А.А. Маркин
М.Ю. Соколова

ТЕРМОМЕХАНИКА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А.А. Маркин
М.Ю. Соколова

ТЕРМОМЕХАНИКА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 539.3
ББК 22.251
М 26

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12-01-07001-д

Маркин А. А., Соколова М. Ю. **Термомеханика упругопластического деформирования.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1409-7.

В книге представлены полученные на основе термомеханического подхода соотношения, определяющие поведение изотропных и анизотропных материалов при конечном деформировании. Предложены конкретные формы связей между процессами нагружения, деформирования и изменением температуры как в рамках частного постулата изотропии А. А. Ильюшина, так и с учетом возможных отклонений от него. Даны вариационные постановки связанных краевых задач при внешних механических и тепловых воздействиях. Получены общие вариационные условия устойчивости и единственности процессов конечного равновесного деформирования.

Для научных работников в области механики, студентов и аспирантов механико-математических направлений подготовки.

ISBN 978-5-9221-1409-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2013
© А. А. Маркин, М. Ю. Соколова, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Система основных обозначений 7
Введение 9

Глава 1. **Кинематические и динамические уравнения движения деформируемого тела** 24
§ 1. Теория деформаций 24
1.1. Закон движения сплошной среды 24
1.2. Кинематика бесконечно малой частицы материального пространства 26
1.3. Описание процесса деформации материальной частицы 29
1.4. Скоростные характеристики движения сплошной среды 37
1.5. Дифференцирование по времени тензоров различных типов . . 40
1.6. Неголономные меры деформаций 42
1.7. Подход Эйлера к описанию кинематических характеристик . . 45
§ 2. Теория напряжений 46
2.1. Взаимодействия между частицами сплошной среды, тензор напряжений 46
2.2. Тензоры напряжений, используемые в нелинейной теории . . . 50
2.3. Распределение напряжений по граням куба 51
2.4. Главные оси и главные значения симметричного тензора напряжений 52
2.5. Система инвариантов, связанная с разложением по октаэдрическому базису 53
2.6. Система инвариантов, связанная с площадками максимальных касательных напряжений 57
§ 3. Динамика движения сплошной среды 60
3.1. Уравнения движения сплошной среды в локальной форме . . . 60
3.2. Уравнения движения в вариационных формах 63
3.3. Уравнение неразрывности 68
3.4. Теорема об изменении кинетической энергии 70
3.5. Представление элементарной работы внутренних сил и мощности напряжений 72

Глава 2. **Общие положения термомеханики равновесных процессов** 74

§ 4. Равновесные термомеханические процессы 74

4.1. Условия термомеханического равновесия среды 74

4.2. Принцип термомеханической определимости 75

4.3. Принцип материальной равноправности адиабатических процессов; реакция среды на однородное движение 76

4.4. Дифференцирование тензора истинных напряжений по времени 78

4.5. Общий постулат изотропии для равновесных процессов 79

§ 5. Законы термомеханики 82

5.1. Закон изменения внутренней энергии. 82

5.2. Закон изменения энтропии в равновесных процессах 85

5.3. Термомеханические потенциалы; ограничения на производство диссипации 90

5.4. Условия устойчивости равновесных состояний 95

§ 6. Описание свойств анизотропных материалов 96

6.1. Группы симметрии анизотропных материалов 96

6.2. Инвариантные тензорные базисы и системы алгебраических инвариантов 99

Глава 3. **Термомеханика обратимых процессов; частный постулат изотропии для анизотропных материалов** 108

§ 7. Термомеханика обратимого деформирования; конечные деформации в анизотропных средах 108

7.1. Построение термомеханических моделей обратимых процессов 108

7.2. Тензорно-линейная связь между напряжениями и конечными деформациями 111

7.3. Напряжения в трансверсально-изотропном материале 115

§ 8. Закон Гука и собственные упругие состояния 121

8.1. Свойства линейно упругих материалов; канонические представления тензоров упругости в шестимерном пространстве 121

8.2. Понятие о собственных упругих состояниях материалов 128

8.3. Собственные упругие состояния изотропного материала 129

8.4. Собственные упругие состояния анизотропных материалов . . 131

8.5. Определение типа начальной упругой анизотропии материала 137

§ 9. Частный постулат А. А. Ильюшина и его обобщение на анизотропные материалы 140

9.1. Формулировка частного постулата изотропии А. А. Ильюшиным 140

9.2. Формулировка частного постулата в случае конечных деформаций начально изотропных материалов. 142

9.3. Условия применимости частного постулата изотропии при конечных деформациях 147

9.4. Обобщение частного постулата на случай начально анизотропных сред 149

§ 10. Нелинейные соотношения термоупругости и частный постулат изотропии 152

10.1. Модель анизотропной термоупругости в рамках частного постулата изотропии 153

10.2. Квазилинейные соотношения для изотропных материалов . . . 160

10.3. Определяющие соотношения, учитывающие возможность отклонения свойств материала от частного постулата изотропии 162

§ 11. Методика обработки экспериментов по конечному деформированию сплошных цилиндров 170

11.1. Описание напряженно-деформированного состояния цилиндров при нагружении осевой силой и крутящим моментом . . 170

11.2. Асимптотическое решение задачи о кручении сплошного цилиндра 177

11.3. Программа экспериментов по определению констант, входящих в определяющие соотношения (10.55) 180

11.4. Исследование проявлений нелинейных эффектов при кручении цилиндра 181

Глава 4. **Термомеханика необратимого равновесного деформирования** 186

§ 12. Упругопластическое деформирование начально изотропных материалов 186

12.1. Основные соотношения, определяющие поведение тела в равновесных необратимых процессах 186

12.2. Условия обратимого и необратимого деформирования; поверхность обратимости 187

12.3. Равновесное деформирование начально изотропного материала 190

12.4. Термомеханика равновесных процессов в пространстве деформаций. 191

12.5. Вариант термомеханической модели равновесного необратимого процесса 195

§ 13. Описание необратимого деформирования в пространстве напряжений 198

13.1. Конкретизация вида определяющих соотношений. 198

13.2. Анализ характера деформационной анизотропии 206

13.3. Остаточные напряжения в толстостенном цилиндре 210

§ 14. Необратимые равновесные процессы в анизотропных материалах . . 214

14.1. Построение термомеханического базиса в анизотропных материалах 214

14.2. Вариант теории течения. 218

14.3. Вариант деформационной теории пластичности 222

§ 15. Изменение свойств анизотропных материалов при пластическом деформировании 226

15.1. Описание деформационной анизотропии 226
15.2. Изменение ориентации главных осей анизотропии при конечном однородном деформировании 229
15.3. Изменение ориентации осей анизотропии при двухосном деформировании 230
15.4. Изменение ориентации осей анизотропии при простом сдвиге 234

Глава 5. **Вариационная постановка термомеханических задач; неединственность и устойчивость процессов конечного деформирования** 241

§ 16. Постановка термомеханических задач в отсчетной конфигурации . . 241
16.1. Вариационные формы уравнений движения и теплопроводности 241
16.2. Постановка связанной задачи термоупругости в отсчетной конфигурации 246
16.3. Постановка термомеханической задачи конечного деформирования анизотропных упругопластических тел 249

§ 17. Устойчивость при конечном деформировании 253
17.1. Устойчивость и единственность процессов конечного деформирования. 253
17.2. Построение определяющих соотношений в окрестности точки излома траектории деформирования 255
17.3. Единственность и устойчивость при однородном докритическом состоянии 265
17.4. Неединственность и неустойчивость относительно побочных возмущений заданного направления 271

Список литературы 273

Приложение А. Шестимерные векторные образы симметричных тензоров 295
Приложение Б. Шестимерные образы тензоров четвертого ранга. . . 306
Приложение В. Изотропные тензоры второго и четвертого рангов . . 311
Приложение Г. Порождающие элементы групп симметрии в шестимерном пространстве 316

