узлов вычислительной техники, например, сигнальных процессоров.
3. Возможность гибкой оперативной перестройки алгоритмов обработки путем изменения программы без изменения аппаратных средств.
4. Простота реализации адаптивных устройств путем оперативного изменения констант, участвующих в обработке.
5. Высокая технологичность изготовления, связанная с отсутствием необходимости настройки и регулировки аппаратуры.
6. Высокая степень совпадения характеристик реализованных устройств с расчетными характеристиками.
7. Сокращение времени проектирования устройств из-за возможности раздельного проектирования аппаратной и программной части.

Недостатки:

1. Относительно низкое быстродействие устройств ЦОС по сравнению с аналоговыми устройствами, которое ограничивает сверху диапазон частот обрабатываемых сигналов.
2. Относительно высокое энергопотребление.

Возможность цифровой обработки широкополосных сигналов определяется, с одной стороны, используемой элементной базой, с другой стороны, сложностью алгоритма обработки. Показателем быстродействия процессоров ЦОС является длительность командного цикла, т.е. времени выполнения одной элементарной команды $t_{кц}$. Чем сложнее алгоритм обработки, тем больше количество команд Q в программе обработки. Таким образом, при последовательном выполнении команд время обработки равно произведению среднего времени выполнения одной команды на количество команд - $t_{кц\text{ ср}} Q$. При обработке в реальном масштабе времени время обработки не должно превышать период дискретизации сигнала T_d , который тем меньше, чем больше ширина спектра сигнала. Следовательно, должно выполняться условие

$$T_d > t_{кц\text{ ср}} Q.$$

Чем выше частота сигнала, тем меньше должен быть интервал дискретизации и тем сложнее выполнить это условие.

Таким образом, ограничение по ширине спектра обрабатываемых сигналов напрямую связано со сложностью алгоритма обработки и длительностью командного цикла. Дополнительным резервом повышения производительности процессора является организация параллельных вычислений, но это требует усложнения структуры процессора.

1. Дискретизация непрерывных сигналов

1.1. Спектр дискретной косинусоиды. Эффект размножения спектра

Дискретизацией называется замена непрерывного сигнала дискретными отсчетными значениями (отсчетами), взятыми через определенный интервал времени - интервал дискретизации T_d .

На рисунке 1.1 показаны косинусоидальный сигнал $x(t)$ и вспомогательная последовательность коротких прямоугольных импульсов $u(t)$ с периодом T_d и длительностью τ .

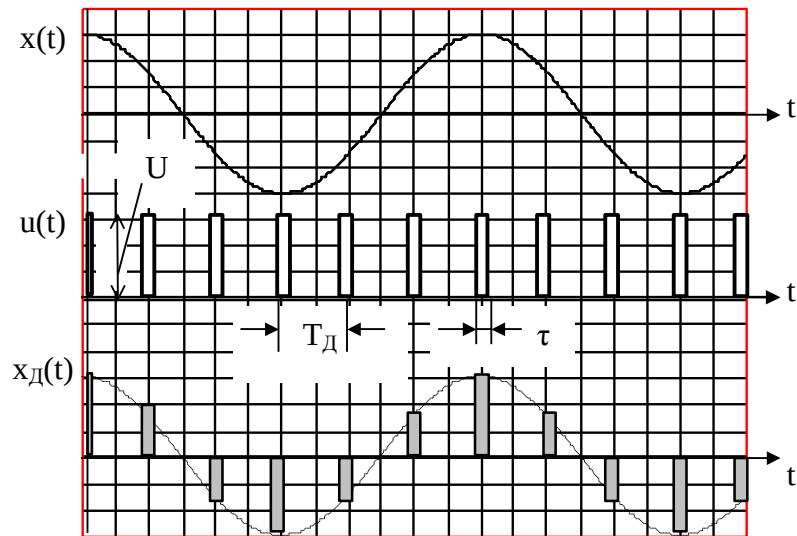


Рисунок 1.1 – Дискретизация косинусоиды

Дискретный сигнал $x_d(t)$ с математической точки зрения можно рассматривать как результат перемножения функций $x(t)$ и $u(t)$.

Периодическая функция $u(t)$ может быть представлена рядом Фурье

$$u(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_d t) \quad (1.1)$$

где C_0 и C_k - коэффициенты ряда Фурье, определяемые следующими

соотношениями: $C_0 = \frac{2}{T_d} \int_0^{\frac{\tau}{2}} U dt = U \frac{\tau}{T_d}$, $C_k = \frac{4}{T_d} \int_0^{\frac{\tau}{2}} U \cos(k\omega_d t) dt = 2U \frac{\sin(k\pi \frac{\tau}{T_d})}{k\pi}$,

$\omega_d = 2\pi F_d = \frac{2\pi}{T_d}$ - частота дискретизации.

После подстановки последних соотношений в (1.1) получим

$$u(t) = U \frac{\tau}{T_d} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi \frac{\tau}{T_d})}{k\pi \frac{\tau}{T_d}} \cos(k\omega_d t) \right) \cdot \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что амплитуда k -ой гармоники импульсной последовательности $u(t)$ пропорциональна функции $\sin(x)/x$, где $x = k \pi \tau / T_d$. При $x = 0$ эта функция равна единице. Первый нуль функции имеет место при $x = \pi$. Это означает, что при $\tau / T_d = 0.001$ амплитуда 1000-ой гармоники равна нулю. Однако при $k \leq 100$ амплитуда k -ой гармоники отличается от амплитуды первой гармоники не более чем на 1.6%.

