Бочаров П.П.
Печинкин А.В.

Теория вероятностей. Математическая статистика

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.2(078.5)
ББК 22.171+22.172
Б 86

Бочаров П. П., Печинкин А. В. **Теория вероятностей. Математическая статистика.** — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 296 с. — ISBN 5-9221-0633-3.

В первой части рассматриваются основные понятия теории вероятностей, при этом используются относительно простые математические конструкции, но, тем не менее, изложение ведется на основе аксиоматического построения, предложенного академиком А. Н. Колмогоровым. Во второй части излагаются основные понятия математической статистики. Рассматриваются наиболее часто встречающиеся задачи оценивания неизвестных параметров и проверки статистических гипотез и описываются основные методы их решения. Каждое приведенное положение иллюстрируется примерами. Излагаемый материал в целом соответствует государственному образовательному стандарту.

Студентам, аспирантам и преподавателям вузов, научным работникам различных специальностей и желающим получить первое представление о теории вероятностей и математической статистике.

ISBN 5-9221-0633-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Теория вероятностей

II. Математическая статистика

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие написано на основе курсов по теории вероятностей и математической статистике, читаемых авторами в течение ряда лет студентам самых различных специальностей, начиная от инженерных и кончая прикладной математикой. Для его изучения достаточно знание математики в объеме стандартного курса высшей математики для втузов.

Следует обратить внимание читателя на то, что хотя теория вероятностей и математическая статистика выступают в роли единой математической дисциплины, ее первая часть — теория вероятностей — существенно более проста для понимания. Гораздо сложнее вторая часть — математическая статистика, причем необходимым условием для ее изучения является хорошее знание теории вероятностей. Этим объясняется определенное различие в стиле изложения первой и второй частей. Материал первой части, ориентированный на детальную проработку основных понятий теории вероятностей, достаточно однороден, в то время как во второй части применен «многоуровневый» подход к изложению: доказательства и более глубокие сведения, которые можно опустить при первом знакомстве с математической статистикой, выделены более мелким шрифтом.

В пособие включено большое количество примеров, иллюстрирующих приведенные положения.

В книге принята раздельная нумерация параграфов, примеров, формул, рисунков и таблиц по главам. При ссылке на объект из другой главы добавляется номер главы (например, «см. пример 3 из гл. 2»). В части 2 («Математическая статистика») имеются ссылки на часть 1 («Теория вероятностей»), и тогда добавляется «часть 1» (например, «см. часть 1, гл. 2, параграф 3»).

В книге приняты следующие соглашения об использовании математических знаков равенства и приближенного равенства. Соотношение $f \equiv g$ означает тождественное равенство функций f и g при всех значениях аргумента. Запись $a \approx b$ означает асимптотическое равенство a и b при использовании предельных формул и эквивалентна математическому соотношению $a = b + o(1)$. Наконец, запись $a \cong b$ означает равенство a и b с точностью до ошибок округления.

В книге приводятся отдельные списки литературы для первой и второй частей. При этом принят следующий порядок: сначала по возрастанию сложности идут учебники, затем — дополнительная литература для тех читателей, кто желает более глубоко ознакомиться с тем или иным разделом, и, наконец, также по возрастанию сложности приводятся задачники.

При написании настоящей книги были использованы материалы учебника Б. В. Гнеденко и задачника Л. Д. Мешалкина (см. [8] и [17], литература к части 1). Кроме того, хотя в приложении и приводятся таблицы значений распределения Пуассона, плотности нормального распределения и интеграла Лапласа, для решения примеров по математической статистике необходимо иметь статистические таблицы Л. Н. Большева и Н. В. Смирнова ([1], литература к части 2).

Авторы благодарны всем лицам, оказавшим помощь при подготовке настоящего издания.

Бочаров П. П., Печинкин А. В.
2005 г.

Введение

Теория вероятностей и математическая статистика относится к числу прикладных математических дисциплин, поскольку она направлена на решение прикладных задач и возникла из чисто практических потребностей, а использует математические методы. В свою очередь двойное название дисциплины говорит о том, что в ней можно выделить два направления: теорию вероятностей и математическую статистику. Если попытаться кратко объяснить, чем занимаются каждое из направлений, то это будет выглядеть так: теория вероятностей производит пересчет заданных вероятностей «простых» событий в вероятности «сложных» событий, а математическая статистика по наблюденным данным восстанавливает вероятности событий или проверяет, правы ли мы в своих предположениях относительно этих вероятностей.

Постараемся подробнее остановиться на том, какие закономерности изучает теория вероятностей и математическая статистика и какое отношение это имеет к практике.

Начнем с первого направления — *теории вероятностей*. Уже само название наводит на мысль, что основная задача теории вероятностей — изучение численных закономерностей в опытах, результаты которых не могут быть предсказаны однозначно до проведения испытаний.

Для того чтобы лучше понять существо дела, выясним подробнее тот смысл, который вкладывается в понятия «вероятно», «маловероятно», «весьма вероятно».

Первое необходимое условие употребления этих понятий заключается, как уже говорилось, в невозможности предсказания исхода некоторого действия. Так, мы не можем предсказать, какой стороной упадет подброшенная монета, сколько очков выпадет на игральной кости, сколько времени проработает электрическая лампочка, какое вещество образуется в результате определенной химической реакции (если, конечно, результат не предопределен известной нам теорией), сколько частиц будет зарегистрировано счетчиком Гейгера–Мюллера за заданный промежуток времени, какой номер телефона у знакомого, какая будет погода 1 июня 2010 г. и т. д.

Однако погоду 1 июня 2010 г. мы не будем знать до этого дня, а после наступления 1 июня 2010 г. она будет полностью определена. Поэтому применение слов «маловероятно», «весьма вероятно» к погоде именно 1 июня 2010 г. некорректно из-за невозможности повторения испытания и погодой 1 июня 2010 г. до этого дня занимается метеорология, а после — история, но никак не теория вероятностей. Итак, второе необходимое условие — возможность повторения испытания с первоначальным комплексом исходных данных, причем, хотя бы теоретически, бесконечное число раз.

Далее, выяснив номер телефона знакомого, мы сколько бы раз его ни спрашивали, новых цифр не добьемся. Аналогично, определив исход химической реакции, а затем проведя ее снова при тех же условиях, мы, естественно, нового вещества не получим. Отсюда вытекает третье необходимое условие — невозможность точного предсказания результатов не только первого испытания, но и каждого последующего.

Таким образом, в приведенных выше примерах высказывания «маловероятно», «весьма вероятно» в наиболее точном их смысле можно отнести только к подбрасыванию монеты, бросанию игральной кости, испытанию электрической лампочки и регистрации частиц счетчиком Гейгера.

Попробуем теперь формализовать понятие «вероятного», связывая с ним числовую характеристику. Очевидно, эпитет «маловероятно» мы приписываем событиям, доля появления которых в общем числе испытаний мала, и, наоборот, «весьма вероятно» — событиям, происходящим практически во всех испытаниях. Введем количественную оценку понятия «вероятного». Для этого рассмотрим частоту $f_A = N_A/N$ появления некоторого события A, где N_A — число появлений этого события, а N — общее число испытаний. Оказывается, как было установлено опытным путем, с ростом числа испытаний N для довольно широкого класса явлений *частота f_A стабилизируется, т.е. стремится к некоторому предельному значению P_A, которое естественно принять в качестве вероятности события A*. К явлениям подобного рода относятся события, связанные с выпадением «герба» или «цифры» при подбрасывании монеты, с выпадением определенного числа очков при бросании игральной кости, с работой электрической лампочки в определенных границах времени, регистрацией частиц счетчиком и многие, многие другие. Такие события разумно назвать случайными. Поскольку в настоящем курсе другие события встречаться не будут, то прилагательное «случайное» мы будем для краткости опускать.

Эмпирический закон предельного постоянства частоты является той основной физической предпосылкой, которая необходима для практического применения методов теории вероятностей. Более того, хотя современная теория вероятностей и строится на аксиоматическом определении вероятности (см. ниже), при осмыслении полученных результатов мы рекомендуем всегда пользоваться *частотной интерпретацией*. Так, если после вычислений Вы получили, что вероятность некоторого события A равна 0,15, то это нужно трактовать следующим образом: при многократном повторении соответствующего опыта на каждые 100 испытаний приходится 15 появлений события A.

Однако попытка отождествить вероятность с частотой не выдерживает никакой более или менее существенной критики. Частота меняется от испытания к испытанию, а бесконечного числа испытаний, как известно, никто не проводил и вряд ли проведет в обозримом будущем.