Система основных обозначений

$\vec{\mathrm{x}}$ — радиус-вектор точки в материальной системе координат;
$\vec{x}_i$, x^i — базисные векторы и материальные координаты;
$\vec{x}$ — радиус-вектор точки в неподвижной системе координат;
x^i — текущие координаты точки;
$\vec{e}_i$, $\vec{e}^i$ — базисные векторы неподвижной системы координат;
$\vec{\mathfrak{z}}_i$, $\vec{\mathfrak{z}}^i$ — векторы основного и взаимного локальных базисов;
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ — векторы перемещений, скоростей и ускорений точки;
$\mathbf{\Phi}$ — тензор-аффинор деформаций;
$\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$ — левая и правая меры искажений и тензор поворота;
$\mathbf{E}$ — единичный тензор второго ранга;
$\mathbf{g}$, $\mathbf{G}$ — метрические тензоры начального и текущего состояний;
$\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Gamma}$ — различные тензоры деформаций;
g_{ij}, G_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров второго ранга;
$\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$, $\widetilde{\mathbf{F}}$, $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ — девиаторы тензоров;
V, ρ — объем и плотность;
Σ — поверхность, ограничивающая объем;
$d\overrightarrow{\Sigma}$, $d\overrightarrow{\Sigma}_{(i)}$ — вектор-площадки;
$\dot{\mathbf{\Phi}}$ — скорость изменения аффинора (или других величин);
$\overset{\circ}{\overrightarrow{\nabla}}$, $\overrightarrow{\nabla}$ — набла-операторы начального и текущего состояний;
$\mathbf{W}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{\Omega}$ — тензоры деформации скорости, вихря и спина;
$\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости;
θ, $\dot{\theta}$ — параметр, характеризующий объем, и его скорость;
$\mathbf{A}^{\cdot}$, $^{\cdot}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\wedge}$, $\mathbf{A}^{\vee}$ — объективные производные тензора второго ранга;
$\mathbf{A}^{\triangledown}$, $\mathbf{A}^{\triangle}$ — яуманновская и обобщенная яуманновская производные тензора;
$\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ — неголономные меры деформаций;
$\vec{i}_k$, $\vec{n}_k$ — векторы вихревого и полярного базисов;
$\vec{P}$, $\vec{P}^{(n)}$ — вектор напряжений и вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{n}$;
$\overrightarrow{M}$ — главный момент поверхностной нагрузки;
$\mathbf{S}$, $\mathbf{m}$ — тензор напряжений Коши и тензор моментных напряжений;
S^{ij}, S_{ij}, σ_{ij}, Σ_{ij} — компоненты тензора истинных напряжений в различных базисах;
σ_i, $\vec{p}_i$ — главные значения и главные векторы тензора напряжений;

$\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$ — тензоры напряжений Пиолы–Кирхгофа;
$\mathbf{\Sigma}$ — обобщенный тензор напряжений;
σ_0, τ, γ — инварианты напряжений;
$\vec{F}$ — плотность внешних массовых сил;
$\delta\vec{u}$ — вариация вектора перемещений;
$\dfrac{d\vec{u}}{dt}$, $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ — полная и локальная производные вектора перемещений по времени;
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{A}$ — скалярное произведение и свертка тензоров (или векторов);
K, $N^{(e)}$, $N^{(i)}$, $A^{(e)}$, $A^{(i)}$ — кинетическая энергия, мощность внешних и внутренних сил, работа внешних и внутренних сил;
dA — элементарная работа;
χ_i — параметры термодинамического процесса;
$\mathfrak{F}$ — функционал процесса;
U, u, Q — внутренняя энергия, удельная внутренняя энергия и количество тепла;
T — абсолютная температура;
S, w — энтропия и диссипация;
Ψ, H, G — свободная энергия, энтальпия и потенциал Гиббса;
$\mathbf{Q}$ — тензор поворота;
g_A, g — группа преобразований и полная ортогональная группа;
$\vec{\sigma}$, $\vec{\text{э}}$ — шестимерные векторы напряжений и деформаций;
$\vec{\sigma}$, э_α — компоненты векторов напряжений и деформаций;
$\mathbf{I}^\alpha$, $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ — базисные тензоры второго и четвертого рангов;
α, $\beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ — греческие индексы принимают значения от 0 до 5 (в отличие от латинских индексов $i, j = 1, 2, 3$);
$\vec{i}_\alpha$ — базисные векторы шестимерного пространства;
$\mathbf{i}_{\alpha\beta}$ — базисные тензоры второго ранга в шестимерном пространстве;
$\mathbf{N}$, $\mathbf{n}$ — тензор упругости четвертого ранга и его образ в шестимерном пространстве;
$\mathbf{B}$, $\vec{b}$ — тензор температурных напряжений второго ранга и его образ в шестимерном пространстве;
$\vec{a}_i$ — векторы, направленные вдоль главных осей анизотропии;
$\boldsymbol{\omega}_\alpha$, $\vec{\omega}_\alpha$ — направляющие тензоры собственных упругих состояний и их шестимерные образы;
$\mathbf{\Omega}_\alpha$ — базисный тензор собственного состояния;
λ_α — собственные значения тензоров упругости;
$\vec{\tau}$ — вектор нагружения в девиаторном подпространстве;
$\vec{\text{э}}_\perp$ — необратимая составляющая вектора деформаций;
$\boldsymbol{\sigma}_s$ — тензор пластической анизотропии;
$\mathbf{\Lambda}$ — тензор второго ранга в шестимерном пространстве.

Посвящается светлой памяти нашего учителя
Леонида Александровича Толоконникова

Введение

Построение моделей материалов, адекватно описывающих их поведение в процессе внешних механических и термических воздействий, сопровождающихся значительным формоизменением и внутренними тепловыми потоками, является одной из основных проблем механики деформируемого твердого тела.

Широкое использование конструктивно анизотропных материалов, прежде всего композитов, приводит к необходимости идентификации их начальной механической и термической анизотропии. Программы, позволяющие по минимальному количеству экспериментов установить тип начальной анизотропии материала, не разработаны ни у нас в стране, ни за рубежом. Практически отсутствуют модели поведения анизотропных материалов при тепловых и механических воздействиях, приводящих к большим деформациям и необратимому изменению свойств. Такого рода процессы реализуются в армированных эластомерах и материалах с памятью формы.

В основе решения задачи моделирования реакции материалов на внешние термомеханические воздействия лежит обобщение теории процессов А. А. Ильюшина [79–82] на процессы конечного деформирования в сочетании с термодинамическим описанием поведения материалов на различных стадиях и режимах деформирования. Такие модели могут быть построены на основе единого термомеханического подхода, введенного в механику сплошных сред Л. И. Седовым [208, 209], А. А. Ильюшиным [80–83], У. Ноллом и К. Трусделлом [237].

Преимущество такого подхода состоит в установлении термодинамического смысла постоянных и операторов, определяющих связь между процессами деформирования, изменением температуры и термодинамическими характеристиками материала — такими, как: внутренняя энергия, свободная энергия, энтропия и т. д. В результате появляется возможность определения, хотя бы на качественном уровне, связи между макроконстантами и микровзаимодействиями частиц материала.

Монография посвящена построению моделей обратимого и необратимого равновесного неизотермического деформирования.

В первой главе приведены общие соотношения, описывающие кинематику и динамику сплошной среды. Рассмотрены различные типы производных по времени от кинематических и динамических тензорных характеристик. Наряду с традиционными мерами приведены введенные в работах [136, 138, 151, 229] неголономные меры деформаций. Использование данных мер позволяет независимо описывать процессы изменения объема и формы при конечных деформациях.

Для формулировки вариационного условия сохраняющегося равновесия использован подход, развитый в работах [137, 233, 234]. Даны представления удельной мощности напряжений через энергетически сопряженные меры деформаций и напряжений.

Во второй главе, следуя работам [132, 138], сформулированы условие термомеханической тождественности равновесных состояний и принцип термомеханической определимости равновесных процессов. Даны формулировки принципа материальной объективности и общего постулата изотропии для равновесных процессов. Приведены различные формы представления законов изменения внутренней энергии и энтропии. Получено условие материальной устойчивости равновесного состояния.

В третьей главе на основе общих положений термомеханики, приведенных во второй главе, и обобщения частного постулата изотропии на анизотропные материалы производится построение термомеханических моделей обратимых процессов для изотропных и анизотропных материалов. На основе решения задач о кручении сплошного цилиндра с неподвижными и свободными торцами разработана программа экспериментальной конкретизации нелинейных определяющих соотношений.

Термомеханические модели обратимого деформирования развиваются в работах В. Н. Кукуджанова и К. Сантойя [110], И. Г. Терегулова [223], В. А. Пальмова [178], А. С. Кравчука [105, 107], В. И. Левитаса [118], Б. Е. Победри [191–196], А. А. Маркина [50, 132, 138, 139], Н. Г. Бураго, А. И. Глушко и А. Н. Ковшова [35], Е. З. Короля [101], А. А. Рогового [108, 109, 172, 203, 204], П. В. Трусова [198, 238, 239], Г. Л. Бровко [31–34] и других авторов.

