М.А. Маталыцкий
Г.А. Хацкевич

Теория вероятностей и математическая статистика

М.А. Маталыцкий
Г.А. Хацкевич

Теория вероятностей и математическая статистика

Утверждено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебника
для студентов учреждений
высшего образования
по физико-математическим
специальностям

Минск
«Вышэйшая школа»
2017

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
М33

Рецензенты: кафедра теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *Н.Н. Труш*, доктор физико-математических наук, профессор *Г.А. Медведев*)

Маталыцкий, М. А.

М33 Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2855-8.

Приведены определения вероятности случайных событий и соотношения, связанные с условными вероятностями и схемой Бернулли; типы случайных величин, их числовые и функциональные характеристики; закон больших чисел и центральная предельная теорема; сведения о марковских случайных процессах и цепях Маркова с дискретным и непрерывным временем, стохастических интегралах и дифференциальных уравнениях. Рассмотрены вопросы применения случайных процессов; основные распределения, применяемые в статистике; проверка простых и сложных гипотез; последовательный и дисперсионный анализ; линейные регрессионные модели. Даны решения более 130 различных типов примеров и более 800 задач для самостоятельного решения.

Для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям. Будет полезен магистрантам и аспирантам, преподавателям, а также научным и практическим работникам.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-985-06-2855-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия значительно увеличился объем преподавания дисциплин, использующих вероятностные и статистические методы. В высших учебных заведениях для студентов ряда математических («Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика», «Актуарная математика», «Математическая экономика», «Компьютерная безопасность») и физических специальностей читается годовой или полугодовой курс теории вероятностей и математической статистики. Курс состоит из трех основных разделов: элементы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики, по которым написан данный учебник. Он подготовлен на базе лекций и методических разработок по курсу теории вероятностей и математической статистики, читаемому авторами для студентов различных физико-математических специальностей.

Отличительной особенностью учебника является то, что кроме основательного рассмотрения понятий и методов современной теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики он содержит большое количество разнообразных теоретических примеров и задач различной степени трудности, многие из которых снабжены ответами. Это позволяет использовать учебник не только для чтения лекций, но и для проведения практических занятий.

Структура изложения курса такова, что представленный материал может одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Много внимания уделено вопросам применения вероятностных методов в различных областях. Основные теоремы приведены с полными доказательствами, которые могут быть использованы при доказательстве различных утверждений, сформулированных в задачах. В большинстве параграфов есть простые задачи, которые сводятся к прямому применению основных формул и приемов. Также присутствуют достаточно сложные задачи, решения которых содержат важные идеи и связаны с аккуратным проведением математических выкладок и практическими применениями. Такие задачи отмечены звездочкой, они могут служить началом курсовой работы. В учебнике представлены задачи «прикладного» характера, что позволяет не только обучить студентов теоретическим основам, но и привить навыки вероятностно-статистического моделирования реальных явлений.

При составлении задач был использован ряд отечественных и зарубежных учебников и задачников, приведенных в списке литературы, некоторые из задач составлены авторами.

Первые два раздела написаны профессором М.А. Маталыцким, третий раздел – профессором Г.А. Хацкевичем.

Предназначен для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям, также будет полезен студентам, магистрантам, аспирантам, специалистам, желающим познакомиться с основными методами и результатами теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

Выражаем благодарность рецензентам, сделавшим ряд полезных замечаний.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Теорию вероятностей можно определить как науку, изучающую случайные события. Случайные события как они понимаются в теории вероятностей обладают рядом характерных особенностей, в частности все они происходят в массовых явлениях.