Математика же привыкла иметь дело с точными, логически безупречными понятиями, и частотное определение ее никак не устраивает. Поэтому выдающимся математиком прошлого века Андреем Николаевичем Колмогоровым было предложено *аксиоматическое определение вероятности*, основанное на общем понятии меры. При этом аксиомы Колмогорова отражают три основных свойства частоты, перенесенных им на вероятность.

1. *Частота появления случайного события неотрицательна — аксиома неотрицательности вероятности.*
2. *Частота появления достоверного события, т. е. события, происходящего в каждом испытании, равна единице — аксиома нормированности.*
3. *Если два события не могут одновременно произойти в одном и том же испытании (несовместны), то частота появления хотя бы одного из них совпадает с суммой частот появления каждого — аксиома сложения вероятностей.*

Если теперь сопоставить каждому событию вероятность, т. е. число, удовлетворяющее трем вышеперечисленным аксиомам, то, оказывается, можно построить весьма содержательную теорию. При этом единственное добавление, необходимое для обеспечения математической строгости, заключается в замене аксиомы сложения вероятностей 3 расширенной аксиомой сложения вероятностей:

$3'$. *Вероятность суммы равна сумме вероятностей не только для двух, но и для произвольного счетного (т. е. такого, которое можно пересчитать с помощью чисел натурального ряда) числа несовместных событий.*

Аксиоматический подход позволяет не только описать хорошо известные явления, но и найти закономерности более общего типа. Так, вспомним пример с подбрасыванием монеты. Естественно предположить (и это подтверждается неоднократными опытами), что частоты выпадения «герба» и «цифры» одинаковы, и приписать каждому из этих двух событий одинаковую вероятность $1/2$. Однако при аксиоматическом построении теории вероятностей мы вправе приписать выпадению «герба» любую вероятность p, заключенную между нулем и единицей, а тогда выпадению «цифры» мы обязаны сопоставить вероятность $q = 1 - p$. Такое определение вероятности описывает случай несимметричной монеты. В свою очередь, последовательное подбрасывание несимметричной монеты (или аналогичный опыт) носит в теории вероятностей название последовательности независимых одинаковых испытаний или схемы Бернулли и является одной из наиболее часто применяемых на практике «базовых» моделей, позволяющих наглядно представить себе основные задачи этой теории.

Теперь мы можем привести примеры простейших задач, которые решает теория вероятностей. Так, считая, что при бросании игральной кости падение ее на любую грань одинаково вероятно, нужно найти вероятность того, что выпадет четное число очков. Или, зная вероятность p выпадения «герба» при одном подбрасывании несимметричной монеты, необходимо определить вероятность выпадения ровно одного «герба» при двух подбрасываниях этой же монеты.

Вернемся к примерам, рассмотренным в самом начале введения. При первом прочтении мы отбросили высказывания о погоде, результате химической реакции, номере телефона знакомого. При более детальном рассмотрении оказывается, однако, что и к ним можно применить методы теории вероятностей. Заменяя, например, высказывание «погода 1 июня 2010 г. будет солнечная» высказыванием «погода 1 июня будет солнечная» (не указывая, какого именно года), мы уже вправе использовать вероятностные соображения. Аналогично, в результате химической реакции могут появиться побочные продукты, объем которых может оказаться случайным. Предоставим читателю самому придумать постановку задачи о номере телефона знакомого, для решения которой также можно было бы применить вероятностные методы.

Перейдем ко второму направлению — *математической статистике*. В теории вероятностей игнорируется вопрос: откуда берутся исходные вероятности? Они считаются заданными «извне» или определенными какой-либо теорией. Однако в реальной жизни при применении методов теории вероятностей постоянно приходится сталкиваться с ситуациями, когда эти вероятности нам неизвестны. Конечно, при отсутствии всякой информации давать какие-либо прогнозы — вещь весьма опасная. Поэтому подумаем, как можно выйти из создавшейся ситуации.

Обратимся к примеру. Пусть нам предлагают играть в «орлянку» неизвестной монетой, о которой мы не знаем, как часто выпадает «герб» и как часто — «цифра». Осторожный человек, прежде чем «бросаться головой в омут», всегда посмотрит, как это делают другие. Поэтому он сначала понаблюдает за ходом игры и только потом, оценив для себя шансы, будет ставить на тот или иной исход.

Именно задачами восстановления на основе предварительных наблюдений данных, недостающих для расчетов методами теории вероятностей, и занимается математическая статистика. Очевидно, что в силу случайности результатов наблюдений сделать достоверные выводы о параметрах того явления, которое мы далее собираемся исследовать, невозможно. Тем не менее у нас есть определенная зацепка: это тот же самый эмпирический закон предельного постоянства частоты (однако, если мы работаем в рамках аксиоматического подхода, мы должны этот закон доказать строго математически!). В соответствии с ним: чем дольше производить наблюдения, тем более точные выводы можно получить. Математическая статистика как раз и учит тому, как нужно обрабатывать наблюдения, чтобы «выжать» из них наиболее полную информацию, и как оценить степень достоверности полученных выводов.

Вернемся к игре в «орлянку». Понаблюдав за игрой, мы можем задать себе такой вопрос: что можно сказать на основе полученных данных о вероятности выпадения «герба»? Или спросить себя: а действительно ли вероятности выпадения «герба» и «цифры» одинаковы, как это нам обещают? Именно эти два вопроса и определяют два основных направления в математической статистике. Первое направление связано с оценкой неизвестного параметра (в частности, вероятности выпадения «герба»), а второе — с проверкой определенных предположений, или гипотез (в нашем примере — гипотезы о равновероятности выпадения «герба» и «цифры»).

Правильность исходных предпосылок теории вероятностей и математической статистики, как и всякой другой прикладной теории, проверяется практикой. На сегодняшний день трудно найти такую область человеческих знаний, где в той или иной мере не применялись бы методы теории вероятностей и математической статистики. Сюда, наряду с естественными отраслями науки и техники, такими, как физика, химия, инженерия, можно отнести и, казалось бы, далекие от математики области: историю, медицину, генетику, социологию, лингвистику и т. д.

На базе теории вероятностей и математической статистики сформировались и выросли такие разделы, как теория случайных процессов, теория массового обслуживания, математическая теория надежности и т. д. В свою очередь теория вероятностей и математическая статистика опираются на другие математические дисциплины: функциональный анализ, алгебру, аналитическую геометрию, теорию функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения и др.

В заключение скажем несколько слов об истории развития теории вероятностей и математической статистики. Возникновение теории вероятностей обычно относят к XVII в. и связывают с комбинаторными задачами азартных игр. Хотя азартные игры и нельзя рассматривать как серьезный объект для изучения, именно они привели к решению задач, не укладывавшихся в рамки существовавших тогда математических моделей, и способствовали появлению новых понятий и идей. Эти новые элементы можно встретить уже у Я. Бернулли, П. С. Лапласа, К. Ф. Гаусса и целого ряда других видных математиков того времени. Как самостоятельный раздел математики дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» сложилась в конце XIX — начале XX веков, причем если говорить о математической статистике как об отдельном направлении, то ее бурное развитие началось лишь в прошлом столетии. Окончательное становление теории вероятностей и математической статистики, как уже говорилось, связано с именем А. Н. Колмогорова.

Часть I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1
ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Взяв практически любую статью по теории вероятностей, мы увидим, что либо она начинается словами: «Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P})$ — *вероятностное пространство*», либо в одной из первых же фраз написано: «где $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство». Иногда добавляется: «Ω — пространство элементарных исходов, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра (сигма-алгебра) событий, P — вероятностная мера (или вероятность)». Естественно, у неискушенного читателя пропадает всякое желание читать эту статью дальше. Однако понятие вероятностного пространства является весьма естественным математическим обобщением хорошо известных физических понятий: исход опыта, случайное событие, вероятность события. В настоящей главе мы попытаемся, насколько это возможно, дать читателю, знакомому только с основами высшей математики, разъяснение этого основополагающего для теории вероятностей понятия.

1. Пространство элементарных исходов

Рассмотрим простейший вариант случайного испытания — подбрасывание монеты. Если отвлечься от чисто гипотетических возможностей — падения монеты на ребро или вообще исчезновения монеты, то возможны только два исхода: выпадение «герба» и выпадение «цифры». Эти два исхода в рамках данного опыта уже нельзя разбить на более мелкие составляющие, т. е. они являются в некотором роде «элементарными». При бросании игральной кости такими неделимыми исходами являются: выпадение одного очка, выпадение двух очков, …, выпадение шести очков. Значит, мы имеем уже 6 элементарных исходов. Более сложный пример получим, если рассмотрим падение идеальной (т. е. не имеющей размера) частицы на плоскость. Тогда результат испытания представляет собой попадание частицы в определенную точку плоскости и его можно отождествить с двумерным вектором в некоторой системе координат на плоскости.