В этом случае можно воспользоваться приближенным соотношением

$$u(t) = U \frac{\tau}{T_d} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos(k \omega_d t) \right) \quad (1.3),$$

где K – максимальное значение k , при котором значение функции $\sin(x)/x$ отличается от 1 на величину допустимой погрешности. При уменьшении отношения τ / T_d значение K увеличивается. В предельном случае, когда вместо импульсной последовательности используется последовательность δ – функций, $K = \infty$.

При $x(t) = X \cos(\omega t)$ сигнал на выходе дискретизатора определяется соотношением

$$x_d(t) = x(t)u(t) = XU \frac{\tau}{T_d} \left(\cos(\omega t) + \sum_{k=1}^K \cos((k \omega_d - \omega)t) + \sum_{k=1}^K \cos((k \omega_d + \omega)t) \right) \quad (1.4)$$

Из него видно, что спектр дискретной косинусоиды содержит спектральную составляющую на частоте входного аналогового сигнала и составляющие на частотах $|k \omega_d \pm \omega|$. Причем амплитуды всех спектральных составляющих в пределах сделанного допущения одинаковы и пропорциональны амплитуде входного аналогового сигнала. Амплитудный спектр аналогового и дискретного косинусоидальных сигналов показан на рисунке 1.2.

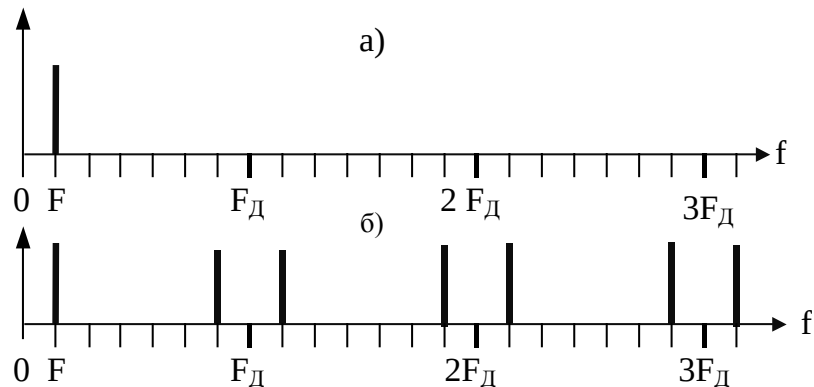


Рисунок 1.2 – Спектр косинусоиды до (а) и после (б) дискретизации

Из рисунка видно, что в результате дискретизации возникает **размножение спектра** аналогового сигнала.

Спектр дискретной косинусоиды представляет собой периодическую

функцию частоты, период которой равен частоте дискретизации.

1.2. Дискретизация периодического аналогового сигнала с ограниченным спектром. Эффект наложения спектров. Выбор частоты дискретизации

Пусть сигнал $x(t)$ представляет собой периодическую функцию времени с периодом T и с ограниченным спектром, которая может быть представлена рядом Фурье

$$x(t) = c_0 + \sum_{i=1}^I a_i \cos(i\omega_1 t) + \sum_{i=1}^I b_i \sin(i\omega_1 t), \quad (1.5)$$

где c_0 – постоянная составляющая сигнала, a_i и b_i – коэффициенты ряда Фурье для функций синуса и косинуса соответственно

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt, \quad a_i = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(i\omega_1 t) dt, \quad b_i = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(i\omega_1 t) dt,$$

ω_1 – частота первой гармоники сигнала, $i\omega_1$ – частота i -ой гармоники, I – максимальный номер гармоники.

Амплитуда и фаза i -ой гармоники определяются следующими соотношениями:

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \varphi_i = -\arctg\left(\frac{b_i}{a_i}\right).$$

Зависимость c_i от частоты представляет собой амплитудный спектр сигнала, а зависимость φ_i от частоты – его фазовый спектр.

Учитывая последние соотношения, представим (1.5) в виде суммы гармоник с амплитудами c_i и фазами φ_i

$$x(t) = \sum_{i=0}^I c_i \cos(i\omega_1 t + \varphi_i) \quad \text{при} \quad \varphi_0 = 0.$$

Определим дискретный сигнал

$$\begin{aligned} x_d(t) = x(t)u(t) &= U \frac{\tau}{T_d} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos(k\omega_d t) \right) \sum_{i=0}^I c_i \cos(i\omega_1 t + \varphi_i) = \\ &= U \frac{\tau}{T_d} \left(\sum_{i=0}^I c_i \cos(i\omega_1 t + \varphi_i) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^I c_i \cos((k\omega_d \pm i\omega_1)t \pm \varphi_i) \right) \end{aligned}$$

Последнее соотношение определяет спектр после дискретизации

периодического аналогового сигнала с ограниченным спектром. Из него видно:

- 1. В спектре дискретного сигнала присутствуют все составляющие спектра аналогового сигнала с частотами $i\omega_1$ (первое слагаемое). Амплитуды этих спектральных составляющих пропорциональны соответствующим амплитудам спектральных составляющих аналогового сигнала (коэффициент пропорциональности - U_T / T_D). Начальные фазы спектральных составляющих дискретного сигнала с частотами $i\omega_1$ равны начальным фазам соответствующих спектральных составляющих аналогового сигнала.**
- 2. В спектре дискретного сигнала имеются сгустки спектральных составляющих вблизи частот $k\omega_D$ (второе слагаемое). Амплитуды этих спектральных составляющих пропорциональны соответствующим амплитудам спектральных составляющих аналогового сигнала (коэффициент пропорциональности - U_T / T_D). Начальные фазы спектральных составляющих дискретного сигнала с частотами $k\omega_D \pm i\omega_1$ равны или противоположны начальным фазам соответствующих спектральных составляющих аналогового сигнала. Период следования сгустков спектра равен частоте дискретизации.**

