Кибзун А.И.
Горяинова Е.Р.
Наумов А.В.

Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами

А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова,
А.В. Наумов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

БАЗОВЫЙ КУРС
С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

Под редакцией А.И. Кибзуна

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 519.2
ББК 22.17
К38

Кибзун А. И., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. **Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами:** Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 232 с. — ISBN 978-5-9221-0836-2.

Книга предназначена для начального ознакомления с основами теории вероятностей и математической статистики и развития навыков решения практических задач.

Основное внимание уделяется краткости изложения полного курса «Теории вероятностей и математической статистики», состоящего из теоретического и практического материала. Структура изложения максимально приближена к лекционным и практическим занятиям. Пособие может одновременно играть роль учебника, задачника и справочника.

Для преподавателей ВУЗов, инженеров и студентов технических и экономических специальностей.

Ил. 38. Библиогр. 22 назв.

Рецензенты:
кафедра математического моделирования Московского
государственного технического университета имени Н.Э. Баумана
(зав. кафедрой, д.ф.-м.н. профессор А.П. Крищенко);
д.ф.-м.н. профессор А.И. Матасов

ISBN 978-5-9221-0836-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2007
© А. И. Кибзун, Е. Р. Горяинова,
А. В. Наумов, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора 6
Предисловие 7
Список основных сокращений и обозначений 10

Глава I. **Случайные события** 13

§ 1. Основные понятия 13
1.1. Пространство элементарных событий (13). 1.2. Алгебра событий (14). 1.3. Вероятность события (15).

§ 2. Основные свойства вероятности 17
2.1. Аксиоматические свойства (17). 2.2. Свойства вероятности для полной группы событий (19). 2.3. Типовые задачи (21).

§ 3. Основные формулы вычисления вероятностей 30
3.1. Формула умножения вероятностей (30). 3.2. Формула сложения вероятностей (31). 3.3. Формула полной вероятности (33). 3.4. Формула Байеса (33). 3.5. Формула Бернулли (34). 3.6. Типовые задачи (35).

§ 4. Задачи для самостоятельного решения 41

Глава II. **Случайные величины** 53

§ 5. Основные понятия 53
5.1. Функция распределения (53). 5.2. Дискретные случайные величины (54). 5.3. Непрерывные случайные величины (56). 5.4. Числовые характеристики случайных величин (58). 5.5. Характеристическая функция (61). 5.6. Квантиль (63). 5.7. Типовые задачи (64).

§ 6. Основные дискретные распределения 69
6.1. Биномиальное распределение (69). 6.2. Распределение Бернулли (71). 6.3. Распределение Пуассона (72). 6.4. Типовые задачи (74).

§ 7. Основные непрерывные распределения 78
7.1. Равномерное распределение (78). 7.2. Экспоненциальное распределение (80). 7.3. Нормальное распределение (81). 7.4. Распределение Вейбулла (84). 7.5. Логарифмически нормальное распределение (85). 7.6. Типовые задачи (86).

§ 8. Задачи для самостоятельного решения 89

Глава III. **Случайные векторы** 96

§ 9. Двумерные случайные величины 96
9.1. Функция распределения (96). 9.2. Плотность распределения (99). 9.3. Типовые задачи (103).

§ 10. Условные распределения 108
10.1. Условная функция распределения (108). 10.2. Условная плотность распределения (110). 10.3. Условное математическое ожидание (112). 10.4. Корреляционная зависимость (114). 10.5. Двумерное нормальное распределение (116). 10.6. Типовые задачи (118).
§ 11. Многомерные случайные величины 122
11.1. Основные характеристики многомерных СВ (122). 11.2. Многомерное нормальное распределение (125). 11.3. Биржевой парадокс (126). 11.4. Типовые задачи (128).
§ 12. Задачи для самостоятельного решения 131

Глава IV. **Случайные последовательности** 135

§ 13. Закон больших чисел 135
13.1. Виды сходимости последовательностей СВ (135). 13.2. Сходимость усредненной суммы независимых СВ (138). 13.3. Типовые задачи (141).
§ 14. Центральная предельная теорема 144
14.1. Сходимость нормированной суммы независимых СВ (144). 14.2. Сходимость частоты (147). 14.3. Типовые задачи (149).
§ 15. Задачи для самостоятельного решения 152