Аналогично, если проанализировать любое испытание со случайным исходом, можно заметить, что его результат представляет собой один из множества допустимых исходов. Поскольку в математике принято абстрагироваться от несущественных деталей, то всегда можно рассматривать все возможные в данном опыте исходы как некоторое *множество* Ω, которое и носит название *пространства элементарных исходов* или *пространства элементарных событий*. Сами элементарные исходы будем обозначать строчной буквой ω, снабжая ее при необходимости индексами.

Пример 1. При подбрасывании монеты пространство элементарных исходов Ω состоит всего из 2 исходов: ω_1 — выпадение «герба» и ω_2 — выпадение «цифры». □

Пример 2. При бросании игральной кости возможны 6 элементарных исходов: ω_1 — выпадение одного очка, ω_2 — выпадение 2 очков, $\ldots, \omega_6$ — выпадение 6 очков. □

Пример 3. При подбрасывании двух монет пространство элементарных исходов Ω содержит уже 4 исхода. Перечислим их: ω_1 — пара «герб»–«герб», ω_2 — «герб»–«цифра», ω_3 — «цифра»–«герб», ω_4 — «цифра»–«цифра». При подбрасывании трех монет возможны 8 элементарных исходов типа «герб»–«цифра»–«герб» и т. д. □

Пример 4. При определении времени жизни элементарной частицы пространство элементарных исходов Ω представляет собой полупрямую $[0, \infty)$. □

Следует отметить, что в практических исследованиях существует определенный произвол в описании пространства элементарных исходов Ω. Так, однократное подбрасывание монеты (пример 1) можно рассматривать как часть более сложного опыта, заключающегося в подбрасывании двух или более монет (пример 3). При определении времени жизни частицы (пример 4) можно также рассматривать типы получившихся после распада частиц и т. д. Очевидно, при решении практических задач разумно выбирать всегда наиболее простой вариант пространства элементарных исходов, необходимый для решения стоящей перед исследователем задачи.

2. События, действия над ними

Понятие «событие» лингвистически отличается от понятия «элементарное событие» только отсутствием прилагательного «элементарное». Естественно поэтому определить событие так же, как исход испытания, но только не обязательно неделимый.

Пример 5. При бросании игральной кости (см. пример 2) событиями являются: выпадение четного числа очков (это событие происходит тогда и только тогда, когда появляется один из элементарных исходов ω_2, ω_4, ω_6,); выпадение нечетного числа очков (элементарные исходы ω_1, ω_3, ω_5); выпадение не менее двух очков (элементарные исходы ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6) и т. д. □

Пример 6. При подбрасывании двух монет примерами событий будут: падение обеих монет на одну и ту же сторону (появлению этого события благоприятствуют элементарные исходы ω_1 и ω_4 из примера 3); падение монет на разные стороны (элементарные исходы ω_2 и ω_3); выпадение, по крайней мере, одного «герба» (элементарные исходы ω_1, ω_2 и ω_3) и т. п. □

Пример 7. При определении времени безотказной работы электрической лампочки можно привести следующие примеры событий: безотказная работа лампочки до момента T; отказ лампочки до момента T; отказ лампочки между моментами T_1 и T_2 и т. д. Здесь так же, как и в примере 4, пространство элементарных исходов Ω представляет собой полупрямую $[0, \infty)$. Тогда первому событию соответствует множество точек на полупрямой $[T, \infty)$, второму — на интервале $[0, T)$, третьему — на интервале (T_1, T_2). □

Вспоминая, что в результате опыта может произойти один и только один элементарный исход ω из пространства элементарных исходов Ω, мы приходим к теоретико-множественному определению *события* как *произвольного набора элементарных исходов* или, иными словами, *произвольного подмножества множества элементарных исходов* Ω. События будем обозначать прописными латинскими буквами, снабженными при необходимости индексами: A, B, C_1, H_2 и т. д.

Заметим, что приведенное выше определение события *не всегда позволяет построить логически безупречную аксиоматику теории вероятностей*. Поэтому в следующем параграфе мы уточним понятие «событие». Сейчас же наша цель состоит в описании теоретико-множественных операций над событиями, и нам удобно отказаться от несущественных пока деталей.

Часто бывает полезным наглядное представление событий в виде так называемой *диаграммы Эйлера–Венна*. Будем изображать все пространство элементарных исходов прямоугольником (рис. 1). Тогда каждый элементарный исход ω соответствует точке внутри прямоугольника, а каждое событие A отождествимо с некоторой областью.

Само пространство элементарных исходов Ω представляет собой событие, состоящее из всех возможных исходов, т. е. происходящее всегда (при любом элементарном исходе ω), и носит название *достоверного события*. Таким образом, пространство элементарных исходов выступает в двух качествах: в качестве собственно множества всех элементарных исходов и в качестве достоверного события.

Для дальнейшего нам удобно ввести еще одно событие $\varnothing$, называемое невозможным. *Невозможное событие* не происходит никогда, т. е. не содержит ни одного элементарного исхода.

Пример 8. При бросании игральной кости событие «выпадение не менее одного очка» является достоверным (Ω), событие «выпадение более 6 очков» — невозможным ($\varnothing$). □

Над событиями как над подмножествами фиксированного множества можно производить действия, которые мы сейчас опишем.

Пересечением (*произведением*) *двух событий* A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда наступают одновременно оба события A и B, или, иными словами, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат и A, и B (рис. 2).

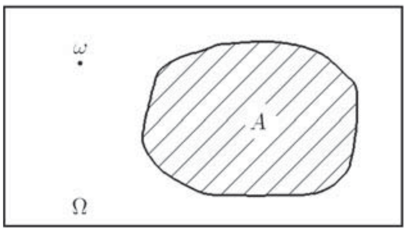

Рис. 1

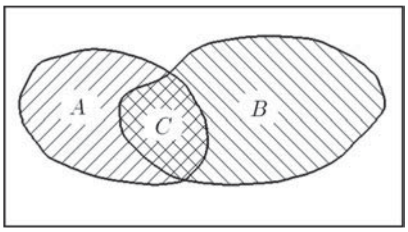

Рис. 2

Пересечение событий A и B записывается следующим образом:

$$C = A \cap B$$

или

$$C = A \cdot B = AB.$$

Аналогично определяется пересечение трех и более событий.

Пример 9. Событие A — при подбрасывании двух монет падение их одной стороной, событие B — выпадение хотя бы одного «герба». Пересечением событий A и B является событие C, состоящее в выпадении двух «гербов». □

Пример 10. Событие A — выпадение четного числа очков при бросании игральной кости, событие B — выпадение не менее 3 очков. Пересечение A и B — событие C, состоящее в выпадении 4 или 6 очков. □

События A и B называются *непересекающимися* или *несовместными*, если их пересечение является невозможным событием, т. е. $A \cap B = \varnothing$ (рис. 3).

Для трех и более событий понятие несовместности можно определить разными способами. Мы будем, в основном, пользоваться следующим понятием несовместности n событий, которое также называется *попарной несовместностью* событий: события $A_1, \ldots, A_n$ называются (попарно) несовместными, или (попарно) непересекающимися, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых i и j при $i \neq j$.

Пример 11. Событие A — выпадение четного числа очков при бросании игральной кости, событие B — выпадение нечетного числа очков. События A и B несовместны. □

Нетрудно видеть, что справедливы следующие простейшие формулы для пересечения двух событий, одно из которых достоверно или невозможно:

$$A\Omega = A, \qquad A\varnothing = \varnothing.$$

Объединением (*суммой*) *двух событий* A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B, т. е. состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис. 4).

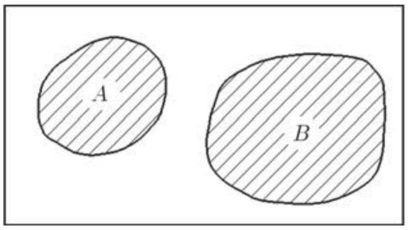

Рис. 3

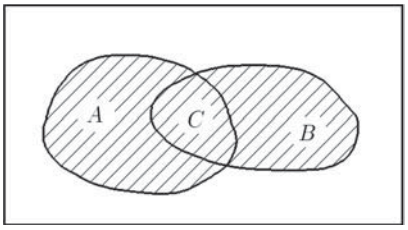

Рис. 4

Для объединения событий A и B применяется запись

$$C = A \cup B.$$

Пример 12. Событие A — выпадение 1 или 3 очков при бросании игральной кости, событие B — выпадение 3 или 5 очков. Объединением событий A и B является событие C, состоящее в выпадении нечетного числа очков. □

Для объединения двух событий, одно из которых достоверно или невозможно, имеют место следующие формулы:

$$\Omega \cup A = \Omega, \qquad \varnothing \cup A = A.$$

В том случае, когда события A и B несовместны, наряду со знаком «$\cup$» для их объединения употребляют знак «$+$». Обычно знак «$+$» применяют тогда, когда заведомо известно, что A и B несовместны, и это особо хотят подчеркнуть. В частности, поскольку невозможное событие несовместно с любым событием A, то

$$\varnothing \cup A = \varnothing + A = A.$$

Аналогично определяется объединение трех и более событий. При этом знак «$+$» используется в случае попарной несовместности входящих в объединение событий.