В работах А. Навье, О. Коши, С. Пуассона, Д. Грина, У. Кельвина, Ф. Неймана, П. Бехтерева, Н. Г. Ченцова, В. В. Новожилова, С. Г. Лехницкого [123], Я. Рыхлевского [206], К. Ф. Черных [246–249] и других авторов рассматривались вопросы о структуре закона Гука для материалов, обладающих различным типом симметрии упругих свойств. В работе Я. Рыхлевского [206] вводится понятие о собственных упругих состояниях материала, которые определены для анизотропных материалов различных типов в статьях Н. И. Остросаблина [13, 175, 176], работах Н. М. Матченко и Л. А. Толоконникова [230], статьях [146, 148].

Представляет интерес серия работ Яна Рыхлевского с соавторами [275, 320–322], в которых автор методом теории групп получил неприводимое линейное ортогональное разложение полусимметричных тензоров четвертого ранга на изотропную и две анизотропные составляющие. В работе Н. И. Остросаблина [174] используется подобное разложение тензора четвертого ранга на постоянную, девиаторную и нонорную части. Анализ полученных разложений и решение ряда простых задач позволили авторам статьи [321] сделать некоторые выводы о характере поведения анизотропных материалов. В частности, получен

вывод о том, что существуют анизотропные материалы, ведущие себя в некоторых условиях как изотропные. Поэтому имеются некоторые классы воздействий на материал, не способных выявить тип его анизотропии. В связи с этими выводами Я. Рыхлевского актуальной является проблема идентификации типа анизотропии материала, которая состоит в разработке соответствующей программы экспериментов.

Нелинейные варианты теории упругости наиболее развиты для изотропных материалов. Впервые изложение основ нелинейной теории упругости было дано в монографии В. В. Новожилова [170], изданной в 1948 году. Дальнейшее становление этой отрасли знаний связано с исследованиями И. И. Гольденблата [56], Л. А. Толоконникова [227, 228], В. Новацкого [168], К. Ф. Черныха [247–249] и других авторов. Нелинейной теории упругости посвящены монографии А. И. Лурье [127, 128].

В основе моделей поведения упругих тел, учитывающих геометрическую нелинейность, лежит кинематика конечных деформаций, наиболее полно изложенная в книгах Л. И. Седова [208, 209], А. И. Лурье [127, 128], В. В. Новожилова и К. Ф. Черных [171, 247–249] и нашедшая свое отражение в работах [1, 32, 33, 51, 56, 59, 100, 117, 129, 130, 133, 181, 200, 220, 301, 310, 323, 327, 334, 335] и многих других.

При построении соотношений, связывающих напряжения и деформации в нелинейно упругих изотропных телах, принимаются некоторые гипотезы, имеющие в определенном диапазоне деформаций и для определенных классов материалов экспериментальное подтверждение, а также существенно упрощающие выражения упругих потенциалов. К их числу относят предположение о независимости законов изменения объема и формоизменения и гипотезу о подобии тензоров напряжений и деформаций. Как известно, вторая гипотеза тождественна утверждениям о независимости законов упругости от третьего инварианта деформаций (фазы деформаций или вида деформированного состояния) или о выполнении частного постулата изотропии А. А. Ильюшина [51]. Модели, опирающиеся на обе приведенные гипотезы, являются простейшими и соответствуют неогуковскому материалу и материалу Муни [127, 128].

Законы упругости, в которых учитывается влияние на гидростатические напряжения формоизменения [128, 220, 229], описывают дилатационные явления в упругих изотропных материалах. Учет слабой сжимаемости упругого материала в статьях [108, 109] позволяет описать нелинейную зависимость формоизменения от относительного изменения объема. Некоторые модели, описывающие разносопротивляемость материалов растяжению–сжатию, например, представленные в работах [157, 225], строятся в предположении, что закон изменения объема является линейным, а формоизменение зависит от вида деформированного состояния. Наиболее общие варианты соотношений нелинейной упругости строятся при отказе от обеих гипотез, как это сделано в работах [17, 51, 129, 130, 170]. Отметим, что в отличие от

варианта соотношений, предложенного в работах [17, 51], в моделях В.В. Новожилова [170] закон упругости связывает энергетический тензор напряжений с тензором деформаций Коши–Грина и содержит два обобщенных упругих модуля.

В работах В.М. Малькова [129, 130] определяющие соотношения получены на основе рассмотрения упругого потенциала и разложения тензоров напряжений и деформаций на шаровую, девиаторную составляющие и так называемый тензор сдвига. В результате выявлена линейная связь между главными значениями напряжений и деформаций. Нелинейность содержится в коэффициентах соотношений, которые являются функциями обобщенных модулей упругости и фазы подобия девиаторов. Соотношения записаны для различных пар энергетически сопряженных тензоров напряжений и деформаций в единообразной форме, в частности, для пар: энергетический тензор напряжений–тензор деформаций Коши–Грина, обобщенный тензор истинных напряжений–тензор деформаций Генки и др. В первом случае линейная связь между первыми инвариантами напряжений и деформаций не является законом изменения объема.

В работах А.А. Рогового [108, 109, 172, 203, 204] разработан формализованный подход (алгоритм действий) к построению определяющих уравнений (включая эволюционные) сложных сред (упругопластических, вязкоупругих, термоупругих) при конечных деформациях. Использование экспериментальных данных для реальных материалов позволило идентифицировать параметры построенных моделей. Показано, что уравнения удовлетворяют термодинамическому неравенству Клаузиуса–Дюгема. Осуществлена верификация моделей на ряде задач. Проблемам идентификации и верификации нелинейных моделей поведения изотропных и анизотропных материалов посвящены также работы [52, 164, 262, 265, 276, 280, 283, 288, 290, 292, 298, 300, 309, 313, 318, 324, 325, 331, 333].

Статьи [163, 264, 276, 292, 327] посвящены построению нелинейных определяющих соотношений в упругих и гиперупругих изотропных материалах на основе термомеханических соотношений. В работе [263] приведены основные соотношения термоупругости для больших деформаций изотропных материалов типа резины.

При построении соотношений, описывающих обратимые конечные деформации анизотропных тел, возникает проблема учета симметрии упругих свойств материала. Обычно она решается введением в выражение для упругого потенциала дополнительных переменных — скалярных инвариантов тензора деформаций либо векторных и тензорных (различного ранга) величин, описывающих структуру и свойства материала [54, 59, 112, 117, 125, 126, 145, 167, 237, 247, 282, 291, 314, 336, 337].

Наряду с классической работой А.Е. Грина и Дж. Адкинса [59], где даны общие соображения о построении упругого потенциала, наиболее развитой и последовательной теорией нелинейной анизотроп-

ной упругости является теория К. Ф. Черных, изложенная в монографиях [87, 247–249]. В этих книгах с общих позиций изучена структура и даны конкретные представления упругих потенциалов, отвечающих ортотропным, трансверсально-изотропным и изотропным материалам. Рассмотрены несжимаемые материалы и плоское напряженное состояние. Приложение полученных результатов рассмотрено на примере расчета оболочек из анизотропных материалов.

Модели нелинейных упругих анизотропных материалов рассмотрены в работах [291, 301, 314]. В статье [291] предложена модель, основанная на разложении упругого потенциала в бесконечный ряд по полной системе сферических гармоник, содержащем полиномы тензора деформаций Коши–Грина, построенные с использованием бесконечномерного ортонормированного тензорного базиса. В качестве базисных тензоров используются девиаторы различных рангов. Базисные тензоры второго ранга совпадают с девиаторами тригонометрического базиса В. В. Новожилова и канонического базиса, введенного в работе [216]. Предложен метод идентификации параметров модели по измерениям одноосных деформаций, однако число этих параметров возрастает пропорционально четвертой степени числа членов, сохраняемых в разложении.

В статье [314] для формулировки определяющих соотношений на макроуровне рассматривается сплошное тело, каждой точке которого приписана материальная переменная, характеризующая симметрию свойств. Предлагаемые соотношения удовлетворяют требованиям материальной симметрии и материальной объективности относительно жестких перемещений начальной конфигурации, поскольку в качестве мер напряженного и деформированного состояний берутся тензор напряжений Пиолы–Кирхгоффа и тензор деформаций Коши–Грина.

Статья [301] посвящена проблеме описания конечных деформаций в сильно анизотропном вязкоупругом материале (древесине). Предложены определяющие соотношения скоростного типа, в которых использована объективная производная тензора истинных напряжений. Авторы статьи указывают на проблему выбора типа объективной производной в анизотропных материалах, связанную с тем, что главные оси анизотропии вращаются в процессе деформирования. Сделан вывод о том, что простейший вид имеют определяющие соотношения, записанные через обобщенную яуманновскую производную, так как в этом случае дифференцирование производится относительно системы координат, неизменно ориентированной относительно главных осей анизотропии.