Первые вероятностные задачи были связаны с азартными играми. В XVIII в. вероятностными задачами занимались Б. Паскаль, П. Ферма, Я. Бернулли (автор закона больших чисел). В XVIII в. де Муавр сформулировал первое предельное утверждение, относящееся позже к центральной предельной теореме, а Т. Байес предложил свою знаменитую формулу, заложив тем самым фундамент развитой позднее теории оценивания. Дальнейшее развитие теории вероятностей во второй половине XVIII в. и первой половине XIX в. связано с именем П. Лапласа. Его классический трактат «Theorie Analytique des Probabilities» содержит оригинальные результаты собственных исследований и предшественников. К этому же периоду относятся труды К. Гаусса и С. Пуассона. Во второй половине XIX в. для развития теории вероятностей большое значение имели труды П.Л. Чебышева.

Начало XX в. связано с наиболее значительным развитием теории вероятностей. Разработаны ее математические основы, определены связи с другими разделами математики и развит аналитический аппарат. Существенно расширилась область применения в физике, технике и других областях.

Первое определение вероятности ввел П. Лаплас. Однако его определение требовало определенных логических оговорок, и область применения была довольно узкой. Введение Ж. Бюффоном геометрической вероятности было шагом вперед для обоснования основ теории вероятностей, но парадоксы Э. Бертрана свидетельствовали о существовании пробелов в ее основных понятиях.

Разработкой математических основ теории вероятностей занимались С.Н. Берштейн, В.И. Гливенко, А.Н. Колмогоров, К. Мизес, Г. Штейнгауз. Совместно события и их вероятности как нормированную булевскую алгебру определил В.И. Гливенко. Вероятность как меру Лебега, определенную в борелевском поле измеримых подмножеств отрезка [0, 1], рассматривал Г. Штейнхауз. Понятие вероятности как нормированной меры, определенной в минимальном борелевском поле подмножеств некоторого множества, называемого множеством элементарных событий, введено А.Н. Колмогоровым.

Теоремы П. Леви о характеристических функциях и разработка теории безгранично делимых законов распределения позволили найти предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, В. Феллер, А.Я. Хинчин). Утверждения А.Я. Хинчина и А.Н. Колмогорова о законе повторного логарифма и усиленном законе больших чисел углубили результаты, касающиеся закона больших чисел.

Следует отметить, что теория вероятностей постоянно развивается из потребностей практики. В абстрактной форме она отражает закономерности, присущие случайным событиям массового характера. Эти закономерности играют исключительно важную роль в физике, технике (в частности, в компьютерной), экономике и других областях естествознания.

При изучении различных явлений действительности люди сталкиваются с процессами, предсказать развитие которых заранее нельзя. Случайные процессы – удобная математическая модель функций времени, значениями которых являются случайные величины. Например, число запросов, поступающих в единицу времени на центральный сервер информационно-компьютерной сети, будучи случайной величиной, зависит от времени суток; расход электроэнергии в единицу времени – также функция времени со случайными значениями; координата отдельной молекулы в газе, заключенном в сосуд, меняется со временем и принимает случайные значения. Таким образом, можно сказать, что случайный процесс – это семейство случайных величин, зависящих от времени.

Теория случайных процессов, возникшая в результате построения математических моделей реальных физических процессов, представляет собой наиболее содержательную и более всего используемую в приложениях часть теории вероятностей. Она находит многочисленные применения в физике, технике, экономике, биологии, медицине и других дисциплинах, а также в различных разделах математики.

Приведем некоторые исторические замечания. Первое математическое описание случайного процесса, в настоящее время называемого винеровским или процессом броуновского движения, дал Л. Башелье в 1900 г. в докладе, представленном им Парижской академии. Он предложил использовать этот процесс в качестве модели колебаний цены активов, стремился получить аналитические выражения для стоимости различных типов опционов и сравнить их с наблюдаемыми рыночными ценами опционов. Опцион является примером финансовой производной и дает его владельцу право купить указанное число долей акций по определенной цене в указанную дату или до нее.

Вообще понятие случайного процесса возникло в XX в. и связано с именами А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина, Е.Е. Слуцкого, Н. Винера. То, что теория случайных процессов принадлежит к категории наиболее быстро развивающихся математических дисциплин, в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой.