Разностью двух событий A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B, т. е. состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат A, но не принадлежат B (рис. 5).

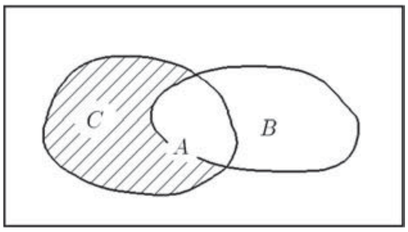

Рис. 5

Разность событий A и B записывается в виде

$$C = A \setminus B.$$

Пример 13. Событие A — выпадение хотя бы одного «герба» при подбрасывании двух монет, событие B — падение обеих монет одной стороной. Разность C событий A и B представляет собой событие, заключающееся в выпадении ровно одного «герба». □

Справедливы следующие формулы для разности двух событий, одно из которых достоверно или невозможно:

$$A \setminus \Omega = \varnothing, \qquad A \setminus \varnothing = A, \qquad \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

Кроме того, если A и B несовместны ($AB = \varnothing$), то $A \setminus B = A$.

Симметрической разностью двух событий A и B (обозначается знаком Δ или $\circ$) называется событие C, представляющее собой объединение событий $A \setminus B$ и $B \setminus A$:

$$C = A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Поскольку события $A \setminus B$ и $B \setminus A$ несовместны (рис. 6), симметрическую разность можно записать также в виде

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) + (B \setminus A).$$

Нетрудно заметить, что симметрическая разность есть объединение событий A и B без их общей части:

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Пример 14. Событие A — выпадение не менее 2 очков при бросании игральной кости, событие B — выпадение не более 4 очков. Симметрической разностью событий A и B является событие C, заключающееся в выпадении 1, 5 или 6 очков. □

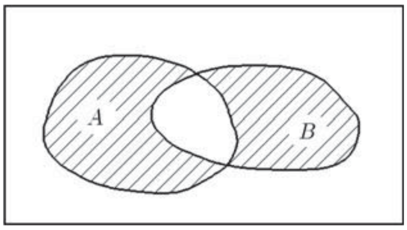

Рис. 6

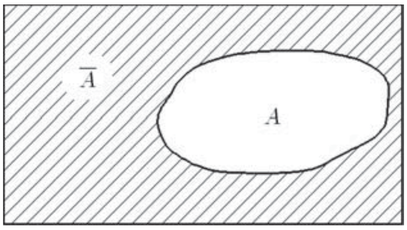

Рис. 7

Если A и B несовместны, то

$$A \vartriangle B = A + B.$$

Дополнением события A (обычно обозначается $\overline{A}$) называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A (рис. 7), или, иными словами,

$$\overline{A} = \Omega \setminus A.$$

Пример 15. Событие A — выпадение четного числа очков при бросании игральной кости. Дополнительное событие $\overline{A}$ — выпадение нечетного числа очков. □

Справедливы формулы:

$$\overline{\Omega} = \varnothing, \qquad \overline{\varnothing} = \Omega, \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Если некоторое событие записано в виде нескольких действий над различными событиями, то сначала вычисляются дополнения, затем выполняются умножения и, наконец, сложения и вычитания событий. Так, формула

$$C = A_1\overline{A}_2B_1 \cup A_3\overline{B}_2 \setminus B_3$$

эквивалентна формуле

$$C = \{[A_1(\overline{A}_2)B_1] \cup [A_3(\overline{B}_2)]\} \setminus B_3.$$

Пользуясь диаграммой Эйлера–Венна, нетрудно показать справедливость следующих формул (*формулы де Моргана*):

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}, \qquad A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}.$$

Формулы де Моргана элементарно переносятся на произвольное число событий. В частности, для n событий $A_1, \ldots, A_n$ они имеют вид:

$$A \cap \ldots \cap A_n = \overline{\overline{A}_1 \cup \ldots \cup \overline{A}_n}, \qquad A \cup \ldots \cup A_n = \overline{\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n}.$$

Следует отметить, что все действия над событиями можно получить с помощью только двух действий — объединения и дополнения (или пересечения и дополнения). Основанием для этого утверждения служат формулы де Моргана, а также соотношение

$$A \setminus B = A\overline{B}.$$

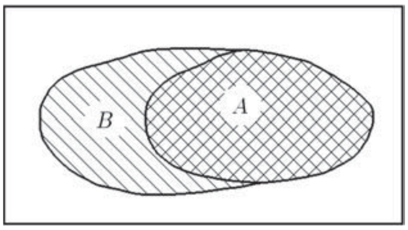

Рис. 8

Кроме вышеперечисленных действий над событиями нам в дальнейшем понадобится понятие включения. Событие A принадлежит (содержится в, включается в) событию B (записывается $A \subset B$), если появление события A обязательно влечет за собой наступление события B (рис. 8) или, иными словами, каждый элементарный исход ω, принадлежащий A, обязательно принадлежит и B. Ясно, что включение $A \subset B$ эквивалентно выполнению равенства $AB = A$.

Используют и обратное понятие: событие B *содержит* (*включает*) *событие* A ($B \supset A$), если $A \subset B$.

Пример 16. Событие A — выпадение четного числа очков при бросании игральной кости, событие B — выпадение не менее 2 очков. Событие A принадлежит событию B, поскольку если выпало четное число очков (2, 4 или 6), то обязательно выпало не менее 2 очков. □

Следующие включения очевидны:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega.$$

Кроме того, если $A \subset B$, то

$$A \cup B = B, \qquad A \setminus B = \varnothing, \qquad A \vartriangle B = B \setminus A.$$

3. σ-алгебра событий

Итак, мы назвали событием *произвольное подмножество* пространства элементарных исходов Ω. Такое определение прекрасно работает, когда Ω конечно или даже счетно (т. е. его можно пересчитать с помощью чисел натурального ряда). Однако если Ω более чем счетно, то, вообще говоря, мы уже не сможем построить логически непротиворечивую теорию, называя событием произвольное подмножество Ω. Причина этого заключается в существовании так называемых неизмеримых множеств, что в свою очередь кроется в топологической структуре классических рассматриваемых пространств (прямой, плоскости, трехмерного пространства и т. д.). Поэтому приходится отказаться от, казалось бы, естественного желания назвать событием любое подмножество пространства элементарных исходов Ω и выделить среди всех подмножеств *некоторый класс подмножеств* $\mathfrak{B}$. Именно только *подмножества из выделенного класса* $\mathfrak{B}$ *и будут называться событиями*. Интуитивно ясно, что описанные в предыдущем пункте теоретико-множественные операции над событиями не должны приводить к подмножествам, не являющимся событиями.

С точки зрения повседневной практики подмножества пространства элементарных исходов Ω, не являющиеся событиями, представляют собой чистую математическую абстракцию и в реальной жизни никогда не встречаются. Даже само доказательство их существования представляет весьма сложную задачу. Поэтому читателю, не желающему вдаваться в математические тонкости, мы рекомендуем пропустить параграф, посвященный σ-алгебре событий, и в дальнейшем под событием понимать произвольное подмножество элементарных исходов Ω, а под σ-алгеброй — систему всех этих подмножеств. Любознательному читателю мы предоставляем возможность познакомиться со строгим определением последнего понятия, излагаемым ниже.