На рисунке 1.3 показан амплитудный спектр аналогового периодического сигнала до и после дискретизации при двух разных значениях частоты дискретизации. В спектре сигнала до дискретизации присутствуют 3 спектральные составляющие с частотами

$F_1 = \omega_1 / (2\pi)$, $2F_1$, $F_{\max} = 5F_1$. Чтобы сформировать спектр дискретного сигнала нужно для каждой из этих составляющих найти составляющие спектра дискретного сигнала, которые она порождает, как при нахождении спектра дискретной косинусоиды. При этом нужно учитывать значение амплитуды исходной составляющей спектра аналогового сигнала. Результирующий спектр находится методом суперпозиции.

Из рисунка 1.3б видно, что если из спектра дискретного сигнала выделить составляющие, соответствующие спектру исходного аналогового сигнала, то таким образом можно восстановить аналоговый сигнал из дискретного. Такую селекцию можно осуществить с помощью фильтра, АЧХ которого показана на рисунке.

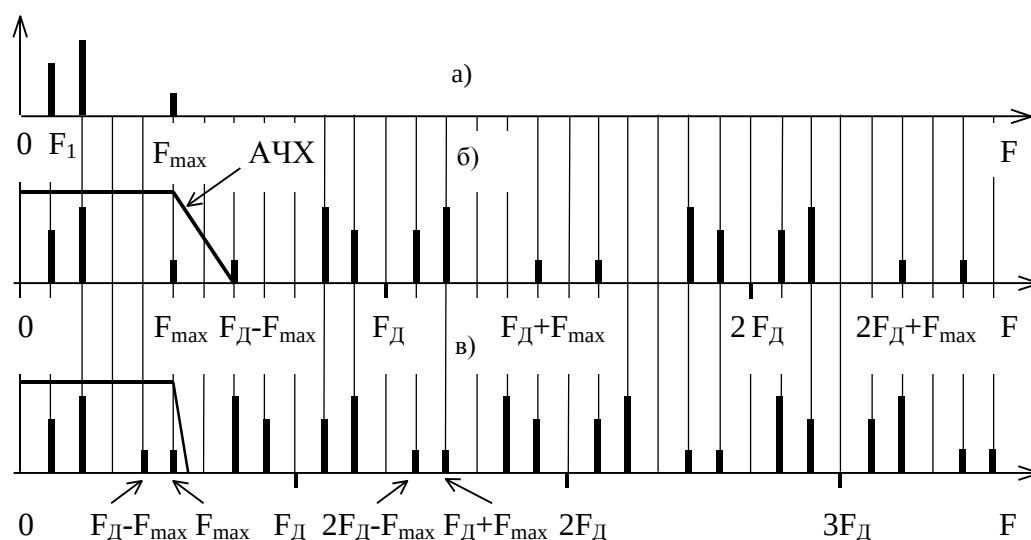


Рисунок 1.3 – Спектр периодического аналогового сигнала до дискретизации (а),

после дискретизации при $F_{\text{д}} > 2F_{\text{max}}$ (б), после дискретизации при $F_{\text{д}} < 2F_{\text{max}}$ (в)

В восстановленном сигнале будут отсутствовать искажения, если

- АЧХ фильтра равномерна в интервале частот от F_1 до F_{max} ,
- ФЧХ линейна в том же диапазоне частот,
- коэффициент передачи равен нулю на частотах $F \geq F_{\text{д}} - F_{\text{max}}$.

Реализовать такой фильтр можно только при условии

$$F_{\text{д}} - F_{\text{max}} > F_{\text{max}}.$$

Из приведенного неравенства вытекает известное соотношение Котельникова, позволяющее выбрать частоту дискретизации

$$F_{\text{д}} > 2F_{\text{max}}. \quad (1.6)$$

Если это условие не выполняется, то возникает наложение спектров. **Эффект наложения спектров** иллюстрируется рисунком 1.3.в. Из него видно, что в полосу пропускания фильтра неизбежно попадает спектральная составляющая, которой нет в спектре исходного аналогового сигнала. Это вызывает искажение восстановленного сигнала.

1.3. Дискретизация аperiodических аналоговых сигналов

Известно, что спектр $S(\omega)$ аperiodического аналогового сигнала $x(t)$ определяется с использованием прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.7)$$

Для определения дискретного сигнала сначала преобразуем соотношение (1.3)

$$u(t) = U \frac{\tau}{T_D} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos(k\omega_D t) \right) = U \frac{\tau}{T_D} \sum_{k=-K}^K e^{jk\omega_D t}$$

Воспользовавшись прямым преобразованием Фурье, найдем спектр дискретного сигнала

$$\begin{aligned} S_D(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) u(t) e^{-j\omega t} dt = U \frac{\tau}{T_D} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-K}^K e^{jk\omega_D t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= U \frac{\tau}{T_D} \sum_{k=-K}^K \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - k\omega_D)t} dt \end{aligned}$$

Сравнивая последнее соотношение с (1.6), выразим спектр дискретного сигнала через спектр аналогового сигнала

$$S_D(\omega) = U \frac{\tau}{T_D} \sum_{k=-K}^K S(\omega - k\omega_D). \quad (1.8)$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного сомножителя $U\tau / T_D$ равен сумме спектров аналогового сигнала, сдвинутых вдоль оси частот на $k\omega_D$. На рисунке 1.4 показаны спектры апериодического аналогового сигнала до и после дискретизации как в области положительных, так и в области отрицательных частот. Их отличие от линейчатых спектров периодического аналогового сигнала состоит в том, что спектральная плотность апериодического сигнала представляет собой непрерывную функцию частоты.