В 1905 г. двумя известными физиками М. Смолуховским и А. Эйнштейном была разработана теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок. Она привела математику к порогу создания теории случайных процессов. В исследованиях датского ученого А.К. Эрланга была начата новая важная область поисков, связанных с изучением загрузки телефонных сетей. Эти работы оказали значительное влияние не только на решение чисто телефонных задач, но и на формирование элементов теории случайных процессов, в частности процессов гибели и размножения. Такие процессы позднее применялись при исследовании динамики биологических популяций, именно от задач биологии и пошло наименование частного типа случайных процессов.

Известные физики М. Планк и А. Фоккер в 1914 г. начали изучать явления диффузии, используя средства теории вероятностей. Основатель кибернетики Н. Винер в середине 20-х гг. XX в. при изучении броуновского движения ввел в рассмотрение процессы, названные винеровскими. Следует также отметить работы русского математика А.А. Маркова по изучению цепных зависимостей (цепи Маркова) и Е.Е. Слуцкого по теории случайных функций.

В 1931 г. была опубликована большая статья А.Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей», в которой были заложены основы теории марковских процессов: в ней получены прямые и обратные дифференциальные уравнения, которые управляют вероятностями перехода случайных процессов без последействия. В этой же работе был дан набросок теории скачкообразных процессов без последействия, подробное развитие которой позднее (1936) было дано В. Фелером, получившим интегро-дифференциальное уравнение для скачкообразных марковских процессов. В 1934 г. в работе А.Я. Хинчина осуществлено построение основ стационарных случайных процессов на базе физических задач. Он ввел понятие стационарного процесса в узком и широком смыслах. Вышеупомянутые работы следует считать началом построения общей теории случайных процессов, они послужили основой для последующих исследований Г. Крамера, Г. Вальда, А.Н. Колмогорова и многих других известных ученых.

Приведем ряд основных задач теории случайных процессов, большинство из которых рассматривается в данном учебнике.

1. Построение математической модели, допускающее строгое или формальное определение случайного процесса, и исследование общих свойств этой модели.

2. Классификация случайных процессов. Существующая классификация в теории случайных процессов заключается в выделении из всей совокупности таких процессов некоторых классов, допускающих более или менее конструктивное описание. Каждый класс характеризуется тем, что достаточно дополнительно задать лишь конечное число функциональных характеристик, чтобы выделить из всего класса отдельный случайный процесс. Иногда рассматривают классы процессов, допускающих единообразное решение определенного набора задач. Можно отметить следующие широкие классы процессов: марковские процессы, включая цепи Маркова; процессы с конечными моментами второго порядка (гильбертовы процессы); процессы с независимыми приращениями; стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы, в частности гауссовский и винеровский; эргодические процессы.

3. Отыскание для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, позволяющего находить вероятность характеристики процессов (тесно связано с классификацией случайных процессов). Для простейших вероятностных характеристик такой аппарат создан. Он использует, как правило, теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, а также интегро-дифференциальные и интегральные уравнения, разностные уравнения, преобразования Фурье.

4. Изучение различных преобразований случайных процессов. Эти преобразования используются для того, чтобы с их помощью изучать сложные процессы путем сведения их к более простым. К такой задаче можно отнести и анализ стохастиче-

ских дифференциальных и интегральных уравнений, в которые входят случайные процессы.

5. Определение значений некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого же процесса также играет важную роль в формировании ряда разделов теории случайных процессов. Примером такой задачи является задача предсказания, позволяющая определить значение процесса в некоторые будущие моменты времени, наблюдая процесс в течение конкретного промежутка времени.

Кратко опишем некоторые основные области применения различных классов случайных процессов.

Марковские процессы широко используются при разработке математических моделей информационно-компьютерных систем и сетей в математической финансовой экономике, математической биологии, теории каскадов космических частиц. В этой же теории применяются процессы с независимыми приращениями. Стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы широко распространены в радиоэлектронике и теории информации, а гауссовские процессы – также в радиоэлектронике и молекулярной теории газов.