Глава V. **Математическая статистика** 155

§ 16. Основные выборочные характеристики 155
16.1. Основные понятия (155). 16.2. Вариационный ряд (156). 16.3. Выборочная функция распределения (157). 16.4. Гистограмма (159). 16.5. Выборочные моменты (160). 16.6. Типовые задачи (163).
§ 17. Основные распределения в статистике 165
17.1. Распределение хи-квадрат (165). 17.2. Распределение Стьюдента (167). 17.3. Распределение Фишера (168).
§ 18. Точечные оценки 169
18.1. Основные понятия (169). 18.2. Метод максимального правдоподобия (174). 18.3. Метод моментов (177).
§ 19. Интервальные оценки 178
19.1. Основные понятия (178). 19.2. Использование центральной статистики (179). 19.3. Использование точечной оценки (185). 19.4. Типовые задачи (187).
§ 20. Проверка статистических гипотез 188
20.1. Основные понятия (188). 20.2. Проверка гипотезы о значении параметра (190). 20.3. Проверка гипотезы о виде закона распределения (191). 20.4. Проверка гипотезы о независимости двух СВ (193). 20.5. Проверка гипотезы об однородности наблюдений (194). 20.6. Типовые задачи (195).
§ 21. Задачи для самостоятельного решения 201

Глава VI. **Приложения математической статистики** 204

§ 22. Регрессионный анализ 204
22.1. Модели регрессии (204). 22.2. Схема Гаусса–Маркова (205). 22.3. Простая линейная регрессия (208). 22.4. Типовые задачи (211).

§ 23. Метод статистических испытаний 213
23.1. Основные понятия (213). 23.2. Вычисление вероятности события (214). 23.3. Вычисление определенного интеграла (216). 23.4. Типовые задачи (220).

§ 24. Задачи для самостоятельного решения 220

Ответы 222
Таблицы 225
Список литературы 228
Предметный указатель 229

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В 1973 году на факультете прикладной математики Московского авиационного института (государственного технического университета) академиком В.С. Пугачевым была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики. За прошедшее время на кафедре под научно-методическим руководством В.С. Пугачева были созданы и прочитаны оригинальные учебные курсы по таким дисциплинам, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы», «Математический анализ» и др. В 2002 г. в издательстве «Физматлит» вышла в свет серия из трех учебных пособий, которые отражали накопленный опыт преподавания этих дисциплин студентам МАИ. Отличительной чертой данных пособий являлось максимально лаконичное изложение материала при достаточно полном описании современного состояния изучаемых предметов. Кроме того, значительную часть пособий занимали многочисленные примеры и задачи с решениями, что позволяло использовать эти пособия не только для чтения лекционных курсов, но и для проведения практических и лабораторных занятий. Структура изложения курсов была такова, что эти пособия могли одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Поэтому пособия оказались полезны как преподавателям и студентам, так и инженерам. Прошедшие три года показали, что авторы сделали правильный расчет, выбрав такую структуру курсов, так как эти пособия пользовались большой популярностью. Учитывая пожелания читателей, издательство готовит переиздание цитируемых пособий. Первым из них переиздается «Теория вероятностей и математическая статистика». Авторы внесли исправления в текст первого варианта пособия, устранив опечатки. Кроме того, формулировки некоторых задач уточнены, в ряд параграфов внесены дополнения. В частности, последние две главы дополнены доказательствами и новыми утверждениями. При этом объем пособия практически не изменился, сохранив свою лаконичность.

Проф., д.ф.-м.н. А.И. Кибзун

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателей предлагается учебное пособие по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (ТВ и МС), который читался в течение многих лет на различных факультетах Московского государственного авиационного института (МАИ) с использованием учебных программ, соответствующих большинству стандартов для технических и экономических специальностей. Характерной особенностью данного пособия является его многоцелевое назначение. При его написании была сделана попытка выполнить следующие требования:

1) лаконичность изложения, свойственную конспекту лекций;

2) детальное доказательство всех утверждений, характерное для учебников;

3) наличие типовых задач с решениями, а также задач для самостоятельного решения, что отличает задачники;

4) систематизированный и автономно замкнутый материал, присущий справочникам;

5) наличие формализованных ссылок на установленные ранее свойства и введенные понятия, что характерно для компьютерных учебников.

Насколько эта попытка удалась авторам — судить читателю.