Алгеброй событий $\mathfrak{A}$ назовем непустую систему подмножеств Ω, удовлетворяющую следующим аксиомам:

A1. *Если подмножество A принадлежит $\mathfrak{A}$ (является событием), то дополнение $\overline{A}$ также принадлежит $\mathfrak{A}$ (является событием).*

A2. *Если подмножества A и B принадлежат $\mathfrak{A}$ (являются событиями), то и объединение $A \cup B$ принадлежит $\mathfrak{A}$ (является событием).*

Как мы знаем, любую из рассмотренных нами операций над подмножествами можно получить с помощью только двух операций: дополнения и объединения. Поэтому пересечение и разность двух событий также будут событиями. Поскольку $\Omega = A \cup \overline{A}$ и $\varnothing = \overline{\Omega}$, то все пространство элементарных исходов Ω и пустое подмножество $\varnothing$ обязательно являются событиями в любой алгебре событий. Очевидно также, что объединение и пересечение любого конечного числа событий снова будет событием. Иными словами, алгебру событий $\mathfrak{A}$ можно определить как *систему подмножеств пространства элементарных* *исходов Ω, замкнутую* [1] *относительно конечного числа теоретико-множественных операций.*

Однако понятие алгебры событий также оказывается недостаточным для аксиоматического построения теории вероятностей в том случае, когда пространство элементарных исходов Ω не является конечным. Интересы общей теории меры требуют, чтобы аксиома А2 была заменена на более сильную, и мы приходим к новому определению:

σ-алгеброй событий $\mathfrak{B}$ назовем систему подмножеств из Ω, удовлетворяющую аксиоме А1 и аксиоме

2′. *Если подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ принадлежат $\mathfrak{B}$ (являются событиями), то и их (счетное) объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ также принадлежит $\mathfrak{B}$ (является событием).*

Основываясь на формулах де Моргана, нетрудно показать, что пересечение счетного числа событий снова будет событием. Таким образом, σ-алгебру событий $\mathfrak{B}$ можно определить как *систему подмножеств пространства элементарных исходов Ω, замкнутую относительно счетного числа теоретико-множественных операций.*

Любая σ-алгебра событий является одновременно и алгеброй событий. Обратное, вообще говоря, не верно, т. е. существуют алгебры событий, не являющиеся σ-алгебрами. Однако если пространство элементарных исходов Ω конечно, то любая алгебра событий будет также и σ-алгеброй событий, т. е. в этом случае понятия алгебры событий и σ-алгебры событий эквивалентны.

σ-алгебра событий является второй компонентой вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P})$.

Пример 17. Для любого пространства элементарных исходов Ω, содержащего хотя бы один исход, семейство подмножеств, состоящее всего из двух подмножеств Ω и $\varnothing$, является σ-алгеброй. Ясно, однако, что на такой σ-алгебре, состоящей всего из достоверного и невозможного событий, сколь-нибудь содержательную теорию построить невозможно, и мы ее в дальнейшем рассматривать не будем. □

Пример 18. Пусть пространство элементарных исходов Ω содержит по крайней мере два исхода. Возьмем в Ω некоторое подмножество A, отличное от $\varnothing$ и Ω. Тогда система из четырех подмножеств $\varnothing$, A, $\overline{A}$ и Ω будет являться σ-алгеброй $\mathfrak{B}$. Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать только события, а других событий, кроме перечисленных четырех, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ не содержит, то естественно отождествить ее с σ-алгеброй, определенной на пространстве элементарных исходов Ω', состоящем всего из двух элементарных исходов: $\omega_1' = A$ и $\omega_2' = \overline{A}$, и содержащей подмножества $\varnothing$, $\{\omega_1'\}$, $\{\omega_2'\}$ и Ω. Здесь мы имеем дело с тем принципом упрощения пространства элементарных исходов, о котором говорилось в параграфе 1.

[1] Система подмножеств замкнута относительно операции, если в результате применения этой операции получаем подмножество, снова принадлежащее этой системе.

В качестве иллюстрации рассмотрим время работы электрической лампочки. Первоначально пространство элементарных исходов представляет собой полупрямую $[0, \infty)$. Однако если наблюдателю доступна только информация, произошел отказ за фиксированное время T (событие A) или нет (событие $\overline{A}$), то он фактически имеет дело с двумя элементарными исходами: $\omega_1' = A$ и $\omega_2' = \overline{A}$; соответствующая σ-алгебра состоит из четырех событий, описанных выше. В этом случае наблюдение за работой электрической лампочки с точки зрения числа возможных элементарных исходов ничем не отличается от наблюдения за подбрасыванием монеты. □

Пример 19. Пусть пространство элементарных исходов Ω содержит конечное ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$) или счетное ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$) число исходов. Такое пространство называется дискретным. В качестве σ-алгебры $\mathfrak{B}$ возьмем систему всех подмножеств. Именно эту σ-алгебру мы *всегда* будем рассматривать в дальнейшем в случае дискретного пространства элементарных исходов. Нетрудно видеть, что любое событие A можно отождествить с последовательностью из 0 и 1, причем 0 на i-м месте означает, что элементарный исход ω_i не принадлежит событию A. В частности, невозможному событию $\varnothing$ соответствует последовательность $0, 0, \ldots$, а достоверному Ω — $1, 1, \ldots$ Ясно, что если число исходов n конечно, то σ-алгебра $\mathfrak{B}$ содержит 2^n событий (на каждом из n мест последовательности может стоять одно из двух чисел: 0 или 1).

В случае дискретного Ω σ-алгебру $\mathfrak{B}$ можно определить исходя и из других предпосылок. Для этого достаточно объявить *событиями* все *элементарные исходы* ω_i. Поскольку в случае дискретного Ω любое его подмножество будет содержать не более счетного числа элементарных исходов, то в соответствии с аксиомой A2$'$ оно *обязательно будет событием*. Таким образом, σ-алгебру $\mathfrak{B}$ можно трактовать как *σ-алгебру, порожденную всеми элементарными исходами*.

В частности, в случае конечного Ω σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается конечным числом элементарных исходов и поэтому совпадает с *алгеброй* $\mathfrak{A}$, *порожденной всеми элементарными исходами* ω_i. Однако в случае счетного Ω алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная всеми элементарными исходами ω_i, уже не будет совпадать с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$, поскольку она будет содержать только подмножества, состоящие из *конечного числа элементарных исходов* (как объединения событий в соответствии с аксиомой A2) или подмножества, состоящие из *всех элементарных исходов за исключением их конечного числа* (как дополнения к подмножествам первого типа в соответствии с аксиомой A1). □

Пример 20. Пусть пространство элементарных исходов Ω представляет собой прямую $(-\infty, \infty)$. И здесь система всех подмножеств будет представлять собой σ-алгебру. Однако оказывается, что такая «максимальная» σ-алгебра в наиболее интересных случаях представляет собой негодный объект для дальнейших исследований. Дело в том, что введение понятия σ-алгебры является *вспомогательным процессом*, необходимым для дальнейшего определения собственно вероятности, и, если бы только было возможно, никто не стал бы «городить огород» ради, разве что, красивого названия.

О невозможности использования «максимальной» σ-алгебры мы еще скажем несколько слов, когда будем рассматривать геометрическую вероятность. Сейчас попробуем построить другую σ-алгебру, опираясь на более умеренные запросы. Итак, что бы мы хотели от σ-алгебры на прямой? Разумеется, основное требование к ней заключается в том, чтобы ей принадлежали всевозможные интервалы $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b). Минимальная σ-алгебра, удовлетворяющая этому требованию, носит название *борелевской σ-алгебры* и является тем объектом, на котором без всяких логических противоречий можно построить математически строгую теорию.

Все сказанное относительно прямой в полной мере относится и к пространствам элементарных исходов, представляющим собой плоскость, трехмерное пространство и пространства более высоких размерностей, а также их невырожденные части (отрезки, многоугольники, круги, шары и т. д.). В теории вероятностей такие пространства элементарных исходов называются непрерывными. $\square$

4. Вероятность

Приступим теперь к аксиоматическому определению последней составляющей вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P})$ — вероятности или, как иногда говорят, вероятностной меры P.

Предположим сначала, что пространство элементарных исходов *конечно*. Пусть каждому *событию* A (т. е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащему σ-алгебре $\mathfrak{B}$) поставлено в соответствие число $\mathsf{P}(A)$. Числовая функция $\mathsf{P}(A)$ (заданная на σ-алгебре $\mathfrak{B}$) называется *вероятностью*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

P1. $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ (*аксиома неотрицательности*);

P2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ (*аксиома нормированности*);

P3. $\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ (*аксиома сложения*), если $A, B \in \mathfrak{B}$ и $A \cup B = \varnothing$.

Как говорилось во введении, аксиомы вероятности представляют собой не что иное, как математическое отражение основных свойств частоты.

Из аксиом P1–P3 можно вывести ряд очевидных свойств вероятности.

Поскольку $\Omega = A + \overline{A}$, то по аксиоме сложения $\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A})$ или, с учетом аксиомы нормированности,

1. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$ (*вероятность дополнительного события*).

Далее, поскольку $A = A + \varnothing$, то из аксиомы сложения имеем

2. $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$ (*вероятность невозможного события*).

Пусть $A \subset B$. Тогда $B = A + (B \setminus A)$, по аксиоме сложения $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$, и из аксиомы неотрицательности получаем

3. $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$ (*«бóльшему» событию соответствует бóльшая вероятность*).

В частности, так как всегда $A \subset \Omega$, то, с учетом аксиомы неотрицательности,

4. $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$ (*вероятность заключена между 0 и 1*).

Наконец, поскольку $A \cup B = A + (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) + AB$, то из аксиомы сложения находим: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$ и $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$. Следовательно,

5. $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$ (*вероятность объединения двух событий*).