Следует отметить, что в последнее время теория вероятностей и случайных процессов превратилась в стройную математическую дисциплину с собственными проблемами и методами доказательств. Выяснилось, что наиболее существенные проблемы этой теории служат делу решения многочисленных прикладных задач. Методы теории вероятностей и случайных процессов находят все новые области применения. Кроме того, ни одна из естественных наук и многие гуманитарные науки не избежали влияния данной теории.

Математическая статистика является аксиоматически обоснованной математической наукой, которая, придавая теоретическое обоснование результатам статистической отрасли, обеспечивает информационную поддержку органам управления социально-экономическим развитием любой страны. Однако следует заметить, что еще в начале XX в. этот признанный в современной научной классификации раздел математической науки относился к эмпирическому и экспериментальному направлениям. Заслуга в признании статистики математической наукой принадлежит прежде всего английскому математику К. Пирсону. Трудно переоценить его вклад в разработку математического аппарата статистики, содержащего теорию корреляции и критерии согласия. В дальнейшем развитии математической статистики необходимо упомянуть Р. Фишера (дисперсионный анализ), И. Фишера (теория статистических индексов), А.А. Чупрова, Н.С. Четверикова, Е.Е. Слуцкого (статистический анализ временных рядов). В становление математической статистики большой вклад внесли А.Н. Колмогоров, Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов, Д.М. Чибисов.

РАЗДЕЛ I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Случайные события и соотношения между ними

Типичной формой закона, устанавливаемого научной теорией, является следующая: создание условий A неизбежно приводит к B. Цель теории – определение условий, при которых какое-либо интересующее нас событие заведомо происходит или заведомо не происходит, т.е. эти условия могут быть выражены по одной из двух схем:

а) если осуществляется комплекс условий A, то с достоверностью происходит событие B;

б) если осуществляется комплекс условий A, то событие B произойти не может.

В первом случае событие B по отношению к комплексу условий A называется достоверным, а во втором – невозможным. Такие события принято называть детерминированными. Они с неизбежностью следуют после осуществления соответствующего комплекса условий. Другими словами, комплекс условий A в этом случае однозначно определяет событие B. Событие B, которое при осуществлении комплекса условий A иногда происходит, а иногда не происходит, называется случайным по отношению к данному комплексу условий.

Дадим строгое определение случайного события, для чего приведем понятие об элементарных событиях.

Определение. Возможные события, порождаемые комплексом условий, называются элементарными:

а) если они различны (т.е. осуществление одного означает неосуществление любого другого);

б) после выполнения комплекса условий обязательно происходит одно из них.

Заметим, что эти условия определяют элементарные события неоднозначно: даже в одной и той же задаче они могут быть определены по-разному. Обозначим через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ пространство элементарных событий.

Определение. Любое объединение элементарных событий называется случайным событием, $B \subseteq \Omega$.

Событие B осуществляется тогда, когда происходит одно из элементарных событий $\omega \in B$. В этом смысле пространство

Ω может рассматриваться тоже как событие. Одно из элементарных событий происходит всегда, следовательно, и событие Ω происходит всегда, поэтому оно достоверное. Событие, не содержащее ни одного элементарного события, является невозможным и обозначается $\varnothing$.

Таким образом, мы пришли к описанию случайных событий как множеств, получающихся объединением элементарных событий. В связи с этим для определения соотношений между случайными событиями в теории вероятностей принят язык теории множеств, который приобретает своеобразную вероятностную трактовку. Поясним некоторые из них с помощью табл. 1.1.