Несколько слов более подробно об этих отличительных чертах. Весь курс состоит из 18 параграфов, которые соответствуют темам примерно 18 лекциий и 18 практических занятий продолжительностью по два академических часа, и 6 параграфов, содержащих задачи для самостоятельного решения. Первые 16 тем соответствуют объему стандартного курса ТВ и МС для технических и экономических специальностей. Кроме того, книга содержит дополнительный раздел из двух тем, посвященный приложениям математической статистики, которые являются актуальными при решении прикладных задач. Весь материал удалось разместить на 14,5 печатных листах (п. л.). Заметим, что объемы известных учебников и задачников по ТВ и МС достигают более 20 п. л. каждый. Так как эти учебники содержат информацию, выходящую за рамки стандартной учебной программы, то студентам, как правило, трудно самостоятельно найти интересующий их материал или разобраться в нем. По мнению авторов, в лаконично изложенном пособии, имеющем четкую иерархическую структуру, студентам значительно проще ориентироваться. Кроме того, если курс читается по данному пособию, то студентам не требуется записывать «живые» лекции, и на лекциях остается

лишь прояснить непонятые вопросы. Большинство учебников по ТВ и МС отличается от предлагаемого еще и тем, что начинающему преподавателю, даже с хорошей математической подготовкой, очень сложно прочитать по ним реальный курс лекций. Это связано с тем, что в учебниках нет дробления материала на последовательные лекции и семинарские занятия, и поэтому при ограниченном их числе преподавателю бывает трудно решить, какие разделы ТВ и МС следует прочитать, а какие нет, не нарушая при этом стройности изложения.

Данная книга содержит несколько больше материала, чем необходимо для прочтения 18 лекций и проведения 18 практических занятий. В частности, все утверждения аккуратно доказываются, но в реальных лекциях некоторые из этих доказательств могут быть опущены по усмотрению лектора. В конце каждого параграфа (темы) имеются типовые задачи с решениями, которые могут послужить основой для проведения практических занятий. В конце каждой главы приводятся задачи, предназначенные для самостоятельного решения, а также задачи повышенной сложности (отмеченные звездочкой). Ответы к задачам для самостоятельного решения даны в конце книги. Детальность доказательств и наличие дополнительных задач позволяют студенту самостоятельно изучить материал, не рассматривавшийся на лекциях или семинарах.

В обычном учебнике при доказательстве теорем часто отсутствуют ссылки на понятия или свойства, введенные или установленные в предыдущих разделах и главах. При этом предполагается, что студент усвоил весь предыдущий материал и все помнит. К сожалению, это предположение на практике не всегда выполняется. И тогда студенту, встретившему ссылку на материал, который он не помнит, остается перечитать весь учебник заново либо отложить его в сторону. В предлагаемом пособии вывод каждой формулы сопровождается не абстрактными «отсылками» к предыдущим разделам, а четкими ссылками на изученные свойства и введенные понятия. В пособии присутствует сравнительно немного символических объектно-ориентированных сокращений, тем не менее с ними лучше познакомиться заранее, до начала чтения пособия. Для удобства читателя все сокращения, символические записи и основные обозначения собраны вместе в отдельный список.

Следует отметить, что большинство учебников по ТВ и МС, опубликованных в нашей стране, либо вообще не содержат прикладных примеров, либо эти примеры имеют однобокую (например, военную) окраску. Но, очевидно, что для эффективного использования на практике полученных теоретических знаний студент должен уметь самостоятельно строить математические модели для конкретных прикладных задач. По этой причине в данное пособие вставлены разнообразные примеры технического и экономического характера, позволяющие студенту глубже понять физический и экономический

смысл изучаемого им курса.

Пособие имеет четкую иерархическую структуру, роднящую его со справочниками. в частности, имеется подробный предметный указатель. Вся информация, содержащаяся в книге, подразделена на блоки, называемые замечаниями, примерами, теоремами или свойствами. Отметим, что «вольный» текст, отражающий мнение авторов, встречается только в замечаниях. Таким образом, каждый параграф (тема) состоит из пунктов (разделов), названия которых вынесены в оглавление, а каждый раздел состоит из этих блоков. В каждом параграфе нумерация блоков является автономной. Поэтому легко организуются ссылки из последующих пунктов на предыдущие.

На основании данного пособия разработан компьютерный учебник, который позволяет мгновенно находить отмеченные выше ссылки и получать многочисленные комментарии и пояснения. Комментарии можно получить как из оглавления и предметного указателя, так и из самого текста. Более детально с возможностями компьютерного учебника можно ознакомиться в [9].

