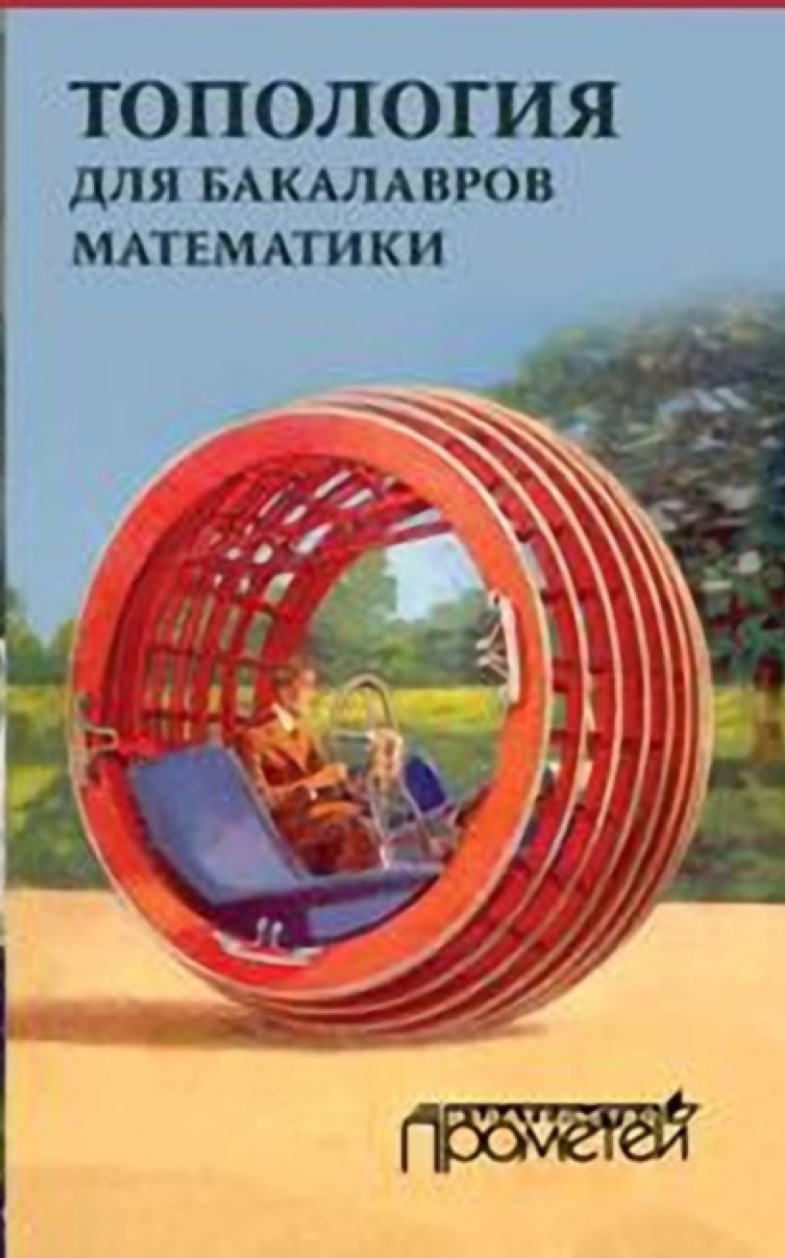
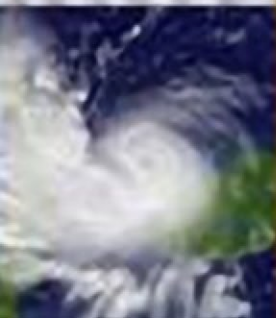


Л. А. Игнаточкина



# ТОПОЛОГИЯ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИКИ



приветей

УДК 515.12  
ББК 22.152я73  
И265

**И265 Игнаточкина Л.А.** Топология для бакалавров математики: Учебное пособие. — М.: Прометей, 2016. — С. 88.

Учебное пособие написано для студентов второго курса МПГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Математика». В доходчивой для студентов младших курсов форме объясняются основные понятия общей топологии. Пособие содержит множество примеров и задач, помогающих читателю самостоятельно разобраться в непростых для начинающего математика идеях топологии. Для студентов учреждений высшего образования, а также желающих овладеть основными понятиями общей топологии.