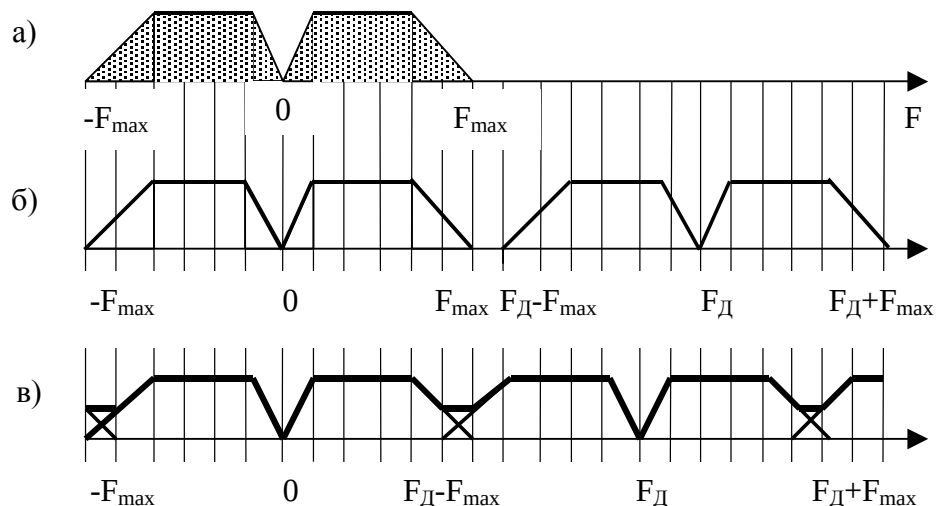


Рисунок 1.4 – Спектры апериодического аналогового сигнала до дискретизации (а),

после дискретизации при отсутствии (б) и при наличии (в) наложения спектров

Как видно из рисунка при $F_D < 2F_{\max}$ имеет место эффект наложения сгустков спектра дискретного сигнала.

В случае, когда нельзя по каким - либо причинам увеличить частоту дискретизации сигнала с ограниченным спектром, или аналоговый сигнал имеет неограниченный спектр, для уменьшения ошибки наложения спектров требуется предварительное ограничение спектра аналогового сигнала. Из рисунка 1.5 видно, что при этом ошибка наложения уменьшается.

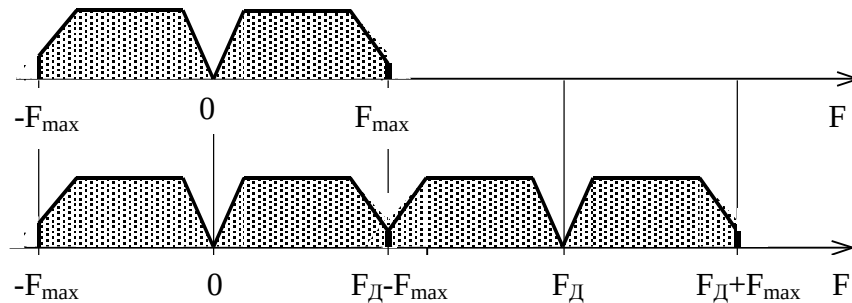


Рисунок 1.5 – Уменьшение ошибки наложения за счет ограничения спектра аналогового сигнала

1.4. Дискретизация узкополосных модулированных сигналов

Особый интерес представляет случай дискретизации модулированных сигналов, когда результатом цифровой обработки должно быть выделение модулирующей функции. Покажем, что при этом частота дискретизации может быть выбрана ниже частоты несущей. На рисунке 1.6 показан спектр аналогового синусоидального сигнала с частотой $f_0 > F_D$ до (а) и после (б) дискретизации. Спектр дискретного сигнала получен в соответствии с соотношением (1.4).

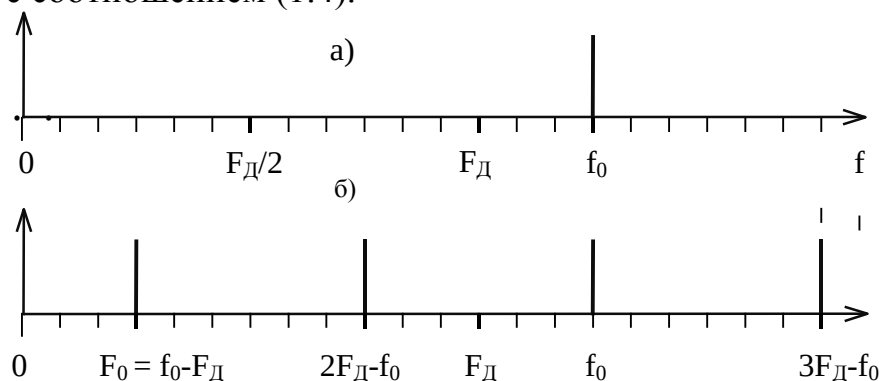


Рисунок 1.6 – Спектр дискретной синусоиды до (а) и после (б) дискретизации. Частота синусоиды выше частоты дискретизации

Как и в случае, представленном на рис.1.2 при $F < F_D / 2$, спектр дискретного сигнала представляет собой периодическую функцию частоты. Вблизи частот kF_D имеются спектральные составляющие, отстоящие на величину F_0 .