В современной литературе практически отсутствуют публикации, в которых были бы предложены модели конечного термоупругого деформирования анизотропных тел. Исключение составляет лишь монография В. И. Левитаса [117], в которой сделаны первые шаги в этом направлении. В случае малых деформаций упругого анизотропного тела напряжения, деформации и температура чаще всего связываются

с помощью уравнений Дюгамеля–Неймана, вывод которых с точки зрения термомеханики приведен в книге В. Новацкого [168]. Вопросам термоупругости изотропных материалов посвящены классические работы Д. А. Коваленко [94, 95], Б. Боли и П. П. Уэйнера [27], М. Био [26, 274], Э. Мелана и Г. Паркуса [160], Я. С. Подстригача с соавторами [197]. В работе [263] приведены основные соотношения термоупругости для больших деформаций изотропных материалов типа резины. В случае анизотропных материалов постановки задач термоупругости на основе уравнений Дюгамеля–Неймана приведены в книгах Б. Е. Победри [189], А. С. Кравчука, В. П. Майбороды и Ю. С. Уржумцева [107], в трехтомнике по механике композитов под редакцией А. Н. Гузя [161].

Проблемы термодинамики в анизотропных материалах и формулировка вариационных принципов термоупругости рассматривались в книгах И. И. Гольденблата с соавторами [56, 57], работах М. Био [26, 274], а также в работах [21, 190, 191, 194]. Решение смешанной задачи термоупругости для трансверсально-изотропного слоя приведено в статье [182]. Как отмечалось Б. Е. Победрей [189, с. 117], «…связанная задача термоупругости представляет чаще всего только академический интерес», поэтому в большинстве из перечисленных работ решалась несвязанная задача. При этом распределение температуры находилось из решения задачи теплопроводности, а затем решалась задача механики деформируемого твердого тела с измененными объемными и поверхностными силами.

В работе Ю. Н. Шевченко с соавторами [252] сформулирован и экспериментально подтвержден постулат изотропии векторных свойств материала для компонент тензора напряжений и компонент тензора деформаций, определенных в одной системе координат Эйлера, с учетом вида деформированного состояния элемента тела. В статьях Б. И. Ковальчука, В. В. Косарчука и А. А. Лебедева [96, 97, 102, 103, 115, 116] рассмотрено обобщение частного постулата изотропии на случай трансверсально-изотропного материала, которое подтверждено серией экспериментов.

В четвертой главе рассматривается термомеханика необратимого равновесного деформирования. В отличие от обратимых процессов, рассмотренных в предыдущем разделе, здесь учитывается возможность и необратимого равновесного деформирования. Следуя Л. И. Седову, термин «упругопластическое деформирование» можно заменить на более общее понятие «равновесное необратимое деформирование». Основным термомеханическим параметром, определяющим необратимые свойства материала, является необратимая (внутренняя) составляющая энтропии или связанная с ней диссипация. В связи с этим главной проблемой идентификации свойств материала в необратимых процессах является определение производства диссипации и условий ее отсутствия в процессе деформирования (нагружения) с учетом влияния температуры.

Известные экспериментальные данные обнаруживают существенное различие в реакции начально-изотропных материалов на гидростатическое нагружение и нагружения по траекториям, расположенным в девиаторном подпространстве. Если гидростатическое нагружение является практически обратимым, то замкнутые по девиаторной составляющей тензора напряжений траектории нагружения приводят к остаточным деформациям, когда длина вектора нагружения превышает некоторый предел. Если же данный предел (упругости) не достигается, то процессы, замкнутые по температуре и по напряжениям в шестимерном пространстве, не приводят к остаточным деформациям. Таким образом, материал при нагружении из ненапряженного состояния практически деформируется обратимо в некоторой области изображающего пространства. В связи с этим вводится понятие о поверхности, разделяющей области обратимого (упругого) и необратимого (упругопластического) деформирования. В теории пластичности ее называют поверхностью нагружения. Для того, чтобы подчеркнуть термомеханический смысл этой поверхности, будем называть ее поверхностью обратимости. Введение пластической составляющей, неизменной при обратимом деформировании, есть следствие гипотезы о существовании поверхности обратимости. А. А. Ильюшиным пластическая деформация вводится на основе гипотезы о разгрузке. При этом указывается необходимость экспериментальной проверки неизменности пластической составляющей при различных траекториях перехода в состояние полной разгрузки. Естественно, что область перехода от необратимого деформирования к почти обратимому может быть установлена с определенным допуском. Поэтому теории пластичности, основанные на предположении существования поверхности обратимости (нагружения), являются моделями, ограниченными гипотезой о разгрузке. Существуют теории, где граница между необратимым и обратимым продолжением процесса деформирования не вводится [88, 89]. Однако отказ от гипотезы о разгрузке приводит к существенному усложнению связей между процессами деформирования и нагружения, которые становятся дифференциально-нелинейными.

Дадим краткий обзор выполненных за последнее десятилетие основных работ отечественных и зарубежных авторов.

В начале рассмотрим модели, ограниченные малыми деформациями и их градиентами.

В работах В. С. Бондаря с соавторами [28, 29] рассматривается математическое моделирование упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении. Анализируются варианты одноповерхностных теорий пластического течения при изотропном и комбинированном упрочнении. Сравнительный анализ вариантов теорий по адекватному описанию процессов сложного нагружения проводится на широком спектре траекторий деформаций постоянной и переменной кривизны и кручения, от малых до больших кривизн и круток.

В статье [286] предложен новый метод в теории пластичности твердого тела как развитие теории Хилла. В новом методе предполагается, что структура твердого тела состоит из соединяющихся, закручивающихся, сплетающихся, накладывающихся друг на друга элементарных блоков, называемых образцами. Развита теория образцов. Получены упругие и пластические составляющие, а также третья компонента приращения деформации, помогающая объяснить неассоциированный закон течения. Предложенный метод ведет к объяснению критических состояний, анизотропии, чувствительности, эффекта Баушингера, затухающей памяти. Все эти эффекты появляются в теории как почти неизбежные черты пластических твердых тел. Результаты иллюстрируются в деталях для плоского двуосного процесса деформации.

В статьях [302, 315, 319] рассматривается общая теория упругопластичности с внутренними переменными, удовлетворяющая второму закону термодинамики. Отмечается, что единственная часть внутренней энергии, не определяемая из изотермических опытов: накопленная энергия, — является функцией только внутренних переменных. Показано, что эту функцию можно построить по результатам опытов при адиабатическом деформировании. Представлены экспериментальные данные по динамическим испытаниям балок при различных скоростях деформирования, позволяющие однозначно определить функцию запасенной энергии. На ее основе рассчитано термомеханическое поведение материала при неизотермических процессах; предсказания хорошо согласуются с результатами опытов.

В монографиях В. Г. Зубчанинова [69, 70] получены две основные формы дифференциально-нелинейных определяющих соотношений, из которых следуют различные частные модели процессов пластического деформирования. Систематизированы результаты экспериментов, проведенных для обоснования достоверности теории и ее математических моделей.

В монографии А. Ю. Ишлинского и Д. Д. Ивлева [86] изложено построение общих соотношений теории идеальной пластичности упрочняющегося материала. Дано приложение теории к технологическим процессам обработки давлением.

Статьи [260, 289, 308, 332] посвящены разработке градиентной теории пластичности (т. е. теории, включающей в качестве независимых переменных кроме общепринятых параметров градиенты тензора деформации), основанной на двухуровневом подходе. На микроуровне в качестве основополагающей принята модель Тейлора, в которой приняты следующие предположения: отсутствуют напряжения высоких порядков, применимы соотношения ассоциированного закона пластического течения, квадрат напряжения течения связан линейной зависимостью с плотностью дислокаций. Определяющие соотношения мезоуровня устанавливаются с применением процедуры осреднения по соответствующему представительному объему. Выражение для эффективного градиента тензора деформации получено рассмотрением

геометрически необходимых дислокаций при изгибе, кручении и росте пор. Отмечается, что для идентификации модели необходимы не только Обычные механические испытания на макроуровне, но и тесты по вдавливанию микро- и наноинденторов. Развитые в настоящее время градиентные теории пластичности формулируют определяющие соотношения на уровне континуума, который используется, чтобы заполнить зазор между микромеханической пластичностью и классической континуальной пластичностью. Эти теории успешны при объяснении масштабных эффектов, возникающих во многих современных микро- и нанотехнологиях, благодаря включению в определяющие соотношения характерного материального параметра длины. Однако полное использование теорий градиентного типа зависит от способности определить этот параметр, который связан с градиентами деформации, и данное исследование направлено на исправление этой ситуации. Здесь строится микромеханическая модель (основываясь на законе упрочнения Тейлора), которая оценивает нелинейную связь между статистически накопленными и геометрически необходимыми дислокациями. Это позволяет получить аналитическое соотношение для параметра характерного масштаба длины в градиенте деформации через измеряемые микроструктурные параметры.