Последнее свойство допускает очевидное, но весьма полезное обобщение на случай произвольного числа слагаемых

6. $\mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathsf{P}(A_1) + \ldots + \mathsf{P}(A_n) - \mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1A_3) - \ldots$
$\ldots - \mathsf{P}(A_{n-1}A_n) + \mathsf{P}(A_1A_2A_3) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathsf{P}(A_1A_2 \ldots A_n)$.

Свойство 6 доказывается индукцией по n. Так, для трех событий A, B и C

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \cup C) - \mathsf{P}(A(B \cup C)) = \\ &= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(BC) - \mathsf{P}(AB \cup BC) = \\ &= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(BC) - \mathsf{P}(AB) - \mathsf{P}(AC) + \mathsf{P}(ABC).\end{aligned}$$

Из свойств 6 и 2 имеем для любого числа n (попарно) непересекающихся событий $A_1, \ldots, A_n$

7. $\mathsf{P}(A_1 + \ldots + A_n) = \mathsf{P}(A_1) + \ldots + \mathsf{P}(A_n)$.

В случае, когда Ω содержит конечное число n элементарных исходов, вероятность можно определить конструктивно.

Действительно, с одной стороны, пусть на пространстве элементарных исходов Ω задана некоторая вероятность $\mathsf{P}(A)$. Обозначим через $p_1, \ldots, p_n$ вероятности элементарных исходов $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Тогда по аксиоме сложения P3 вероятность любого события A определяется формулой $\mathsf{P}(A) = \sum \mathsf{P}(\omega_i) = \sum p_i$, где суммирование ведется по всем индексам i, соответствующим входящим в событие A элементарным исходам. В силу аксиом неотрицательности P1 и нормированности P2 числа $p_1, \ldots, p_n$ являются неотрицательными и удовлетворяют свойству $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

С другой стороны, пусть $p_1, \ldots, p_n$ — любой набор неотрицательных чисел, таких, что $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Поставим в соответствие каждому элементарному исходу ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ число $\mathsf{P}(\omega_i) = p_i$, а любому событию A — число $\mathsf{P}(A) = \sum \mathsf{P}(\omega_i) = \sum p_i$, где суммирование ведется по всем индексам i, соответствующим входящим в событие A элементарным исходам. Очевидно, достоверному событию Ω мы должны сопоставить число $\mathsf{P}(\Omega) = p_1 + \ldots + p_n = 1$. Нетрудно видеть, что определенная таким образом функция $\mathsf{P}(A)$ удовлетворяет аксиомам P1–P3, т. е. является вероятностью.

Итак, существует взаимно однозначное соответствие между всеми вероятностями $\mathsf{P}(A)$ на Ω и наборами $p_1, \ldots, p_n$ неотрицательных чисел, удовлетворяющими условию $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

В частности, мы можем всем элементарным исходам ω_i приписать одну и ту же вероятность $p_i = 1/n$ $(i = 1, \ldots, n)$. В этом случае реализуется так называемый принцип классической вероятности, о котором мы подробно поговорим в следующей главе.

В случае *произвольного* (не обязательно конечного) пространства элементарных исходов Ω аксиому P3 необходимо заменить более сильной *расширенной аксиомой сложения*

P3′. $\mathsf{P}(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = \mathsf{P}(A_1) + \ldots + \mathsf{P}(A_n) + \ldots$,

справедливой для *счетного числа попарно несовместных событий*.

Именно аксиомы P1, P2 и P3′ и определяют аксиоматическое понятие вероятности.

Очевидно, что свойства вероятности 1–7 сохраняются и в этом случае.

Пример 21. Пусть Ω состоит из счетного числа элементарных исходов $\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ И в этом случае любую вероятностную меру $\mathsf{P}(A)$ можно получить, задав вероятности $p_1 = \mathsf{P}(\omega_1), \ldots,\ p_n = \mathsf{P}(\omega_n), \ldots$ элементарных исходов, причем последовательность $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ должна удовлетворять только условиям неотрицательности $p_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и нормированности $p_1 + \ldots + p_n + \ldots \ = 1$. По-прежнему вероятность любого события A определяется как сумма $\sum p_i$ вероятностей всех входящих в A элементарных исходов ω_i, однако если событие A содержит бесконечное число элементарных исходов, то и сумма будет бесконечной. □

Пример 22. Пусть пространство элементарных исходов Ω представляет собой прямую $(-\infty, \infty)$ с борелевской σ-алгеброй на нем (см. пример 20). Теперь уже в наиболее интересных случаях мы не можем приписать каждому элементарному исходу ω иной вероятности, кроме $\mathsf{P}(\omega) = 0$, и, следовательно, определить вероятность любого события на основе вероятностей входящих в него элементарных исходов. Тем не менее и сейчас вероятность можно задать конструктивно.

Для того чтобы показать это, предположим сначала, что она каким-то образом уже задана для всех событий (элементов борелевской σ-алгебры), и рассмотрим функцию $F(x) = \mathsf{P}(A_x)$, равную вероятности события $A_x = (-\infty, x)$, состоящего из всех точек полупрямой $(-\infty, x)$. Как вероятность функция $F(x)$ обязана обладать определенными свойствами, которые мы сейчас опишем.

Во-первых, значения функции $F(x)$ как вероятности должны лежать между 0 и 1.

Во-вторых, так как для любых $x_1 < x_2$ событие $(-\infty, x_1)$ содержится в событии $(-\infty, x_2)$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$. Иными словами, $F(x)$ — неубывающая функция аргумента x.

В-третьих, поскольку событие $(-\infty, -\infty)$ невозможно, а событие $(-\infty, \infty)$ достоверно, то $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Наконец, так как событие $(-\infty, x)$ представляет собой объединение счетного числа событий $(-\infty, x - 1/n)$, то из расширенной аксиомы сложения и монотонности $F(x)$ можно вывести (см. параграф 2 гл. 5), что $F(x)$ — непрерывная слева функция.

Зная функцию $F(x)$, можно определить вероятности любых других событий. В частности, вероятность события $A = [x_1, x_2)$ $(x_1 < x_2)$ определяется формулой $\mathsf{P}(A) = F(x_2) - F(x_1)$.

Таким образом, любая вероятность на прямой полностью определяется своей функцией $F(x)$, которая удовлетворяет перечисленным выше свойствам.

Справедливо и обратное. Любая неубывающая непрерывная слева функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$, задает некоторую вероятность на прямой $(-\infty, \infty)$. Действительно, достаточно сопоставить каждому событию $A_x = (-\infty, x)$ число $\mathsf{P}(A_x) = F(x)$, а событию $A = [x_1, x_2)$ — число $\mathsf{P}(A) = F(x_2) - F(x_1)$. Можно показать, что определенная таким образом для всех событий $A = [x_1, x_2)$ числовая функция $\mathsf{P}(A)$ будет удовлетворять трем аксиомам вероятности. Для любых других событий, составляющих борелевскую σ-алгебру на прямой, вероятность определяется единственным образом с помощью так называемой теоремы о продолжении меры. $\square$

Глава 2

КЛАССИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТИ

В этой главе мы рассмотрим некоторые вероятностные пространства, объединенные интуитивным понятием симметрии или «равновероятности». В соответствии с тем, какое пространство элементарных исходов рассматривается — конечное или непрерывное, понятие «равновероятности» реализуется в двух схемах: *классической* и *геометрической вероятности*. Как всегда, право на жизнь вышеперечисленных схем определяется практикой. В различных учебниках приводятся результаты многочисленных статистических опытов, подтверждающих корректность понятия «равновероятность».