ISBN 978-5-9907453-1-5

© Игнаточкина Л.А., 2016.

© Издательство «Прометей», 2016.

## Содержание

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Метрические пространства.</b>                                 | <b>6</b>  |
| 1.1. Понятие метрического пространства. . . . .                     | 6         |
| 1.2. Подпространства метрических пространств. . . . .               | 12        |
| 1.3. Шары и сферы в метрических пространствах. . . . .              | 13        |
| 1.4. Задачи . . . . .                                               | 15        |
| 1.5. Дополнительные задачи . . . . .                                | 19        |
| <b>2. Непрерывные отображения метрических пространств.</b>          | <b>20</b> |
| 2.1. Обобщение понятия непрерывности функции из анализа. . . . .    | 20        |
| 2.2. Гомеоморфизмы в метрических пространствах. . . . .             | 25        |
| 2.3. Открытые множества в метрических пространствах. . . . .        | 26        |
| 2.4. Задачи. . . . .                                                | 31        |
| 2.5. Дополнительные задачи . . . . .                                | 33        |
| <b>3. Топологические пространства и непрерывные отображения.</b>    | <b>35</b> |
| 3.1. Топологические пространства. База топологии. . . . .           | 35        |
| 3.2. Непрерывные отображения топологических пространств. . . . .    | 40        |
| 3.3. Задачи . . . . .                                               | 46        |
| 3.4. Дополнительные задачи . . . . .                                | 51        |
| <b>4. Различные виды множеств в топологических пространствах.</b>   | <b>52</b> |
| 4.1. Открытые и замкнутые множества. . . . .                        | 52        |
| 4.2. Внутренность множества, замыкание и граница множества. . . . . | 54        |
| 4.3. Предельные и изолированные точки. . . . .                      | 60        |
| 4.4. Всюду плотные множества. . . . .                               | 61        |
| 4.5. Задачи . . . . .                                               | 63        |
| 4.6. Дополнительные задачи . . . . .                                | 65        |
| <b>5. Связность топологических пространств</b>                      | <b>67</b> |
| 5.1. Определение и критерий . . . . .                               | 67        |
| 5.2. Связность – топологический инвариант. . . . .                  | 72        |

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.3. Связные множества на прямой $\mathbb{R}$ . . . . .                                                    | 74        |
| 5.4. Компоненты связности . . . . .                                                                        | 74        |
| 5.5. Применение понятия связности для доказательства негомеоморфности топологических пространств . . . . . | 75        |
| 5.6. Задачи . . . . .                                                                                      | 76        |
| <b>6. Компактность.</b>                                                                                    | <b>77</b> |
| 6.1. Определение и примеры. . . . .                                                                        | 77        |
| 6.2. Компактность в метрических пространствах. . . . .                                                     | 81        |
| 6.3. Задачи . . . . .                                                                                      | 85        |
| <b>Литература</b>                                                                                          | <b>87</b> |

## Введение.

Топология достаточно молода. Она как наука сформировалась в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре в конце XIX века, хотя первые наблюдения топологического характера, восходящие к исследованиям, Л.Эйлера, К.Гаусса, Б.Римана и других, относятся к середине XIX века. Но только А.Пуанкаре, исходя из потребностей теории функций и дифференциальных уравнений, ввел целый ряд важнейших топологических понятий, разработал содержательную теорию и применил ее к различным разделам математики и механики. А. Пуанкаре назвал новый раздел математики *Analysis situs* – геометрия положения. Термин «топология» (от греческих слов место и закон) ввел И. Листинг (в качестве первого упоминания этого термина указываются различные годы от 1836 до 1847).

А.Пуанкаре так определил содержание *Analysis situs*: «*Analysis situs* есть наука, которая позволяет нам узнавать качественные свойства геометрических фигур не только в обычном пространстве, но также и в пространстве более трех измерений. *Analysis situs* в трех измерениях является для нас познанием почти интуитивным; напротив, *Analysis situs* в более чем трех измерениях представляет громадные трудности, и чтобы начать пытаться их преодолевать, нужно быть очень убежденным в крайней важности этой науки. Если эта важность не всеми понята, то это потому, что об этом недостаточно размышляли».