Важно отметить, что в интервале частот $0 \leq f < F_d/2$ - интервале Котельникова - появляется составляющая спектра с частотой $F_0 = f_0 - F_d$.

На рисунке 1.7 показаны временные диаграммы синусоидального сигнала $x(t)$ до (пунктир) и после дискретизации $x_d(t)$ при дискретизации с частотой, которая меньше частоты сигнала. Из рисунка видно, что частота дискретного синусоидального сигнала существенно меньше частоты сигнала на входе дискретизатора. Она равна частоте спектральной составляющей спектра дискретного сигнала, которая попадает в интервал Котельникова.

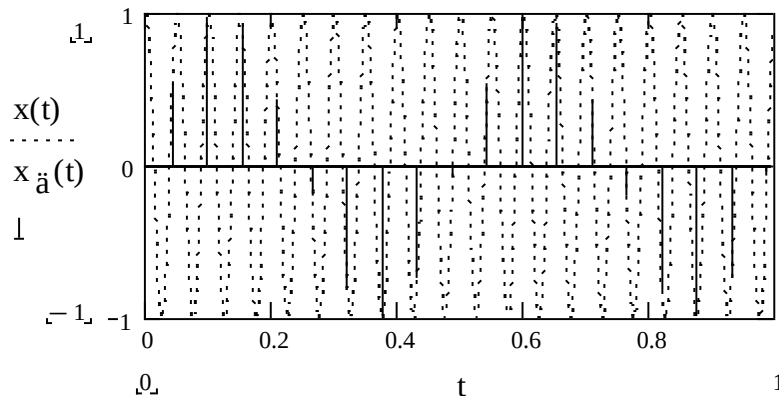


Рисунок 1.7 – Синусоидальное колебание на входе и выходе дискретизатора при дискретизации с частотой, меньшей частоты входного сигнала

На рисунке 1.8 изображен спектр модулированного колебания до и после дискретизации.

Из него видно, что

* в интервале Котельникова существует спектр, который по форме не отличается от спектра исходного аналогового сигнала, следовательно, закон модуляции сигнала после дискретизации остался неизменным, изменилась только частота несущей (F_0 вместо f_0),

* частота дискретизации должна удовлетворять условию

$$F_d > 2\Delta F. \quad (1.9)$$

Последнее условие является необходимым, но недостаточным для обоснованного выбора частоты дискретизации.

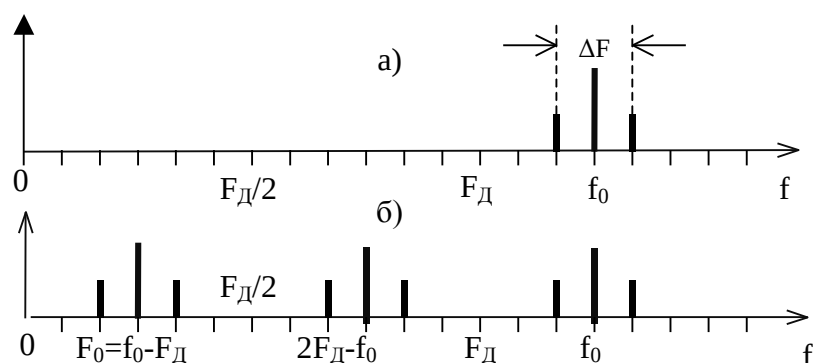


Рисунок 1.8 – Спектр модулированного сигнала до (а) и после (б) дискретизации

При обработке сигналов в реальном масштабе времени стремятся выбрать минимально возможное значение частоты дискретизации для того, чтобы увеличить время обработки, которое не должно превышать период дискретизации. На рисунке 1.9 показан случай, когда $F_d > 2\Delta F$ и сгустки спектра равномерно расположены вдоль оси частот. При этом частота несущей, приведенная в интервал Котельникова, равна $F_0 = F_d/4$. Для того чтобы получить такое значение приведенной частоты несущей дискретного сигнала, частота несущей аналогового сигнала f_0 должна отличаться от частоты дискретизации или ее гармоники на частоту $F_d/4$.

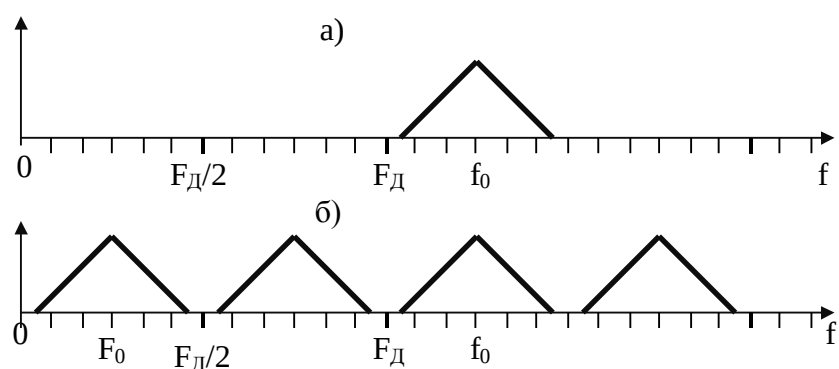


Рисунок 1.9 – Спектр сигнала до и после дискретизации при $F_0 = F_d / 4$

Спектральные диаграммы, приведенные на рисунках 1.10 и 1.11, показывают, что если это условие не выполняется, то сгустки спектра распределяются по оси частот неравномерно, в результате чего возникает наложение спектров, приводящее к искажению сигнала. Таким образом, второе условие выбора частоты дискретизации выражается следующим соотношением

$$F_d = \frac{f_0}{k \pm \frac{1}{4}}, \quad (1.10)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