Таблица 1.1. **Соотношения для множеств и случайных событий**

Язык теории множеств	Соотношения между событиями на языке теории множеств
$A = B \cup C$	Событие A (объединение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий B и C
$A = B \cap C$	Событие A (пересечение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходят и событие B, и событие C
$B \cap C = \varnothing$	События B и C являются несовместными. Если событие C происходит, то событие B не происходит
$C \subset B$	Событие C влечет за собой событие B
$A = \Omega \setminus B$, $(A = \overline{B})$	Событие A является дополнительным (противоположным) по отношению к событию B. Событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие B
$A = B \setminus C$	Событие A происходит тогда и только тогда, когда событие B происходит, а событие C не происходит

Соотношения между событиями наглядно иллюстрируются на диаграммах Вьенна – Эйлера, где пространство Ω изображено в виде квадрата, внутренними точками являются элементарные события: событие B – круг, событие C – треугольник, событие A – заштрихованные области. Приведем диаграммы (рис. 1.1) для соотношений между событиями, представленными в табл. 1.1.

Для анализа соотношений между случайными событиями могут оказаться полезными следующие соотношения.

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$. Эти равенства следуют из определений.

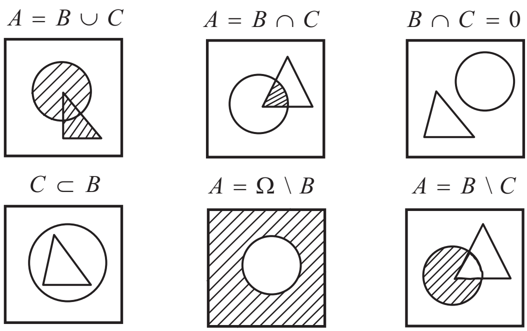

Рис. 1.1. Диаграммы Вьенна – Эйлера для соотношений между событиями, представленными в табл. 1.1

2. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$. Доказательство следует из следующей цепочки импликаций:

$$\omega \in \overline{A \bigcup B} \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A}, \omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

и, наоборот,

$$\omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B} \Rightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \bigcup B}.$$

3. $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

4. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$. Это следует из того, что если $\omega \in \overline{B}$, то $\omega \notin B$, поэтому $\omega \notin A$ и, значит, $\omega \in \overline{A}$.

Из соотношений 2–4 следует, что если задана некоторая конструкция из событий, ее дополнение можно выразить, заменив в ней все события на противоположные, а символы объединения, пересечения и включения – на символы пересечения, объединения и символ, обратный к включению, соответственно. Это свойство известно под названием закона де Моргана, например $\overline{(A \bigcup B) \bigcap C} = (\overline{A} \bigcap \overline{B}) \bigcup \overline{C}$.

1.2. Вероятностные модели. Классическое определение вероятности

Любому случайному событию $A \subseteq \Omega$ поставим в соответствие действительное неотрицательное число $P(A)$, которое будем называть вероятностью события A. Положим, что $P(0) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Если Ω состоит из конечного множества элементарных событий, $\Omega = \left\{\omega_k, k = \overline{1, N}\right\}$, и $A = \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{j_k}$, $n < N$, то естественно предположить, что $0 = P(0) < P(A) < P(\Omega) = 1$. Если все ω_k, $k = \overline{1, N}$, равновозможны, то естественно также предположить, что вероятность события A пропорциональна числу элементарных событий, которое оно объединяет,

$$P(A) = pn,$$

где коэффициент пропорциональности p можно найти из условия $P(\Omega) = 1$, т.е. при $n = N$ получаем $pN = 1$, откуда следует, что $p = \frac{1}{N}$ и $P(A) = \frac{n}{N}$. К такому же результату можно прийти, если принять, что $P(\omega_k) = p$, $k = \overline{1, N}$, где p имеет смысл вероятности элементарного события, и выполняется свойство аддитивности

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \omega_{j_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\omega_{j_k}),$$

поскольку в этом случае снова имеем $P(A) = pn$. Итак, в данном случае $p(\omega_k) = p = \frac{1}{N}$, $k = \overline{1, N}$. Условие

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{k=1}^{N} \omega_k) = \sum_{k=1}^{N} P(\omega_k) = 1$$

называется условием нормировки.