Переход к конечным деформациям приводит к появлению ряда новых проблем, к которым следует отнести следующие ниже.

1. Выбор мер напряжений и деформаций, позволяющих построить адекватные образы процессов и распространить общий и частный постулат изотропии на конечное деформирование. Формулировка критериев выбора.

2. Создание испытательных комплексов и систем управления внешним нагружением с целью реализации заданных траекторий конечного деформирования.

3. Построение и анализ общих форм определяющих соотношений для процессов конечного деформирования различной кривизны. Корректное разделение областей обратимого и необратимого деформирования с учетом изменения упругих и пластических свойств в процессе необратимого деформирования. Термодинамическое и экспериментальное обоснование предлагаемых моделей.

К настоящему времени предложено несколько вариантов теорий, отличающихся выбором мер «упругого» и «пластического» состояний.

В статье [330] дается представление диагональных и недиагональных компонент тензора логарифмической деформации, введение которого особенно полезно при описании больших пластических деформаций. Определение тензора логарифмической деформации получено из закона сохранения и преобразования энергии. Линейные и угловые компоненты тензора логарифмической деформации сравниваются с компонентами обычной деформации. Различия компонент тензоров представлены в виде некоторых диаграмм. Показано, что компоненты

тензора логарифмической деформации полезны в экспериментальном анализе поля деформаций в процессах холодной обработки материалов.

В статье А. А. Рогового [203] предложены кинематические соотношения, описывающие процесс упруго-неупругого деформирования, совпадающие по форме с известным разложением Ли, но свободные от недостатков последнего; распространены на случай термоупруго-неупругого процесса при конечных деформациях. Рассмотрены ограничения, накладываемые на кинематику принципом объективности. Получены вытекающие из законов термодинамики соотношения для напряжений и энтропии, построено уравнение теплопроводности.

В статье [122] для произвольных непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых траекторий деформирования, любых деформаций и типов симметрии свойств материала на основе теории простых упрочняющихся материалов с упругопластическим поведением математически строго построены общие определяющие соотношения деформационной теории пластичности. Рассмотрены два условия, при которых это возможно. Разработаны подходы к строгой специализации общих определяющих соотношений деформационной теории пластичности посредством наложения ограничений на деформации, процессы деформирования и свойства материалов. При этом ограничения на свойства материалов формализуют полученные в экспериментальных исследованиях данные. Построен ряд как новых, так и известных определяющих соотношений, расположенных в виде иерархии по уровню сложности реакции на деформирование. Определена область применимости полученных физических уравнений. Особое внимание уделено моделированию конечных и бесконечно малых деформаций изотропных материалов.

В статье [311] рассматривается напряжение, сопряженное с деформацией, если произведение напряжения и нормы деформации имеет след, равный работе на единице объема. На основании произведения Кронекера получены новые выражения для напряжений, сопряженных с деформацией Фингера, деформацией Эйлера, тензором растяжения Эйлера (правым) и логарифмом тензора Эйлера. Кроме того, получена неклассическая деформация, позволяющая рассматривать определяющее уравнение, выражающее норму Трусделла через тензор Фингера и норму Трусделла тензора напряжения Коши.

В статье Л. В. Ковтанюка [98] получена замкнутая система уравнений математической модели больших упругопластических деформаций, когда деформирование осуществляется в условиях изменения температуры. В основу модели положены дифференциальные определения для обратимых и необратимых деформаций (уравнения переноса). Последовательное использование формализма неравновесной термодинамики позволило построить математическую модель процесса деформирования, свободную от проблемы «выбора» объективной производной в определении тензора скоростей необратимых деформаций.

В докладе [326] на основе термодинамического анализа с внутренними переменными, учитывающего различие поведения материала при разгрузке, кратко обсуждаются некоторые вопросы симметричности, изоморфизма и однородности материала применительно к построению моделей упругопластичности при конечных деформациях.

В работах Б. Е. Победри [190, 191, 194] формулируются общие положения термомеханики для неравновесных процессов.

В статье [88] Ю. И. Кадашевича, С. П. Помыткина даются простейшие определяющие уравнения теории неупругости эндохронного типа, учитывающие конечные деформации и временные явления. Предполагается, что предел текучести материала зависит от времени. Приведены теоретические результаты поведения материала при простом и сложном нагружениях. В задаче простого сдвига при прямом активном деформировании обнаружен экспериментально описанный Монтелье «эффект осцилляции» — релаксации осевого напряжения после достижения им экстремума. В процессе ползучести при задании сдвиговых напряжений кроме сдвиговой деформации возникает и развивается осевая деформация.

В работах [151, 229] были выбраны неголономные меры деформаций, энергетически сопряженные с тензором истинных напряжений и позволяющие процессу конечного формоизменения поставить в соответствие пятимерный векторный образ в пространстве А. А. Ильюшина.

К настоящему времени предложено несколько вариантов теорий, отличающихся выбором мер «упругого» и «пластического» состояний [12, 53, 59, 110, 117, 118, 200, 204, 250]. Противоречия и недостатки указанных подходов выявляются при переходе от рассмотрения состояний к рассмотрению процессов деформирования. Ни один из предложенных вариантов не позволяет последовательно разделить процессы упругого и пластического конечного деформирования. Так, требование неизменности в упругой области любой из традиционных «пластических» мер не приводит, в общем случае, к неизменности пластической составляющей тензора деформации скорости. Отчасти этим можно объяснить и то, что общие построения, как правило, не содержат экспериментальных программ, позволяющих конкретизировать предлагаемые модели. Далека от завершения проблема рационального выбора параметров термомеханического состояния и построения функционала необратимой составляющей энтропии. С целью преодоления этих трудностей в работах [132, 138] сформулирован принцип термомеханической определимости равновесных, в общем случае необратимых процессов. На основании принципа термомеханической определимости равновесных состояний изменение температуры, энергии и энтропии являются функциями деформированного и напряженного состояний. Законы для свободной энергии и энтропии переходят в функционалы, задаваемые на траекториях деформирования, при подстановке в их определения вместо вектора напряжений (деформаций) его выражения, следующего из постулата изотропии. Основным термомеханическим

параметром, определяющим необратимые свойства материала, является необратимая (внутренняя) составляющая энтропии или связанная с ней диссипация. В связи с этим главной проблемой идентификации свойств материала в необратимых процессах является определение производства диссипации и условий ее отсутствия в процессе деформирования (нагружения) с учетом влияния температуры.

В § 14 гл. 4 рассматриваются необратимые процессы конечного деформирования анизотропных материалов, обладающих склерономными свойствами. Поведение таких материалов описывается в рамках теорий пластичности типа теории течения или деформационной теории.

Теория течения анизотропных материалов предложена Р. Мизесом [305] для неупрочняющихся и несжимаемых материалов и получила дальнейшее развитие в работах Р. Хилла [242], Е. В. Маховера [158], С. П. Яковлева [231, 257], Н. М. Матченко [156, 230], Д. Д. Ивлева [6, 77], Б. И. Ковальчука [96], М. А. Грекова [58] и других авторов. В основе этих теорий лежит условие пластичности, записанное в виде квадратичной формы, построенной по компонентам напряжений, а в работах Д. Д. Ивлева и М. А. Артемова [6, 7, 77] предложено условие пластичности анизотропного материала, обобщающее условие Треска. Малые деформации в этих теориях определяются из ассоциированного закона течения, являющегося следствием принципа градиентальности.

Для упрочняющихся материалов разработаны модели, являющиеся обобщением на случай анизотропных тел теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина [82, 83]. Такие теории предложены И. И. Гольденблатом [55], Б. Е. Победрей [184, 187], В. А. Ломакиным [124], А. С. Кравчуком [106] и другими.

Теория И. И. Гольденблата [55] построена на основе предположения о существовании пластического потенциала, который является функцией двух смешанных инвариантов тензора деформаций и тензора четвертого ранга $\mathbf{A}$, характеризующего анизотропию. Кроме того, выдвигается требование, в соответствии с которым при замене тензора $\mathbf{A}$ изотропным тензором четвертого ранга соотношения сводятся к теории малых упругопластических деформаций изотропного тела.

От модели, предложенной в [55], существенным образом отличается деформационная теория пластичности Б. Е. Победри [184, 187 и др.]. В этой теории соотношения строятся на основе введенного в [188] спектрального разложения линейного тензора деформаций. Предложенные соотношения использованы при постановке краевых задач в напряжениях [185, 186, 189]. В статье [185] предложен вариант соотношений, учитывающих зависимость напряжений от температуры. Оставаясь на позициях Дюгамеля–Неймана, автор указывает, что даже в случае физической нелинейности модели температура в определяющие соотношения должна войти линейно.