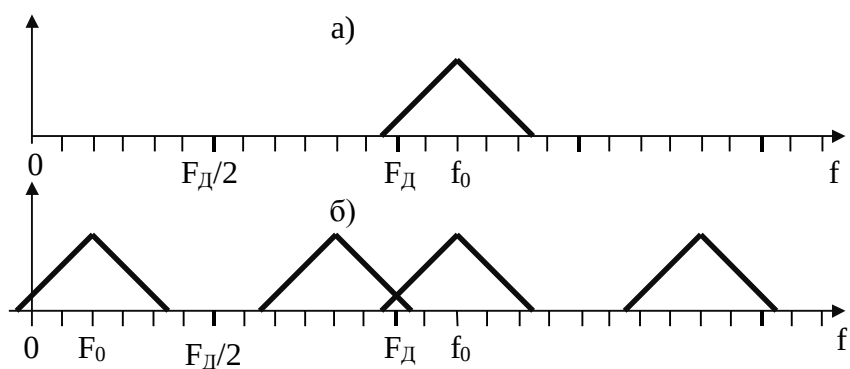


Рисунок 1.10 – Спектр сигнала до и после дискретизации при $F_0 < F_D/4$

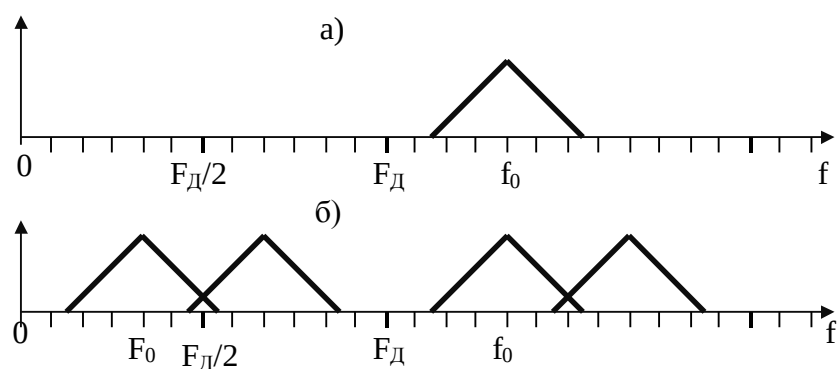


Рисунок 1.11 – Спектр сигнала до и после дискретизации при $F_0 > F_D/4$

В ряде случаев только часть спектра колебания, действующего на входе дискретизатора, принадлежит полезному сигналу. Например, это имеет место при использовании одного аналогового фильтра для нескольких сигналов с разной шириной спектра и последующего применения разных цифровых фильтров для выделения каждого сигнала. Этот случай показан на рисунке 1.12.

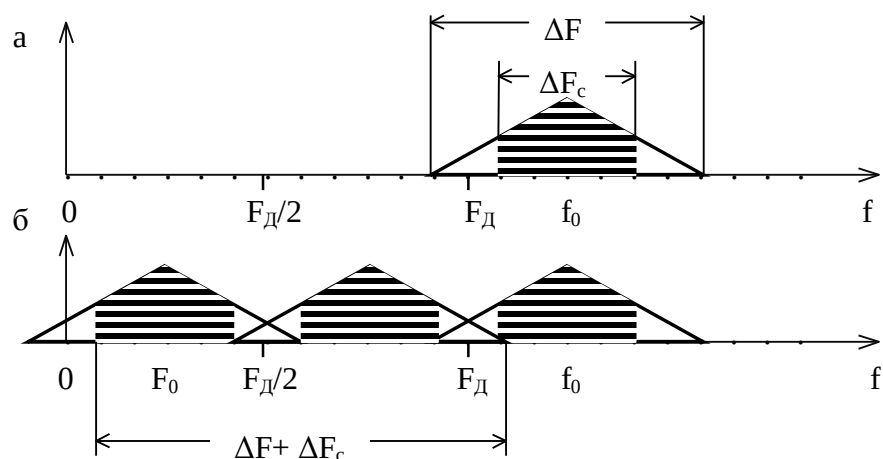


Рисунок 1.12 – Спектры сигнала до и после дискретизации при $F_D = \Delta F + \Delta F_c$

Из рисунка видно, что в данном случае можно разрешить наложение сгустков спектра там, где отсутствует спектр полезного сигнала, учитывая последующую селекцию сигнала цифровым фильтром. При этом вместо условия $F_D > 2 \Delta F$ достаточно выполнить условие

$$F_D > \Delta F + \Delta F_c \quad (1.11)$$

1.5. Прореживание и интерполяция дискретных сигналов

Прореживанием или децимацией называется процесс понижения частоты дискретизации, а **интерполяцией** - процесс ее повышения. Коэффициенты, показывающие во сколько раз изменяется частота

дискретизации, называются коэффициентами прореживания и интерполяции соответственно.