При написании книги авторы ориентировались на известные учебники по ТВ и МС. в частности, многие технические примеры взяты из [17], экономические примеры из [22], а парадоксальные примеры из [18]. Лаконичность изложения в книгах [14], [19] служила образцом для авторов. Большая часть справочного материала заимствована из [12]. Структура пособия во многом повторяет учебники [1], [17]. Следует отметить, что настоящее пособие является не первой попыткой изложить курс ТВ и МС в таком виде. Авторы в своей работе в значительной мере опирались на предшествующие версии пособий по предлагаемому курсу [10], [5]. Но данное пособие было написано практически заново, в него были включены дополнительные примеры и усилена строгость изложения материала.

Авторы благодарят В.А. Ефремова, А.Р. Панкова, Е.Н. Платонова и К.В. Семенихина за замечания, критику и помощь при подготовке рукописи.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Сокращения.

ММП — метод максимального правдоподобия
МНК — метод наименьших квадратов
МО — математическое ожидание
СВ — случайная величина
СП — случайная последовательность
п.н. — почти наверное
с.к. — среднее квадратическое
ЗБЧ — закон больших чисел
ЦПТ — центральная предельная теорема

2. Математические символы.

$A\backslash B$ — разность событий A и B
$A+B$ — сумма событий A и B
AB — произведение событий A и B
$\exp(x) \triangleq e^x$
$\mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-столбец с компонентами $x_1, \ldots, x_n$
$\omega \in A$ — элемент ω принадлежит множеству A
$\omega \notin A$ — элемент ω не принадлежит множеству A
$A \subset B$ — событие A влечет появление события B
$k = \overline{1,n}$ — множество натуральных чисел от 1 до n
$\triangleq$ — равенство по определению
$\equiv$ — тождество
$\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ — сумма величин x_k, $k = \overline{1,n}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ — сумма событий A_k, $k = \overline{1,n}$
$\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$ — произведение величин x_k, $k = \overline{1,n}$
$\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ — произведение событий A_k, $k = \overline{1,n}$
$\mathbf{M}[X]$ — математическое ожидание СВ X
$\mathbf{D}[X]$ — дисперсия СВ X
$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A
$\mathbb{R}^1$ — действительная ось
$\det K$ — определитель матрицы K

A^T — транспонированная матрица
I — единичная матрица

3. Обозначения.

A, B, C — случайные события
$\overline{A}$ — противоположное событие
ω — элементарное событие
Ω — пространство элементарных событий, достоверное событие
$\varnothing$ — невозможное событие
$W_n(A)$ — частота появления события A в n опытах
$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A
$\mathbf{P}(A|B)$ — условная вероятность события A относительно B
H_k — k–я гипотеза
C_n^m — число сочетаний из n по m
X, Y, Z — случайные величины
x, y, z — реализации СВ
$\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ — множество ω, для которых $X(\omega) \leqslant x$
$F(x) \triangleq F_X(x)$ — функция распределения СВ X
$f(x) \triangleq f_X(x)$ — плотность распределения СВ X
$\mathbf{P}\{X \leqslant x\}$ — вероятность события $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$
$p_i \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i\}$ — вероятность события $\{X = x_i\}$
$m_X \triangleq \mathbf{M}[X]$ — математическое ожидание (МО) СВ X
ν_r, μ_r — начальный и центральный моменты порядка r
$d_X \triangleq \mathbf{D}[X]$ — дисперсия СВ X
σ_X — среднее квадратическое отклонение СВ X
$\overset{\circ}{X}$ — центрированная СВ
$\overset{*}{X}$ — нормированная СВ
$X \sim \mathbf{Bi}(n; p)$ — СВ X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p
$X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ — СВ X имеет распределение Пуассона с параметром a
$X \sim \mathbf{R}(a; b)$ — СВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$
$X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ — СВ X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ
$X \sim \mathbf{N}(m; \sigma^2)$ — СВ X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ
$\Phi_0(x)$ — функция Лапласа
$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера
x_α — квантиль уровня α функции распределения $F(x)$ СВ X
$F(x, y)$ — функция распределения двумерной СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$
$f(x, y)$ — плотность распределения двумерной СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$
k_{XY} — ковариация СВ X и Y