Говорят, что определена *вероятностная модель*, если указано множество Ω всех возможных элементарных событий и на этих элементарных событиях найдена вероятностная функция $P(\omega)$. Для рассмотренного выше случая вероятностная модель определяется следующим образом:

$$\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_N\right\};$$

$$P(\omega) = \left\{\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right\}.$$

Эта вероятностная модель называется *классической*. В ней определение вероятностей событий устанавливается следующим образом.

Определение (*классическое определение вероятности*). Пусть пространство элементарных событий состоит из конечного числа равновозможных элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ и пусть случайное событие A состоит из n элементарных событий: $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_n}\}, \omega_{j_i} \in \Omega, i = \overline{1, n}$. Тогда вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Данная формула называется формулой классической вероятности.

Пример 1.1. Монету бросают дважды. Необходимо найти вероятность того, что хотя бы 1 раз монета упадет гербом вверх.

Решение. Пространством элементарных событий является множество $\Omega = \{\text{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}\}$. Здесь ГЦ означает, что при первом бросании появился герб, а при втором – цифра. Таким образом, $N = 4$. Пусть A = {хотя бы 1 раз появится герб}, тогда

$$A = \{\text{ГГ, ГЦ, ЦГ}\} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}.$$

Пусть теперь пространство Ω состоит из счетного числа элементарных событий, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$. В этом случае надо считать, что либо $P(\omega_k)$ неодинаковы, либо свойство аддитивности не выполняется. В противном случае, так как Ω неограничено, мы бы получили $P(\omega_k) = 0, \forall k = 1, 2, ...$. Оказывается, что если выбрать первую возможность, то получающаяся схема является целесообразной и непротиворечивой. Поэтому в данном случае полагают $P(\omega_k) = p_k, k = 1, 2, ...$. Свойство аддитивности при этом сохраняется, а условие нормировки имеет вид

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Говорят, что задана *дискретная вероятностная модель*, если задано дискретное вероятностное множество элементарных событий (счетное или конечное) и для каждого из этих событий определена вероятность, т.е. заданы

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\};$$

$$P(\omega) = \{p_1, p_2, ..., p_k, ...\}.$$

1.3. Элементы комбинаторики

Основной проблемой при решении задач с использованием формулы классической вероятности является подсчет числа способов, которыми могло произойти то или иное событие. В связи с этим такие задачи решаются, как правило, методами комбинаторики.

Часто применяется следующее очевидное правило (основной принцип комбинаторики): если некий выбор A можно осуществить m различными способами, а некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (A или B) можно осуществить $mn(m+n)$ способами. При этом классическое определение вероятности можно дать другими словами.

Определение. Рассмотрим эксперимент, имеющий N одинаково возможных исходов (любой мыслимый результат эксперимента называется элементарным событием). Предположим, что событию A благоприятствует n из этих исходов (оно состоит из n элементарных событий). Тогда справедлива формула классической вероятности.

При решении задач часто используют размещения, перестановки и сочетания. Если дано множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, то размещением (сочетанием) из n элементов по k называется любое упорядоченное (неупорядоченное) подмножество из k элементов множества Ω. При $k = n$ размещение называется перестановкой из n элементов.

Пусть дано множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.Размещениями из трех элементов этого множества по два являются (ω_1, ω_2), (ω_1, ω_3), (ω_2, ω_3), (ω_2, ω_1), (ω_3, ω_1), (ω_3, ω_2), сочетаниями – (ω_1,ω_2), (ω_1, ω_3), (ω_2, ω_3). Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, а размещения – либо самими элементами, либо порядком их следования.

Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

где A_n^k – число размещений из n элементов по k; $P_k = k!$ – число перестановок из k элементов. Справедливость соотношения

$A_n^k = k!C_n^k$ следует из того, что число всех k-элементных подмножеств множества Ω равно C_n^k и каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами.