В статье В. А. Ломакина [124] введено понятие обобщенного девиатора напряжений, нечувствительного к объемным изменениям

элемента анизотропной среды. Полагается, что в течение всего процесса деформирования объем макроэлемента из анизотропного материала изменяется упруго. В модели приняты две гипотезы: о существовании пластического потенциала и о соосности обобщенных девиаторов тензора полных напряжений и тензора упругих напряжений, определяемых по закону Гука через тензор упругости.

В работе А. С. Кравчука [106] предложены вариант теории течения и вариант деформационной теории с использованием понятия собственных напряженных состояний, введенного Я. Рыхлевским [206]. При построении теории введены два предположения. Первое — о совпадении подпространств собственных упругих и пластических напряженных состояний. В соответствии со вторым предположением пластические деформации не возникают под действием напряжений, совпадающих с первым собственным состоянием. В случае изотропного материала это совпадает с требованием независимости пластического течения от гидростатического давления. А. С. Кравчук в статье [106] указывает на возможность обобщения своих соотношений на случай конечных деформаций путем использования производной Яуманна от тензора напряжений.

Вариант теории пластичности, предложенный А. И. Чанышевым [243], близок к работе [106]. Как отмечалось в статье Б. И. Ковальчука [96], в основе моделей [106, 124, 243] лежит гипотеза о связи анизотропии упругих и пластических свойств, которую нельзя распространить на любые материалы, так как из экспериментов известно [97, 162], что пластические и упругие свойства реальных материалов могут обладать симметрией различных типов.

Теория пластического течения для упрочняющихся анизотропных материалов представлена в работах В. В. Косарчука, Б. И. Ковальчука и А. А. Лебедева [103, 115, 116]. Здесь приведены данные по экспериментальному построению кривых текучести анизотропных материалов, а также сформулированы соответствующие определяющие соотношения.

В статьях Б. И. Ковальчука [96], Н. М. Матченко [156, 230] и Н. Б. Алфутовой [5] модели пластического деформирования анизотропных тел строятся в модифицированном пространстве, полученном путем линейных преобразований перемещений, деформаций и напряжений. В модифицированных пространствах начально-анизотропный материал рассматривается как изотропный, что значительно облегчает формулировку определяющих соотношений и решение краевых задач.

Теории упругопластических конечных деформаций анизотропных тел представлены в работах В. И. Левитаса [117, 118], статьях [284, 285, 293, 294].

В основу кинематики термоупругопластической среды В. И. Левитас [117] положил термодинамическое определение мер упругой и пластической деформации. Автор использует мультипликативное

разбиение аффинора деформаций на упругую и пластическую части, которое подробно проанализировано выше и в работах [151, 200].

В статьях [284, 285] определяющие соотношения записаны в системе координат, вращающейся вместе с частицей со скоростью, определяемой пластическим спином. Для пластического спина используются эволюционные уравнения, вид которых существенно влияет на характер получаемых результатов. Физический смысл понятия «пластического спина» в этих работах автором не конкретизируется. В работе [284] автором записано условие текучести в квадратичной форме для упрочняющихся анизотропных материалов. Статья [285] посвящена изучению с помощью предложенных соотношений вращения главных осей анизотропии, сопровождающего пластические деформации трансверсально-изотропной жесткопластической полосы при простом сдвиге и двухосном растяжении–сжатии.

В статье [293] рассматривается основанный на термодинамике подход к формулировке определяющих соотношений упругопластичности при больших градиентах перемещений и анизотропии упругопластических свойств. Используется мультипликативное разложение градиента места, на основе которого в терминах промежуточной (разгруженной) конфигурации вводится аддитивное разложение тензора деформации на упругую и пластическую составляющие. Свободная энергия системы представляется суммой составляющих, зависящих, соответственно, от упругих и пластических деформаций. Для учета анизотропии материала в рассмотрение вводятся два тензора ротации, используемые при формулировке, соответственно, упругого закона и закона пластического течения (с кинематическим упрочнением).

Закон упругопластического деформирования в работе [294] выводится из тензорно-линейной связи между скоростью деформации и скоростью напряжений Труделла. Применяется мультипликативное разложение кинематических величин на упругие и пластические составляющие.

В статье [329] в рамках теории течения предлагается подход к формулировке определяющих соотношений упругопластичности для конечных деформаций, учитывающий анизотропию материала. Вводится понятие пластической метрики, позволяющее локально описывать зависимость неупругого поведения от истории нагружения; определяется выпуклая упругая область в пространстве локальных напряжений, порожденных пластическими силами, сопряженными с пластической метрикой. Обсуждаются возможные определения мер деформации и связанных пластических сил как функции напряжений. Теория распространяется на моделирование начальной упругой и начальной пластической анизотропии. В качестве примера рассмотрена трансверсальная анизотропия.

В пятой главе исходя из вариационного условия равновесного протекания процесса и вариационного термодинамического уравнения, предложенных в работах [2, 137, 233], даны постановки связанной

термомеханической задачи конечного деформирования анизотропных упругопластических тел. Рассмотрена постановка задачи исследования единственности и устойчивости упругопластических процессов конечного деформирования, основанная на использовании условий равновесного протекания процессов в вариационной форме [3]. Подтверждено, что бифуркация процесса конечного деформирования возможна как до достижения момента неустойчивости, так и в режиме неустойчивого деформирования. Такое поведение было обнаружено Шенли [254] при изучении упругопластического выпучивания стержней. Для малых начальных деформаций теория неединственности, с указанием способов отыскания наиранних точек равноактивной бифуркации была развита В. Д. Клюшниковым [91–93].

В работах А. А. Ильюшина и В. Г. Зубчанинова справедливо указано на необходимость различать понятия неединственности и неустойчивости в упругопластических процессах [72, 73, 84, 85]. Исследование послебифуркационного поведения пластин [92] при упругопластическом нагружении показало, что движение по побочной ветви может быть устойчивым до некоторого момента. Таким образом, известные результаты не противоречат полученным в § 17 главы 5 общим условиям неединственности и неустойчивости упругопластических процессов.

Глава 1

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

§ 1. Теория деформаций

1.1. Закон движения сплошной среды

В соответствии с гипотезой сплошности масса деформируемого тела полагается непрерывно распределенной и образует материальное пространство, которое считается евклидовым. Движение точек материального пространства рассматривается относительно евклидова отсчетного пространства. Расстояния между точками отсчетного пространства не изменяются со временем, поэтому будем считать его неподвижным. С материальным пространством связывается система координат x^1, x^2, x^3 с базисом $\vec{\mathrm{x}}_i = \dfrac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}^i}$, где $\vec{\mathrm{x}}$ — радиус-вектор точки материального пространства. В отсчетном пространстве вводится система координат x^i с базисом $\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$, где $\vec{x}$ — радиус-вектор точки отсчетного пространства (рис. 1.1).

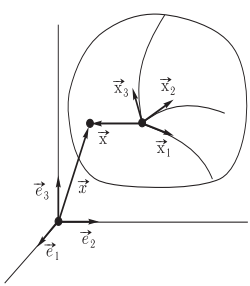

Рис. 1.1. Пространственная и материальная системы координат

Материальное пространство в начальный момент времени может быть ориентировано различным образом по отношению к неподвижному.

Обозначим координаты материальных точек в неподвижном базисе $\vec{e}_i$ в начальный момент $t = t_0$ через x_0^i, а координаты этих же точек в произвольный момент через x^i. Уравнение движения связывает начальные координаты материального пространства в неподвижном базисе с текущими координатами следующими выражениями:

$$x^i = \varphi^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t), \ i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где $x^i \big|_{t=t_0} = x_0^i$.

Уравнение (1.1) не дает полной информации о движении материального пространства, так как не указана начальная ориентация среды, т. е. связь между координатами x_0^i и x^i. Начальное положение определим уравнением

$$x_0^i = f(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3). \tag{1.2}$$

Координаты x_0^i называют лагранжевыми координатами. Из закона (1.2) следует, что в общем случае материальные и лагранжевы координаты не совпадают. Если выбрать материальную систему таким образом, чтобы $x_0^i = \mathrm{x}^i$, то материальные координаты совпадут с лагранжевыми. В процессе движения координатные линии материальной системы деформируются и образуют систему с координатами x_0^i и подвижным базисом $\vec{\mathfrak{s}}_i = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial x_0^i}$.

В случае совпадения материальных и лагранжевых координат векторы локального базиса определяются по формулам

$$\vec{\mathfrak{s}}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \mathrm{x}^i}.$$

В дальнейшем при рассмотрении кинематики сплошной среды полагаем, что лагранжевы и материальные координаты совпадают.