В настоящее время топология широко используется не только в других разделах математики, но и в физике, химии, биологии. Сама топология приобрела различные разделы, такие как общая топология, теория гомологий, теория гомотопий, теория расслоений, дифференциальная топология. Мы начнем знакомство с общей топологии. Этот раздел топологии стал неотъемлемой частью общематематического языка. Термин общая топология обозначает топологию, которая используется большинством математиков. Она учит понятно и точно говорить о вещах, связанных с идеей непрерывности. Как область активных научных исследований общая топология практически завершена. Постоянное использование ее в качестве общего математического

языка отполировали систему ее определений и теорем. В наши дни ее изучение напоминает скорее изучение языка, нежели математики: приходится выучивать много новых слов, тогда как доказательства большинства теорем чрезвычайно просты. Зато теорем этих очень много. Это и не удивительно — они играют роль правил, регулирующих употребление слов.

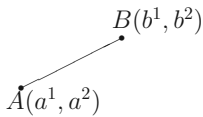
Основными понятиями топологии являются топологическое пространство и непрерывность. Прежде чем перейти к ним, мы познакомимся с более простым понятием метрического пространства (его ввел в 1906 году французский математик М.Фреше) и посмотрим откуда оно возникло.

## 1. Метрические пространства.

### 1.1. Понятие метрического пространства.

В курсе аналитической геометрии мы изучали евклидову плоскость  $\pi$ . Ее элементами являются точки. Мы определяли расстояние между точками плоскости как длину отрезка, соединяющего эти точки. Если мы обозначим расстояние между точками  $A$  и  $B$  через  $\rho(A, B)$ , а длину отрезка  $[AB]$  через  $AB$ , то предыдущую фразу мы сможем записать в виде равенства

$$\rho(A, B) = AB. \quad (1.1)$$



Если на плоскости  $\pi$  фиксирована прямоугольная декартова система координат  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , а значит, для точек определены координаты относительно этой системы координат  $A(a^1, a^2)$  и  $B(b^1, b^2)$ , то расстояние между точками  $A$  и  $B$  вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + (a^2 - b^2)^2}. \quad (1.2)$$

Таким образом, мы получаем отображение  $\rho : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$  (оно каждой паре точек плоскости ставит в соответствие неотрицательное вещественное число), определяемое формулой (1.1) (или, что эквивалентно, формулой (1.2)). Для любых точек плоскости это отображение обладает следующими свойствами:

(1)  $\rho(A, B) \geq 0$  (расстояние между любой парой точек неотрицательно). При

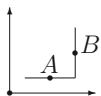
этом  $\rho(A, B) = 0$  тогда и только тогда, когда  $A = B$ .

(2)  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$  (расстояние между точками  $A$  и  $B$  совпадает с расстоянием между точками  $B$  и  $A$ ).

(3)  $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$  (неравенство треугольника).

Число, которое ставится в соответствие паре точек, называется *расстоянием* между этими точками.

А давайте представим себе другую ситуацию:



букашка, не умеющая ни летать, ни плавать, сидит вблизи одного из углов узкого бортика большого и глубокого бассейна.

Она хочет перебраться из точки  $A$  в точку  $B$ . Каково расстояние между этими точками для букашки? Перелететь из точки  $A$  в точку  $B$  она не может, а значит, способ измерения расстояния с помощью прикладывания линейки к этим точкам (как мы это делали в формуле (1.1)) для нее не актуален.

Букашка будет вычислять расстояние так: сколько нужно проползти от точки  $A$  до угла бассейна плюс сколько нужно проползти от угла до точки  $B$ . Если ввести прямоугольную декартову систему координат, то расстояние между точками  $A(a^1, a^2)$  и  $B(b^1, b^2)$  с точки зрения букашки будет вычисляться по формуле

$$\tilde{\rho}(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|.$$

Абстрагируясь от этой конкретной ситуации (забывая про бассейн и букашку), мы получаем следующую картину: пусть на плоскости  $\pi$  фиксирована прямоугольная декартова система координат. Тогда определяется отображение  $\tilde{\rho} : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$ , которое любой паре точек  $A(a^1, a^2)$  и  $B(b^1, b^2)$  этой плоскости ставит в соответствие (неотрицательное) число, определяемое формулой

$$\tilde{\rho}(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|. \quad (1.3)$$

Это отображение удовлетворяет всем трем свойствам (1) – (3). Хотя числа  $\rho(A, B)$  и  $\tilde{\rho}(A, B)$ , вообще говоря, различны для конкретной пары точек  $A$  и  $B$ , они имеют одинаковые права называться расстоянием от точки  $A$  до

точки  $B$ . Но в каждом из этих двух случаев мы должны говорить о том, как мы вычисляли это расстояние, то есть каким отображением  $\rho$  или  $\tilde{\rho}$  пользовались. Эти отображения называют *метриками* и говорят о *расстоянии*, *вычисленном относительно той или иной метрики*.