Рассмотрим перестановки с повторениями. Пусть из элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$ образуются конечные последовательности, содержащие n членов, в которых ω_1 повторяется k_1 раз, $\omega_2 - k_2$ раза, ..., $\omega_i - k_i$ раз, $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = n$. Такие последовательности называются перестановками с повторениями. Две перестановки считаются одинаковыми, если они совпадают порядком расположения элементов, и считаются различными, если у них различный порядок расположения элементов. Число различных перестановок с повторениями равно

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_i) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_i!}.$$

Пример 1.2. Какова вероятность того, что из 6 отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (игра 6 из 49) k чисел будут выигрышными ($k = \overline{0, 6}$)?

Решение. В данном примере эксперимент состоит в том, что случайным образом отмечаются 6 чисел из 49 в карточке «Спортлото», значит, равновозможными элементарными событиями будут наборы из 6 отмеченных чисел. Для определения того, произойдет или не произойдет событие A (среди отмеченных чисел k чисел выигрышные), порядок чисел несуществен, поэтому в качестве равновозможных элементарных событий достаточно рассматривать неупорядоченные наборы 6 чисел из 49. Следовательно, число равновозможных элементарных событий равно C_{49}^6. Событие A состоит из наборов 6 чисел, k из которых выигрышные, а $(6-k)$ проигрышные. Набор из k выигрышных чисел можно выбрать C_6^k способами, а набор $(6-k)$ проигрышных чисел можно выбрать C_{43}^{6-k} способами. Тогда по основному принципу комбинаторики набор из k выигрышных и $(6-k)$ проигрышных чисел можно выбрать $C_6^k C_{43}^{6-k}$ способами, следовательно,

$$P(A) = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}.$$

Например, для $k = 6$ имеем $P(A) \approx (14 \cdot 10^6)^{-1}$.

Задачи к § 1.1–1.3

1.1. Докажите равенства для случайных событий: а) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$; б) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.

1.2. Когда возможны приведенные ниже равенства?

а) $A \cup B = A$; б) $A \cup B = \overline{A}$; в) $A \cup B = A \cap B$; г) $A \cap B = A$; д) $A \cap B = \overline{A}$.

1.3. Упростите выражения: а) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$; б) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

1.4. Докажите равенства: а) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$; б) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.

1.5. Из множества студентов, присутствующих на лекции по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A состоит в том, что выбранный студент закончил среднюю школу с медалью, B – победитель областной олимпиады, C – выпускник лицея. Опишите события $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \setminus (A \cap B)$. При каком условии будет справедливо равенство $A \cap B \cap C = A$? Провертье справедливость соотношения $A \cap C \subseteq B$.

1.6. Бросается игральный кубик. Найдите вероятность того, что появившееся число очков кратно 3.

1.7. Игральный кубик бросается дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит 4.

1.8. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определите вероятность того, что среди них l выигрышных.

1.9. Случайным образом k человек рассаживаются за круглым столом ($k > 2$). Найдите вероятность того, что 2 фиксированных лица A и B окажутся рядом.

1.10. Определите вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым 5-значным числом, начиная с 00001.

1.11. На 10 карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найдите вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

1.12. Телефонный номер в г. Гродно – из 6 цифр. Найдите вероятность того, что все цифры различны.

1.13. Какова вероятность того, что 4-значный номер случайно взятого автомобиля в г. Гродно имеет все различные цифры?

1.14. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на восьмом этаже.

1.15. На полке в случайном порядке расставлено 20 книг, среди которых находится трехтомник Я. Купалы. Найдите вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.16. Некоторые жители г. Гродно и других городов 6-значный номер троллейбусного или автобусного билета считают «счастливым», если сумма первых его 3 цифр совпадает с суммой последних 3 цифр. Найдите вероятность получить «счастливый» билет.