1. Классическая вероятность

Понятие классической вероятности мы рассмотрим сначала на примере нашей «палочки-выручалочки» — монеты. Предположим, что опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. Как мы теперь знаем, пространство элементарных исходов Ω содержит два элементарных исхода: ω_1 — выпадение «герба» и ω_2 — выпадение «цифры», а σ-алгебра $\mathfrak{B}$ насчитывает 4 события: $\varnothing$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$ и Ω. Ясно, что обычная монета обладает свойством симметрии, так как у нас нет оснований предпочесть «герб» «цифре», т. е. элементарный исход ω_1 элементарному исходу ω_2. Поэтому естественно сопоставить обоим элементарным исходам одинаковую вероятность $\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2)$. Так как согласно аксиоме сложения $\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\omega_1) + \mathsf{P}(\omega_2)$, а в силу аксиомы нормированности $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, то получаем $\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = 1/2$. Таким образом, каждому из четырех имеющихся в σ-алгебре $\mathfrak{B}$ событий мы ставим в соответствие вероятности: $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = 1/2$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть пространство элементарных исходов Ω состоит из конечного числа n *равнозначных исходов* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (σ-алгебра событий содержит 2^n событий). Тогда каждому элементарному исходу ω_i ($i = 1, \ldots, n$) поставим в соответствие одну и ту же вероятность $\mathsf{P}(\omega_i) = 1/n$. Ясно, что в силу аксиомы сложения для определения вероятности любого события A необходимо подсчитать число m элементарных исходов ω, содержащихся в A, и затем положить

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n}\,.$$

Таким образом, в *классической схеме вероятность любого события A определяется как отношение числа m благоприятных для события A элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n.*

Пример 1. Определим вероятность выпадения на игральной кости четного числа очков (событие A). В этом случае общее число элементарных исходов $n = 6$ (σ-алгебра $\mathfrak{B}$ состоит из $2^6 = 64$ событий), а число благоприятных исходов $m = 3$ (выпадение«двойки», «четверки» и «шестерки»). Искомая вероятность $\mathsf{P}(A) = 3/6 = 1/2$. □

Пример 2. Производится трехкратное подбрасывание монеты. Определим вероятность события A, заключающегося в выпадении «герба» хотя бы один раз. Выпишем все элементарные исходы:

$\omega_1 =$ «герб»–«герб»–«герб», $\omega_2 =$ «герб»–«цифра»–«герб»,

$\omega_3 =$ «герб»–«герб»–«цифра», $\omega_4 =$ «герб»–«цифра»–«цифра»,

$\omega_5 =$ «цифра»–«герб»–«герб», $\omega_6 =$ «цифра»–«цифра»–«герб»,

$\omega_7 =$ «цифра»–«герб»–«цифра», $\omega_8 =$ «цифра»–«цифра»–«цифра».

Всего имеем $n = 8$ элементарных исходов (σ-алгебра $\mathfrak{B}$ состоит из $2^8 = 256$ событий). Благоприятными из них для события A являются $m = 7$ исходов: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$. Значит, $\mathsf{P}(A) = 7/8$.

Вероятность $\mathsf{P}(A)$ можно подсчитать и другим способом. Дополнительным к A будет событие $\overline{A}$, заключающееся в невыпадении ни одного «герба». Событие $\overline{A}$ состоит только из одного элементарного исхода ω_8, поэтому $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1/8$. Переходя снова к событию A, имеем $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 7/8$. Отметим, что привлечение дополнительного события позволяет иногда существенно упростить численный подсчет вероятности. □

Пример 3. Найдем вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадает не менее четырех очков (событие A). Поскольку при бросании двух игральных костей может выпасть от 2 до 12 очков, а рассматриваемое событие A состоит в выпадении $4, 5, \ldots, 12$ очков, то удобно перейти к дополнительному событию $\overline{A}$ — выпадению двух или трех очков. Пространство элементарных исходов состоит из 36 исходов — пар (1,1), (1,2), (2,1), (1,3) и т. д. (заметим, что пары (1,2) и (2,1) представляют собой разные элементарные исходы, поскольку выпадение одного очка на первой кости и двух на второй — не то же самое, что двух очков на первой кости и одного очка на второй). Благоприятными для события $\overline{A}$ будут элементарные исходы (1,1), (1,2) и (2,1). Значит, $m_{\overline{A}} = 3$, $\mathsf{P}(\overline{A}) = 3/36 = 1/12$ и $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 11/12$. □

Пример 4. Из колоды в 36 игральных карт наудачу выбирается одна. Определим вероятность того, что она окажется тузом (событие A). Из колоды мы можем выбрать любую из 36 карт ($n = 36$). Тузов в колоде 4 ($m = 4$). Таким образом, $\mathsf{P}(A) = 4/36 = 1/9$. □

2. Элементы комбинаторики в теории вероятностей

Примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, имели ту характерную особенность, что для них нетрудно было подсчитать как общее число элементарных исходов, так и число исходов, благоприятных для данного события. Однако именно этот подсчет и представляет наибольшую трудность при решении более сложных задач на классическую вероятность. Для того чтобы иметь некоторые стандартные приемы при расчетах по схеме классической вероятности, приведем основную формулу комбинаторики и рассмотрим понятия перестановки, размещения и сочетания.

Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа состоит из n_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k,$$

называемым *основной формулой комбинаторики*.

Для доказательства этой формулы рассмотрим сначала случай $k = 2$ и перенумеруем все элементы первой группы числами от 1 до n_1, а второй — от 1 до n_2. Тогда каждый возможный способ выбора двух элементов отождествим с парой чисел (i, j), где $i = 1, \ldots, n_1$, $j = 1, \ldots, n_2$. Очевидно, что таких пар $n_1 n_2$. Для окончания доказательства достаточно воспользоваться методом математической индукции. Так, для $k = 3$ всевозможные способы выбора трех элементов можно отождествить с тройками (i, j, l). Поскольку первые два элемента можно выбрать $n_1 n_2$ способами, то все три элемента можно выбрать $N = (n_1 n_2) n_3 = n_1 n_2 n_3$ способами.

В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т. е. $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, можно считать, что каждый раз выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно n^k. Такой способ выбора носит название *выборки с возвращением*.

Перестановкой из n элементов называется любой *упорядоченный набор* этих элементов. Так, всевозможными перестановками чисел 1, 2, 3 являются: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ и $(3, 2, 1)$. Для определения числа различных перестановок из n элементов, которое мы будем обозначать через P_n, заметим, что на первом месте перестановки может стоять любой из n элементов, на втором — любой из $n - 1$ оставшихся, на третьем — любой из остальных $n - 2$ и т. д. В силу основной формулы комбинаторики (в данном случае мы имеем n групп элементов размеров n, $n - 1, \ldots,$ 1) получаем

$$P_n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!\,.$$

Размещением из n элементов по m называется любой *упорядоченный набор* из m различных элементов, выбранных из общей совокупности в n элементов. Выпишем для примера все размещения из четырех чисел 1, 2, 3, 4 по два: (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3). Число размещений $(n)_m$ (используется также запись A_n^m) подсчитывается точно так же, как и число перестановок: на первом месте может находиться любой из n элементов, на втором — любой из $n - 1$ оставшихся, $\ldots$, на m-м месте — любой из $n - m + 1$ элементов. Снова воспользовавшись основной формулой комбинаторики (выбор осуществляется из групп размеров n, $n-1, \ldots, n-m+1$), имеем

$$(n)_m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

Заметим, что способ выбора, приводящий к перестановкам и размещениям, носит название *выборки без возвращения*.

Сочетанием из n элементов по m называется любой *неупорядоченный набор* из m различных элементов, выбранных из общей совокупности в n элементов. Сочетаниями из четырех чисел 1, 2, 3, 4 по два являются: (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) и (3,4). Для определения числа сочетаний $\binom{n}{m}$ (употребляется также запись C_n^m) заметим, что сочетание от размещения отличается только тем, что входящие в него элементы неупорядочены. Но, как мы знаем, m элементов можно упорядочить $m!$ способами. Значит, каждое сочетание соответствует $m!$ размещениям. Поэтому $(n)_m = m!\binom{n}{m}$ или

$$\binom{n}{m} = \frac{(n)_m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}\,.$$

Вооружившись знанием формул для чисел перестановок, размещений и сочетаний, продолжим рассмотрение задач на классическую вероятность.

Пример 5. На четырех карточках написаны буквы *в*, *л*, *к* и *о*. Карточки перемешиваются и выкладываются в ряд. Найдем вероятность того, что образовавшееся слово будет «волк» (событие A). В соответствии с комбинаторными принципами для определения общего числа элементарных исходов нужно подсчитать число упорядоченных наборов из четырех букв. Мы имеем дело с числом перестановок, поэтому число элементарных исходов $n = 4! = 24$. Слово «волк» образует только одна перестановка, т. е. число благоприятных для события A элементарных исходов $m = 1$. Поэтому $\mathsf{P}(A) = 1/24$. $\square$

Пример 6. Из колоды в 36 игральных карт вынимаются наудачу 3 карты. Найдем вероятность того, что все эти 3 карты будут одной масти (событие A). Для большей наглядности приведем два решения.

В первом решении будем предполагать, что выбор производится последовательно по одной карте и нужно учитывать его порядок. Тогда результат выбора отождествим с размещением из 36 карт по 3, и общее число элементарных исходов $n = (36)_3 = 36\cdot 35\cdot 34$. Для подсчета общего числа благоприятных исходов предположим сначала, что мы последовательно вынимаем карты пиковой масти. Поскольку «пик» в колоде 9, то число способов, которыми мы можем последовательно вынуть 3 карты пиковой масти, равно числу размещений из 9 карт по 3, т. е. $(9)_3 = 9\cdot 8\cdot 7$. Но благоприятными для нас будут также такие ситуации, при которых мы вынимаем 3 «трефы», 3 «бубны», 3 «червы». Поэтому для определения общего числа благоприятных исходов нужно число размещений из 9 по 3 умножить на 4: $m = 4\cdot(9)_3 = 4\cdot 9\cdot 8\cdot 7$. Значит, $\mathsf{P}(A) = 4\cdot(9)_3/(36)_3 = 4/85$.