Итак, мы увидели, что расстояния между точками плоскости можно определять различными способами. Идем дальше: понятие расстояния можно ввести не только между точками плоскости (ну и конечно же пространства), но и между другими объектами. Например, в математике используется понятие расстояния между непрерывными на отрезке функциями. Поэтому мы введем следующее определение.

Пусть дано непустое множество  $X$  произвольной природы (точки плоскости, функции, апельсины и т.д., нам не важно что) и задано отображение  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , которое каждой паре элементов из  $X$  ставит в соответствие вещественное число. При этом потребуем, чтобы отображение  $\rho$  удовлетворяло трем условиям:

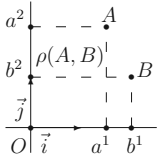
- (1)  $\rho(x, y) \geq 0$  (расстояние между любой парой точек неотрицательно). При этом  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ .
- (2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (расстояние между точками  $x$  и  $y$  совпадает с расстоянием между точками  $y$  и  $x$ ).
- (3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (неравенство треугольника),

где  $x, y, z \in X$  – произвольные элементы из  $X$ . Отображение  $\rho$  называется *метрикой*, число  $\rho(x, y)$  – *расстоянием от точки  $x$  до точки  $y$* . Пара  $(X, \rho)$  называется *метрическим пространством*, элементы множества  $X$  называются *точками* метрического пространства  $(X, \rho)$ . Если метрика  $\rho$  понятна из контекста, мы будем обозначать метрическое пространство просто  $X$ .

Приведем еще примеры метрических пространств.

**Пример 1.1.** Пусть дана плоскость  $\pi$ , прямоугольная декартова система координат на ней и отображение  $\rho_1 : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$  задано формулой

$$\rho_1(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}, \quad (1.4)$$



то есть нужно вычислить модули разностей соответствующих координат точек  $A$  и  $B$  и взять среди них наибольшее. Непосредственно проверяется, что такое отображение  $\rho_1$  удовлетворяет свойствам (1) – (3). Изобразим полученное расстояние (1.4) на рисунке.

Еще один пример метрики, которую можно задать на любом множестве.

**Пример 1.2.** Пусть  $X$  – непустое множество произвольной природы (например, множество студентов, присутствующих на лекции). Отображение  $\rho_2$  зададим следующим образом:  $\rho(x, y) = 0$ , если  $x = y$  и  $\rho(x, y) = 1$ , если  $x \neq y$ . Легко видеть, что все три условия метрического пространства выполняются. Эта метрика называется *тривиальной*.

**Замечание 1.1.** Введем одну очень удобную договоренность. Мы уже знаем, что означает запись  $x \in \mathbb{R}$  – « $x$  принадлежит множеству вещественных чисел (или  $x$  является вещественным числом)». Рассмотрим произвольную прямую  $d$  в пространстве. Фиксируем на ней точку  $O$  и какой-нибудь ненулевой вектор  $\vec{i}$ , параллельный этой прямой. Тогда каждой точке  $X$  этой прямой взаимно однозначно ставится в соответствие вещественное число  $x$ , такое, что  $\overrightarrow{OX} = x\vec{i}$ . Другими словами, мы получаем взаимно однозначное соответствие между точками прямой  $d$  и множеством вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Поэтому будем называть множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  вещественной прямой или, просто, прямой. Проводя рассуждения с прямой, мы будем изображать ее на листе бумаги как обычную прямую, а ее точки воспринимать и как маленькие кружочки на рисунке, и как вещественные числа.

Аналогичным образом, если на плоскости  $\pi$  фиксировать произвольную аффинную систему координат  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , то возникает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости  $\pi$  и множеством упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\overrightarrow{OX} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2, X \rightarrow (x^1, x^2).$$

Множество пар вещественных чисел обозначается так:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x^1, x^2), x^1, x^2 \in \mathbb{R}\}.$$