1.17. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ кусочно-линейных функций вида

$$f(0);\, f(x) = f(i) + \alpha_i (x - i);\; i \leqslant x \leqslant i + 1;\; 0 \leqslant i \leqslant n - 1,$$

где α_i принимает значения 1 или –1. Найдите вероятность того, что: а) наудачу выбранная функция из множества $\mathcal{F}$ принимает в точке n значение k; б) наудачу выбранная функция из $\mathcal{F}$ имеет в полуинтервале $(0, n]$ i корней; в) для случайно выбранной функции $f \in \mathcal{F}$

$$\int_0^n f(x)dx = 0.$$

1.18. В партии, состоящей из N изделий, имеется k дефектных. В процессе приемного контроля из партии выбирается n изделий. Найдите вероятность того, что из них ровно m изделий будут дефектными.

1.19. Из 30 экзаменационных вопросов студент знает 20. Какова вероятность того, что он правильно ответит на 2 вопроса из 2?

1.20. В N ячейках случайно размещены n частиц. Чему равна вероятность того, что в i-ю ячейку попало n_i частиц?

1.21. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 3 карты. Найдите вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

1.22. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 6 карт. Определите вероятность того, что среди этих карт: а) будет дама пик; б) будут карты всех мастей.

1.23. Полная колода карт (52 карты) делится пополам. Найдите вероятность того, что: а) число черных и красных карт в обеих половинах будет одинаковым (по 13); б) в каждой половине будет по 2 туза.

1.24. Из колоды в 36 карт наугад выбираются 4. Найдите вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

1.25. Найдите вероятность того, что в группе из 25 студентов найдутся по меньшей мере 2 студента, которые имеют общий день рождения.

1.26. На Древней Руси существовало следующее гадание. Девушка держала в руке 6 травинок так, чтобы они торчали сверху и снизу. Ее подруга попарно связывала травинки сверху и снизу. Если при этом все травинки образовывали кольца, то это означало, что девушка в текущем году выйдет замуж. Какова вероятность того, что все 6 травинок образуют кольца?

1.27 (*задача Стефана Банаха*). Некоторый математик носит при себе 2 коробка спичек. Каждый раз, когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найдите вероятность того, что когда математик впервые вынимает пустой коробок, то в другом коробке останется r спичек, $r = 0, 1, \ldots, n$, где n – количество спичек, которое было первоначально в каждом коробке.

1.28. В очереди, где продаются билеты по 5 дол., стоят n человек. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, если перед началом продажи денег у кассира не было, а получение платы за каждый билет равновозможно как 5-долларовыми, так и 10-долларовыми купюрами?

1.29. В лотерее 100 билетов, среди них один выигрыш в 50 дол., 3 выигрыша – по 25 дол., 6 выигрышей – по 10 дол. и 15 выиграшей – по 3 дол. Найдите вероятность какого-нибудь выигрыша при покупке 3 лотерейных билетов. Что вероятнее: выиграть не менее 25 дол. или не более 25 дол. при покупке одного лотерейного билета?

1.30. В лотерее k билетов, из них m выигрышных. Найдите вероятность одного выигрыша для лица, имеющего k билетов.

1.31. Пусть эксперимент состоит в проведении голосования по стратегии развития компании собранием из K членов. Каждый сотрудник может голосовать «за», «против» или воздержаться от голосования. Найдите число элементарных событий в Ω, если голосование является: а) открытым; б) тайным. Если в процессе обсуждения сотрудники могут менять свое мнение, то сколько элементов содержит Ω в том случае, если голосование проводится дважды (двумя способами)?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Маталыцкий Михаил Алексеевич
Хацкевич Геннадий Алексеевич

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Учебник

Редактор *И.В. Тургель*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.К. Хваль*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой*

Подписано в печать 04.07.2017. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «NewtonC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 31,08.
Уч.-изд. л. 27,8. Тираж 400 экз. Заказ 1962.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com   http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.