Во втором решении мы не будем учитывать порядок выбора карт. Тогда общее число элементарных исходов определяется уже как число сочетаний из

36 карт по 3, т. е. $n = \binom{36}{3} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Однако и при подсчете числа благоприятных исходов мы должны помнить, что порядок выбора несуществен, т. е. $m = 4 \cdot \binom{9}{3} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Нетрудно видеть, что окончательное значение $\mathsf{P}(A)$ будет тем же самым, что и в первом решении. Рекомендуем любознательному читателю еще раз разобрать этот пример и объяснить, почему в обоих случаях получился один и тот же ответ. □

В заключение этого параграфа мы рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся в физической практике задачи о распределении частиц по ячейкам.

Гипергеометрическое распределение. Предположим, что имеется $n = n_1 + \ldots + n_k$ различных частиц, причем из них n_1 частиц первого типа, n_2 — второго типа, …, n_k — k-го типа. Случайным образом из этих n частиц выбирается $m = m_1 + \ldots + m_k$ частиц. Найдем вероятность того, что среди выбранных окажется ровно $m_1 \leqslant n_1$ частиц первого типа, $m_2 \leqslant n_2$ — второго типа, …, $m_k \leqslant n_k$ — k-го типа (событие A). Поскольку порядок выбора несуществен, то при определении общего числа исходов и числа благоприятных исходов мы должны пользоваться числом сочетаний. Общее число элементарных исходов есть число сочетаний из n частиц по m — $\binom{n}{m}$. Далее, m_1 частиц первого типа мы можем выбрать $\binom{n_1}{m_1}$ способами, m_2 частиц второго типа $\binom{n_2}{m_2}$ способами, …, m_k частиц k-го типа $\binom{n_k}{m_k}$ способами. При этом любой способ выбора частиц определенного типа комбинирует с любыми способами выбора частиц остальных типов и, значит, число благоприятных событию A исходов равно $\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\ldots\binom{n_k}{m_k}$. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = P(m_1, \ldots, m_k) = \frac{\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\ldots\binom{n_k}{m_k}}{\binom{n}{m}}.$$

Определенные последней формулой вероятности $P(m_1, \ldots, m_k)$ носят название гипергеометрического распределения.

Пример 7. Найдем вероятность того, что в «Спортлото 6 из 49» [1] будет угадано 3 номера (событие A_3), 4 номера (A_4), 5 номеров (A_5) и 6 номеров (A_6). Мы имеем дело с гипергеометрическим распределением, в котором $n = 49$,

[1] В конце прошлого столетия в нашей стране были широко распространены разные варианты игры «Спортлото», наиболее популярным из которых являлся вариант «Спортлото 6 из 49». Купив карточку за 30 коп. (что примерно соответствует нынешним 30 руб.), нужно было вычеркнуть 6 номеров из 49 возможных. Аналогично, во время розыгрыша из 49 шаров выбирались 6. Угадавший от 3 до 6 номеров, мог получить выигрыш, который для всех 6 угаданных номеров составлял 10 000 тыс. руб.

$k = 2$, $n_1 = 6$, $n_2 = 43$ и $m = 6$. Для события A_3 $m_1 = 3$ и $m_2 = 3$, для события A_4 $m_1 = 4$ и $m_2 = 2$, для события A_5 $m_1 = 5$ и $m_2 = 1$ и, наконец, для события A_6 $m_1 = 6$ и $m_2 = 0$. Поэтому

$$\mathsf{P}(A_3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \cong 0{,}0176, \qquad \mathsf{P}(A_4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \cong 0{,}00097,$$

$$\mathsf{P}(A_5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \cong 0{,}000\,018, \qquad \mathsf{P}(A_6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} \cong 7 \cdot 10^{-8}. \qquad \square$$

Статистика Бозе–Эйнштейна. Предположим, что n неразличимых частиц распределяются по m ячейкам. Различными считаются распределения частиц по ячейкам, отличающиеся только числом попавших в каждую ячейку частиц. Такое распределение носит в физике название статистики Бозе–Эйнштейна. Найдем общее число различных размещений в статистике Бозе–Эйнштейна (число элементарных исходов). Для этого рассмотрим последовательность из $n + m - 1$ элементов (рис. 1) и выберем из них $m - 1$ «черный» элемент. Если

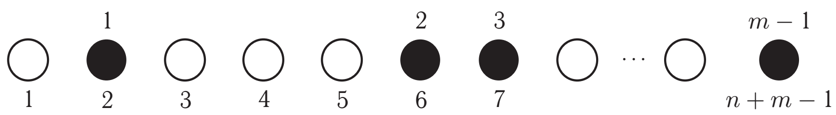

Рис. 1

считать «белый» элемент частицей, а «черный» — перегородкой, то, как нетрудно видеть, существует взаимно однозначное соответствие между способами выбора $m - 1$ «черного» элемента и размещениями частиц в статистике Бозе–Эйнштейна. Так, на приведенном рисунке в первую ячейку попала одна частица, во вторую — три, третья оказалась пустой, …, последняя, m-я ячейка также оказалась пустой. Поэтому общее число размещений равно $\binom{n+m-1}{m-1}$. Найдем теперь вероятность попадания в фиксированную ячейку ровно k частиц (событие A). Заметим, что если в этой фиксированной ячейке уже находится k частиц, то остальные $n - k$ частиц должны быть распределены по оставшимся $m - 1$ ячейкам, а это, как мы знаем, можно сделать $\binom{n-k+m-1-1}{m-1-1} = \binom{n+m-k-2}{m-2}$ способами. Следовательно, $\mathsf{P}(A) = \binom{n+m-k-2}{m-2} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1}$. Отметим, что статистике Бозе–Эйнштейна подчиняются фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие четное число частиц.

Статистика Ферми–Дирака. В статистике Ферми–Дирака так же, как и в статистике Бозе–Эйнштейна, n неразличимых частиц распределяются по m ячейкам ($n \leqslant m$), однако в каждой ячейке не может находиться более одной частицы. Число различных размещений (элементарных исходов) совпадает с числом способов, которыми мы можем выбрать (без учета порядка выбора) n занятых ячеек из общего числа ячеек m, т. е. равно $\binom{m}{n}$. Пусть событие A — заняты фиксированные k ячеек ($k \leqslant n$). Тогда оставшиеся $m-k$ ячеек должны быть заполнены $n-k$ частицами, а это можно сделать $\binom{m-k}{n-k}$ способами. Поэтому $\mathsf{P}(A) = \binom{m-k}{n-k} \Big/ \binom{m}{n}$. Статистике Ферми–Дирака подчиняются электроны, протоны и нейтроны.

Статистика Максвелла–Больцмана. Предполагая, что n различных частиц распределяются по m ячейкам без ограничений на число попавших в каждую ячейку частиц, получаем статистику Максвелла–Больцмана. Поскольку каждая из n частиц может попасть в любую из m ячеек, то общее число элементарных исходов равно m^n. Событие A заключается в том, что в первую ячейку попало n_1 частиц, во вторую — n_2 частиц, ..., в m-ю — n_m частиц ($n_1 + \ldots + n_m = n$). Число благоприятных для события A исходов подсчитаем следующим образом. В первую ячейку могут попасть любые n_1 частиц из n имеющихся первоначально. Поскольку порядок выбора частиц несуществен, то это можно сделать $\binom{n}{n_1}$ способами. Как только первая ячейка заполнена, у нас остается $n-n_1$ частиц, и вторую ячейку мы можем заполнить $\binom{n-n_1}{n_2}$ различными способами. Продолжая эту процедуру и используя основную формулу комбинаторики, получаем, что число благоприятных событию A способов равно

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{m-1}}{n_m} =$$
$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\ldots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{m-1})!}{n_m!\,0!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!}\,.$$

Таким образом,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!\cdot m^n}\,.$$

Отметим, что статистика Максвелла–Больцмана представляет собой частный случай так называемой полиномиальной схемы, которую мы рассмотри в параграфе 7 гл. 4. Статистике Максвелла–Больцмана подчиняется идеальный газ.

П р и м е р 8. Поток из 4 частиц поступает в счетчик, состоящий из трех датчиков. Каждая частица с одинаковой вероятностью может попасть в один и только один из этих датчиков. Поток считается зарегистрированным, если он отмечен хотя бы двумя датчиками. Найдем вероятность события A,