Прореживание, как правило, выполняется в двух случаях. Во-первых, в многофункциональных устройствах, обеспечивающих обработку как широкополосных, так и узкополосных сигналов. При этом аппаратно частота дискретизации выбирается, исходя из требований к дискретизации сигналов с максимальной шириной спектра, а при обработке узкополосных сигналов она понижается за счет прореживания отсчетов. Во-вторых, прореживание можно осуществлять по мере сужения спектра сигнала в процессе его фильтрации. И в первом, и во втором случае прореживание увеличивает время обработки сигнала, а значит, позволяет реализовать более сложные алгоритмы обработки.

Интерполяция дискретного сигнала снижает требования к аналоговому интерполирующему фильтру, который используется на выходе цифро-аналогового преобразователя.

На рисунке 1.13 показан фрагмент укрупненного алгоритма цифровой обработки с прореживанием отсчётов и временные диаграммы сигналов на входе и выходе прореживателя.

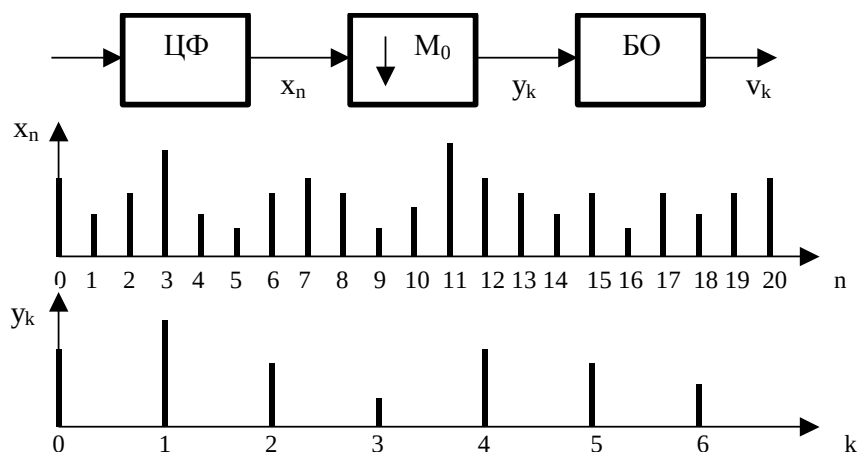


Рисунок 1.13 – Временные диаграммы сигналов на входе и выходе прореживателя

отсчетов. Коэффициент прореживания $M_0=3$

Этот фрагмент включает цифровой фильтр (ЦФ), прореживатель с коэффициентом прореживания M_0 и блок последующей обработки сигнала (БО). Операция прореживания сводится к периодическому пропуску $(M_0 - 1)$ отсчетов исходного сигнала.

Процесс интерполяции иллюстрируется рисунком 1.14. В состав интерполятора входит блок повышения частоты дискретизации в M_0 раз и интерполирующий цифровой фильтр. Из временных диаграмм видно, что интерполяция осуществляется в два этапа: сначала вместо отсутствующих отсчетов сигнала v_k в сигнале v_{0n} формируются нулевые отсчеты. Затем сигнал, содержащий нулевые отсчеты, подается на интерполирующий цифровой фильтр, восстанавливающий отсутствующие отсчеты. На рисунке показаны

временные диаграммы на выходе двух интерполяторов: интерполятора нулевого порядка и интерполятора 1-го порядка (линейного интерполятора). В интерполяторе нулевого порядка отсутствующие отсчеты принимают значение предшествующего им отсчета входного сигнала. В интерполяторе первого порядка вершины отсутствующих отсчетов находятся на прямой, которая соединяет вершины двух соседних отсчетов входного сигнала интерполятора.

Интерполяция нулевого порядка осуществляется с использованием однородного цифрового фильтра, а для интерполяции первого порядка применяется триангулярный фильтр. Эти фильтры рассматриваются в разделе 3. Интерполяцию нулевого порядка можно выполнить также с помощью ячейки памяти, из которой выходные отсчеты сигнала считываются в M_0 раз чаще, чем записываются отсчеты входного сигнала.

Блок-схема алгоритма прореживания, обработки и последующей интерполяции дискретного сигнала приведена на рисунке 1.15. Операции прореживания, обработки и интерполяции, предусмотренные блоками 2-12, выполняются в цикле по порядковому номеру отсчета n . Здесь m - переменная счетчика прореживателя, которая принимает значения от 0 до M_0 . При $m = 0$ выходной сигнал прореживателя равен входному, а переменной счетчика присваивается максимальное значение, равное коэффициенту прореживания. Переменная счетчика уменьшается на единицу с приходом очередного отсчета входного сигнала x . Этот процесс продолжается до тех пор, пока переменная m снова не окажется равной нулю. Из рисунка 1.15 видно, что блок обработки разбит на M_0 блоков. Это позволяет использовать для обработки весь период дискретизации прореженного сигнала.