Движение материального континуума в координатной форме представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} x^1 &= \varphi^1\left(\mathrm{x}^1; \mathrm{x}^2; \mathrm{x}^3; t\right), \\ x^2 &= \varphi^2\left(\mathrm{x}^1; \mathrm{x}^2; \mathrm{x}^3; t\right), \\ x^3 &= \varphi^3\left(\mathrm{x}^1; \mathrm{x}^2; \mathrm{x}^3; t\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Перемещение $\vec{u}$, скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{w}$ точки M в момент t равны, соответственно,

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{\mathrm{x}}, \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \vec{w} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

или

$$\vec{u} = \vec{x}(\vec{\mathrm{x}}, t) - \vec{x}, \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}, \quad \vec{w} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}. \tag{1.4}$$

1.2. Кинематика бесконечно малой частицы материального пространства

Рассмотрим окрестность материальной точки C, радиус-вектор которой в начальный момент времени будет $\vec{x}_C$. Движение материальной окрестности точки C считается известным, если известно движение произвольной точки, сколь угодно близкой к точке C. Обозначим произвольную материальную точку в окрестности C через M. Вектор $\overrightarrow{CM}$ в начальный момент обозначим $\Delta\vec{\mathrm{x}}$. В соответствии с законом движения (1.1) получим закон движения произвольной точки M в следующем виде:

$$\vec{x}_M = \vec{x}_C + \Delta\vec{x} = \vec{\varphi}\left(\vec{\mathrm{x}}_C + \Delta\vec{\mathrm{x}}, t\right),$$

где $\vec{x}_C = \vec{\varphi}(\vec{\mathrm{x}}_C, t)$ — закон движения точки C.

Дополнительно к условию непрерывности (сплошности) материального пространства потребуем, чтобы закон движения был дифференцируемым по материальным координатам. Из условия существования дифференциала вектор-функции $\vec{\varphi}(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3, t)$ закон движения принимает вид

$$\vec{x}_C + \Delta\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\mathrm{x}}_C, t) + \Delta\mathrm{x}^i \left.\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\mathrm{x}^i}\right|_{\mathrm{x}^i=\mathrm{x}^i_C} + \vec{o}(\Delta\vec{\mathrm{x}}).$$

Исключая движение точки C, находим связь между относительными векторами точки M в начальном и текущем состояниях:

$$\Delta\vec{x} = \Delta\vec{\mathrm{x}} \cdot \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{\varphi} + \vec{o}(\Delta\vec{\mathrm{x}}), \tag{1.5}$$

где $\overset{\circ}{\vec{\nabla}} = \vec{e}^{\,\mathrm{x}}\dfrac{\partial}{\partial\mathrm{x}^i}$ — оператор Гамильтона в материальном базисе, $\vec{o}(\Delta\vec{\mathrm{x}})$ — вектор, длина которого есть малая более высокого порядка по сравнению с длиной вектора $\Delta\vec{\mathrm{x}}$, т. е.

$$\lim_{|\Delta\vec{\mathrm{x}}|\to 0}\frac{|\vec{o}|}{|\Delta\vec{\mathrm{x}}|} = 0.$$

Как известно, линейная относительно приращения аргумента $\Delta\vec{\mathrm{x}}$ часть приращения функции $\vec{\varphi}$ называется ее дифференциалом. Из (1.5) получаем дифференциальную форму закона движения,

$$d\vec{x} = d\vec{\mathrm{x}} \cdot \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{\varphi} = d\vec{\mathrm{x}} \cdot \mathbf{\Phi}\left(\vec{\mathrm{x}}, t\right). \tag{1.6}$$

По обратному признаку градиент векторного поля $\vec{\varphi}$ есть тензор, который обозначим $\mathbf{\Phi}$. Данный тензор называется аффинором деформации [81, 127, 128, 208, 209, 248]. В соответствии с законом (1.6) движение элементарного (сколь угодно малого) материального вектора $\Delta\vec{x}$ в окрестности некоторой точки $\vec{\mathrm{x}}$ будет известно, если известны девять компонент аффинора в данной точке.

По определению (1.6) преобразование элементарной материальной окрестности сплошной среды должно удовлетворять требованиям линейности в материальном евклидовом пространстве. Это означает, что параллельные в начальном состоянии элементарные материальные векторы остаются параллельными и в дальнейшем движении. Действительно, пусть элементы $d\vec{\mathrm{x}}_M$ и $d\vec{\mathrm{x}}_K$ параллельны, тогда $d\vec{\mathrm{x}}_M = \lambda d\vec{\mathrm{x}}_K$ при $t = t_0$. Из выражения (1.6) следует, что в произвольный момент $d\vec{x}_M = d\vec{\mathrm{x}}_M \cdot \mathbf{\Phi} = \lambda d\vec{\mathrm{x}}_K \cdot \mathbf{\Phi}$, но $d\vec{x}_K = d\vec{\mathrm{x}}_K \cdot \mathbf{\Phi}$ и, следовательно, $d\vec{x}_M = \lambda d\vec{x}_K$. Естественно, что элементарные материальные плоскости не искривляются при движении, т. е. остаются плоскостями. Свойству линейности движения в малом можно дать наглядную геометрическую трактовку, если рассмотреть движение материального элемента, имеющего в начальный момент форму прямоугольного параллелепипеда. Если мысленно вырезать такой параллелепипед в окрестности точки C, то в процессе движения его грани будут преобразовываться из прямоугольников в параллелограммы, состоящие из одних и тех же материальных частиц. Сам же параллелепипед станет в общем случае косоугольным.

Если в начальный момент вырезать элементарный материальный объем в форме шара, то в силу линейности преобразования (1.6) он будет преобразовываться в эллипсоид, главные оси которого в общем случае будут изменять свою ориентацию и совпадать с различными, взаимно ортогональными материальными волокнами. Процессы деформирования, в которых главные оси материального эллипсоида совпадают с одними и теми же элементарными материальными векторами, будем называть изотропными.

Как следует из закона (1.6), аффинор деформации в общем случае является функцией лагранжевых координат. Однако особый интерес представляют движения сплошной среды, при которых аффинор не меняется от точки к точке, т. е. не зависит от координат, а является лишь функцией времени. Такие движения называются однородными.

Рассмотрим связь между векторами материального базиса $\vec{e}_i$ в начальном состоянии и такими же векторами $\vec{\mathfrak{e}}_i$ в процессе движения. Из определения аффинора (1.6) следует, что элементарный материальный вектор $d\vec{x}_i = \vec{e}_i dx^i$ (по i не суммировать), направленный по касательной к координатной линии x^i, преобразуется в вектор $d\vec{x}_i = \vec{\mathfrak{e}}_i dx^i$ по закону

$$\vec{\mathfrak{e}}_i = \vec{e}_i \cdot \mathbf{\Phi} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \mathrm{x}^i}. \tag{1.7}$$

Из выражения (1.7) следует, что каждому моменту движения сплошной среды можно поставить в соответствие в общем случае криволинейную систему координат. Ее координатные линии образуются в результате движения начальных материальных координатных линий. Рассматриваемую систему называют сопутствующей (подвижной) материальной. Вектор $\vec{\mathfrak{e}}_i$ направлен по касательной к координатной линии и меняет свою ориентацию и длину при движении сплошной среды.

Найдем компоненты аффинора в отсчетном базисе $\vec{e}_i$, совпадающем с начальным положением подвижного базиса. Из (1.7) получим следующие выражения ковариантных компонент:

$$\Phi_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \vec{e}_j = \vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \vec{e}_j,$$

а соответствующее диадное представление аффинора примет вид

$$\mathbf{\Phi} = \Phi_{ij}\vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,j} = \vec{e}^{\,i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \mathrm{x}^i} = \vec{e}^{\,i}\vec{\mathfrak{z}}_i. \tag{1.8}$$

Рассмотрим закон изменения контравариантных векторов сопутствующего базиса. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости выражения

$$\vec{\mathfrak{z}}^{\,j} = \Phi^{-1} \cdot \vec{e}^{\,j}. \tag{1.9}$$

Действительно, перемножая скалярно (1.7) и последнее выражение, получим

$$\vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \vec{\mathfrak{z}}^{\,j} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \vec{e}^{\,j} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}^{\,j} = \delta_i^j.$$

Найдем диадное представление обратного аффинора. На основании (1.8) получим

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \vec{\mathfrak{z}}^{\,j}\vec{e}_j.$$

Справедливость этого представления подтверждается выполнением условия

$$\vec{e}^{\,i}\vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \vec{\mathfrak{z}}^{\,j}\vec{e}_j = \delta_i^j\vec{e}^{\,i}\vec{e}_j = \mathbf{E}.$$

Найдем выражение компонент аффинора, полагая отсчетный базис декартовым; тогда из (1.8) получим следующее диадное разложение:

$$\mathbf{\Phi} = \frac{\partial x^j}{\partial \mathrm{x}^i}\vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,j}.$$

Отсюда следуют выражения для компонент аффинора в декартовых координатах:

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \mathrm{x}^i}.$$

Подставляя следующее из (1.4) выражение

$$\vec{x}(\vec{\mathrm{x}}, t) = \vec{\mathrm{x}} + \vec{u}(\vec{\mathrm{x}}, t)$$

в формулу (1.7), находим связь между аффинором и полем перемещений:

$$\mathbf{\Phi}(\vec{\mathrm{x}}, t) = \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{x} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u}. \tag{1.10}$$

Из этого выражения следует, что аффинор деформации линейно связан с градиентом перемещений.