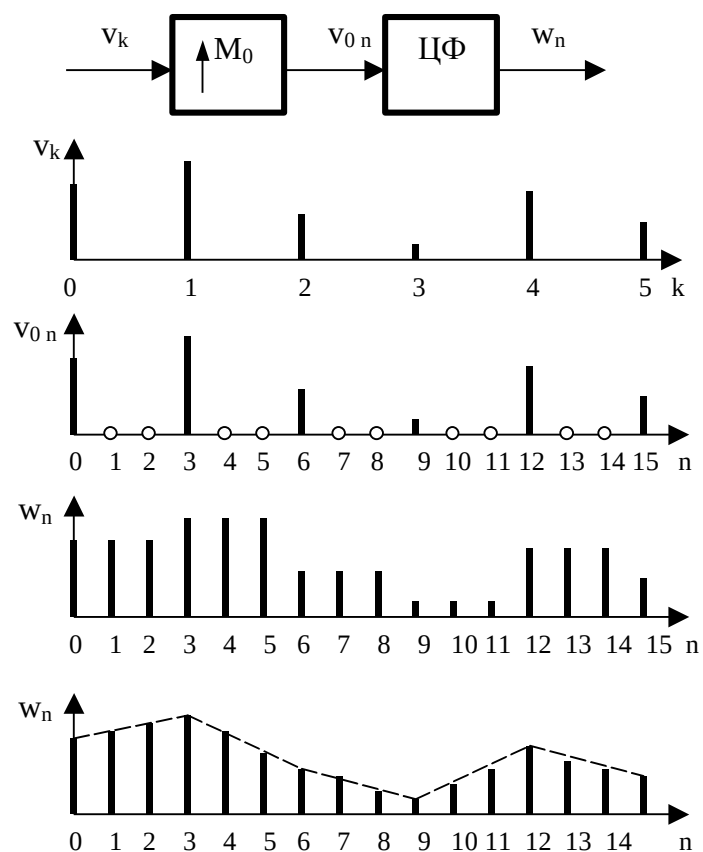


Рисунок 1.14 – Временные диаграммы сигналов в интерполяторах нулевого и первого порядков

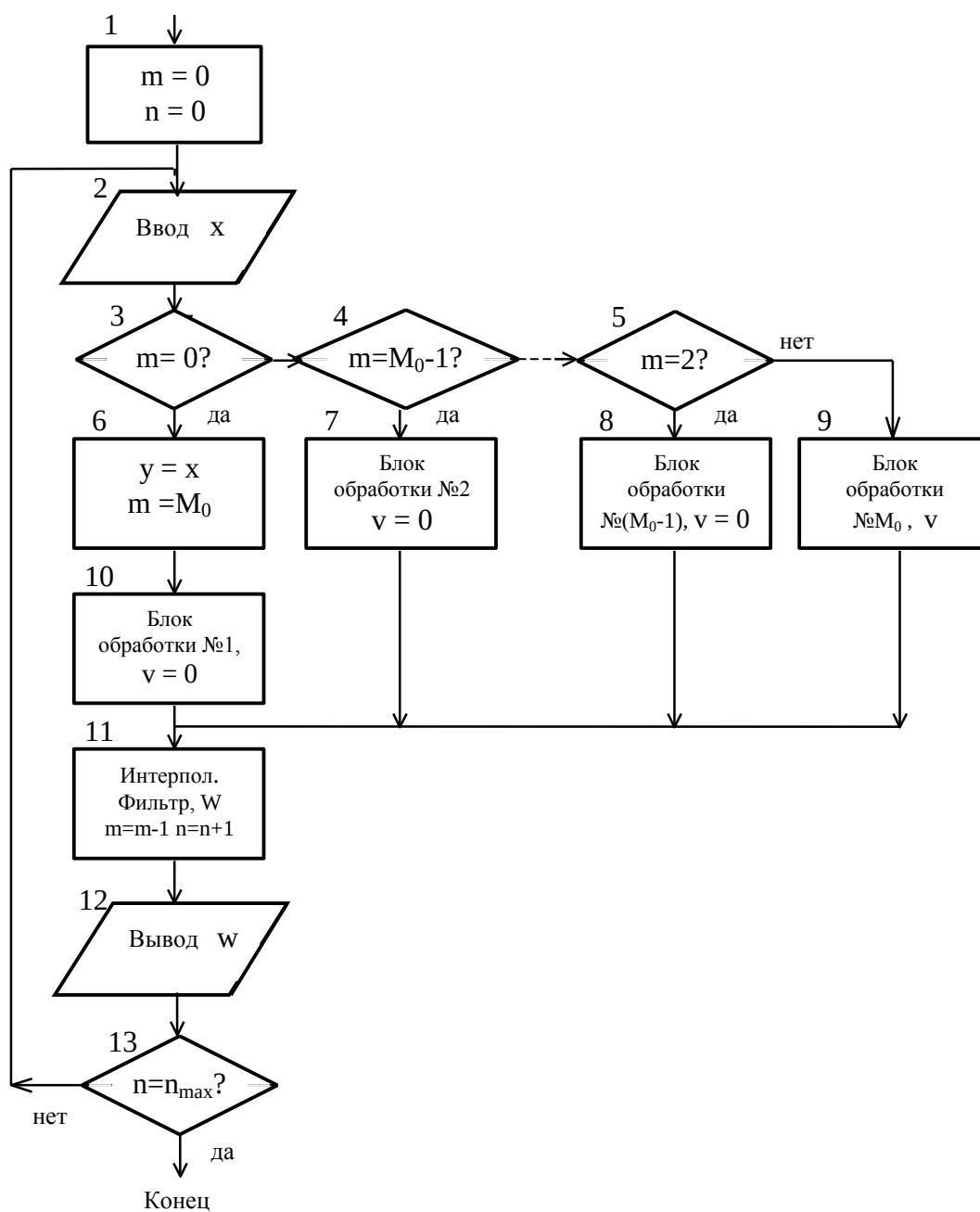


Рисунок 1.15 - Блок-схема алгоритма прореживания, обработки и последующей интерполяции дискретного сигнала

Контрольные вопросы и задачи к главе 1:

1. Что такое дискретизация аналогового сигнала? Начертите временные диаграммы синусоидального сигнала на входе и выходе дискретизатора в случае, когда частота синусоидального колебания меньше половины частоты дискретизации.