Из линейной алгебры известно [131], что произвольный линейный оператор в E_3 можно представить произведением симметричного

и ортогонального операторов. Следовательно, аффинор деформации можно представить следующими разложениями:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}, \tag{1.11}$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}^\top$ — левая мера искажения, $\mathbf{V} = \mathbf{V}^\top$ — правая мера искажения [237, 248].

Из выражения (1.11) находим выражения для мер искажения через аффинор деформации:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi}^\top, \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{\Phi}^\top \cdot \mathbf{\Phi}. \tag{1.12}$$

Ортогональный тензор $\mathbf{R}$ $(\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top)$ определяется из следующих выражений:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{V}^{-1}. \tag{1.13}$$

Связь между правой и левой мерами искажения на основании разложения (1.11) принимает вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}.$$

В случае изотропных процессов разложениям (1.11) можно придать наглядный геометрический смысл. Первое разложение представляется как чистая деформация, сводящаюся к растяжению и сжатию вдоль главных осей меры $\mathbf{U}$ и последующему повороту частицы как абсолютно твердого тела. Второе разложение представляет как поворот и последующую деформацию — то же самое движение.

1.3. Описание процесса деформации материальной частицы

Квадрат длины элементарного материального вектор-волокна в начальный момент времени определяется следующим выражением:

$$d\,\mathrm{x}^2 = d\,\vec{\mathrm{x}} \cdot d\,\vec{\mathrm{x}} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j d\,\mathrm{x}^i d\,\mathrm{x}^j = g_{ij} d\,\mathrm{x}^i d\,\mathrm{x}^j. \tag{1.14}$$

Здесь $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ определяются как компоненты метрического тензора, отнесенные к отсчетному базису. Диадное представление метрического тензора в начальном состоянии имеет вид

$$\mathbf{g} = g_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j, \quad d\,\mathrm{x}^2 = d\vec{\mathrm{x}} \cdot \mathbf{g} \cdot d\,\vec{\mathrm{x}}. \tag{1.15}$$

Аналогичным образом на основании материального базиса (1.7) вводится метрический тензор материального пространства, отнесенный к начальному базису. В этом случае квадрат материального вектор-волокна в текущем состоянии

$$d\,x^2 = \vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \vec{\mathfrak{z}}_j d\,\mathrm{x}^i d\,\mathrm{x}^j = G_{ij} d\,\mathrm{x}^i d\,\mathrm{x}^j = d\vec{\mathrm{x}} \cdot \mathbf{G} \cdot d\,\vec{\mathrm{x}}. \tag{1.16}$$

Текущий метрический тензор материального пространства $\mathbf{G} = G_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$ называется мерой деформации Коши–Грина [127, 128].

Отметим, что из (1.15) и (1.16) следует, что мера Коши–Грина должна удовлетворять условию

$$\mathbf{G}\,\big|_{t=t_0} = \mathbf{g}.$$

Наряду с представлением метрического тензора материального пространства в основном базисе возможны его представления в контравариантном и смешанных базисах:

$$\mathbf{G} = G^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = G^{i\cdot}_{\cdot j}\vec{e}_i\vec{e}^{\,j} = G^{\cdot i}_{j\cdot}\vec{e}^{\,j}\vec{e}_i.$$

В начальный момент времени выполняется условие

$$G^{\cdot j}_{i\cdot}\,\big|_{t=t_0} = g^{\cdot j}_{i\cdot} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}^{\,j} = \delta^j_i,$$

из которого следует, что метрический тензор при $t = t_0$ совпадает с единичным тензором $\mathbf{E} = \delta^j_i\vec{e}^{\,i}\vec{e}_j$.

Из основного кинематического соотношения (1.6) и выражений (1.16) находим выражение меры Коши–Грина через аффинор деформации:

$$\begin{gathered} dx^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = d\vec{\mathrm{x}}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{\Phi}^{\top}\cdot d\vec{\mathrm{x}} = d\vec{\mathrm{x}}\cdot\mathbf{G}\cdot d\vec{\mathrm{x}}; \\ \mathbf{G} = \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{\Phi}^{\top} = \mathbf{U}^2. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Таким образом, мера Коши–Грина совпадает с квадратом левой меры искажения. Отметим, что из выражения (1.16) следует, что связанная с мерой Коши–Грина квадратичная форма положительно определена.

На основании аффинора деформаций и тензоров, входящих в разложение (1.11), в механике сплошных сред введены меры и тензоры конечных деформаций [127, 128, 133, 200, 209, 248, 249]:

$$\begin{aligned} &\text{мера деформаций Коши–Грина —} && \mathbf{G} = \mathbf{U}^2, \\ &\text{мера деформаций Альманси —} && \mathbf{A} = \mathbf{V}^{-2}, \\ &\text{тензор деформаций Коши–Грина —} && \boldsymbol{\varepsilon} = 0{,}5(\mathbf{G} - \mathbf{g}), \\ &\text{тензор деформаций Альманси —} && \boldsymbol{\alpha} = 0{,}5(\mathbf{g} - \mathbf{A}), \\ &\text{мера деформаций Фингера —} && \mathbf{F} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{A}^{-1}, \\ &\text{тензор Генки —} && \mathbf{\Gamma} = \ln\mathbf{U}, \\ &\text{«повернутый» тензор Генки —} && \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{R}} = \ln\mathbf{V}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Как показано выше, мера Коши–Грина в начальный момент времени совпадает с единичным тензором. Во многих случаях удобнее измерять деформации тензором, который в начальный момент совпадает с нулевым. Такой тензор называется тензором деформаций Коши–Грина и определяется как полуразность метрического тензора в текущий и начальный моменты:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{g}).$$

Из этого определения находим связь между тензором деформации и левой мерой искажения:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^2 = 2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{g}. \tag{1.19}$$

На основании связи аффинора деформаций с полем перемещений (1.10) находим выражение через поле перемещений меры и тензора Коши–Грина,

$$\mathbf{G} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi}^\top = \left(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u}\right) \cdot \left(\mathbf{E} + \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\right) = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} + \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} \cdot \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} + \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} \cdot \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\right).$$

В декартовых координатах последнее соотношение принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} \cdot u_{j,k}).$$

Здесь обозначено $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}^j}$.

Отметим, что выражения меры и тензора Коши–Грина нелинейны относительно поля перемещений, так как содержат скалярные произведения градиентов. В отличие от $\mathbf{G}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ левая мера искажения и тензор поворота не могут в общем случае быть представлены через градиент перемещения в явном виде.

Выделим в начальный момент времени элементарный материальный прямоугольный параллелепипед; оси отсчетной и начальной материальной декартовой систем координат расположим параллельно ребрам параллелепипеда таким образом, что три материальных вектор-волокна $\vec{e}_1 dx^1$, $\vec{e}_2 dx^2$, $\vec{e}_3 dx^3$ взаимно ортогональны и исходят из одной точки. Покажем, что изменение длины этих волокон и углов между ними полностью определяются компонентами тензора Коши–Грина и не зависит от тензора поворота. В частности, рассмотрим изменение длины 1-го волокна. Из формулы (1.17) с учетом (1.19) получим

$$(dx^1)^2 = (1 + 2\varepsilon_{11})(d\mathrm{x}^1)^2.$$

Отсюда квадрат отношения длины в текущем и начальном состояниях имеет вид

$$\left(\frac{dx^1}{d\mathrm{x}^1}\right)^2 = 1 + 2\varepsilon_{11} = G_{11}.$$

Из последней формулы следует, что диагональные компоненты тензора Коши–Грина связаны с изменением длин соответствующих волокон. Если некоторая компонента тензора деформации ε_{ii} — тождественный ноль, то соответствующее волокно не изменяет свою длину.