r_{XY} — коэффициент корреляции СВ X и Y
$\mathbf{M}[Y|X]$ — условное математическое ожидание Y относительно X
$Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — вектор-столбец из элементов $X_1, \ldots, X_n$
$F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция распределения СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$
$f(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность распределения СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$
K — ковариационная матрица с элементами k_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$
R — корреляционная матрица
$p_{ij} \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$
$\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — случайная последовательность (СП)
$X_n \xrightarrow{F} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X по распределению
$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X по вероятности
$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X в среднем квадратическом
$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X почти наверное
$\widehat{\nu}_r$, $\widehat{\mu}_r$ — выборочные начальные и центральные моменты порядка r
$\widehat{m}_X \triangleq \widehat{\nu}_1$ — выборочное среднее
$\widehat{d}_X \triangleq \widehat{\mu}_2$ — выборочная дисперсия
$\widehat{s}_X \triangleq \dfrac{n}{n-1}\,\widehat{d}_X$ — несмещенная выборочная дисперсия
$Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка объема n
$z_n \triangleq \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ — реализация выборки объема n
$X \sim \chi^2(n)$ — СВ X имеет распределение хи–квадрат с n степенями свободы
$X \sim \mathbf{S}(n)$ — СВ X имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы
$X \sim \mathbf{F}(n; m)$ — СВ X имеет распределение Фишера с n и m степенями свободы
$\widehat{\theta}(Z_n)$ — выборочная оценка параметра θ
$L(z_n, \theta)$ — функция правдоподобия

4. Ссылки.

Ai — i–я аксиома вероятности, $i = \overline{1,4}$
$i)$A — i–е свойство случайных событий, $i = \overline{1,12}$
$i)$P — i–е свойство вероятности, $i = \overline{1,17}$
$i)F(x)$ — i–е свойство функции распределения, $i = \overline{1,7}$
$i)f(x)$ — i–е свойство плотности вероятности, $i = \overline{1,5}$
$i)g(t)$ — i–е свойство характеристической функции, $i = \overline{1,4}$
$i)\, m_X$ — i–е свойство МО и дисперсии, $i = \overline{1,9}$
$i)\, k_{XY}$ — i–е свойство ковариации, $i = \overline{1,6}$
$i)$M$[X]$ — i–е свойство моментов многомерных СВ, $i = \overline{1,5}$
$i)\, \widehat{m}_X$ — i–е свойство выборочных моментов, $i = \overline{1,7}$

ГЛАВА I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Основные понятия

1.1. Пространство элементарных событий. *Теория вероятностей* — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при многократном повторении опыта.

Под *опытом* G понимается воспроизведение какого-либо комплекса условий для наблюдения исследуемого явления (*события*). Обычно считается, что *событие случайно* в опыте, если при неоднократном воспроизведении этого опыта оно иногда происходит, а иногда — нет, причем нельзя заранее предсказать возможный исход (событие) этого опыта. При этом наблюдается *свойство устойчивости частоты* случайного события: с увеличением числа повторений опыта значение частоты появления случайного события стабилизируется около некоторого неслучайного числа.

Пример 1.1. Пусть опыт G состоит в подбрасывании игральной кости и наблюдении числа выпавших очков X. Тогда можно ввести следующие случайные события: $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, ..., $\{X = 6\}$, $\{X \leqslant 2\}$, $\{2 < X \leqslant 6\}$, $\{X - \text{четно}\}$, $\{X - \text{нечетно}\}$ и т. д.

Возможные исходы ω опыта G называются *элементарными событиями*, если они являются взаимно исключающими и в результате опыта G одно из них обязательно происходит. Совокупность Ω всех элементарных событий ω в опыте G называется *пространством элементарных событий*.

Пространство элементарных событий — это математическая модель опыта, в которой любому *событию* ставится в соответствие некоторое подмножество пространства Ω. В общем случае каждому опыту G можно сопоставить несколько математических моделей, т. е. пространств элементарных событий.

Пример 1.2. В примере 1.1 пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, а элементарное событие ω_i состоит в том, что $\{X = i\}$, $i = \overline{1,6}$. Событие $\{X - \text{четно}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ является подмножеством пространства Ω.

Определение 1.1. Событие называется *невозможным* в опыте G, если при повторении опыта оно никогда не происходит. Ему

соответствует пустое подмножество в Ω, которое обозначают $\varnothing$.

Определение 1.2. Событие называется *достоверным* в опыте G, если при повторении опыта оно происходит всегда. Ему соответствует пространство Ω.

События будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C и т. д.

Определение 1.3. Говорят, что в опыте G событие A *влечет появление* события B, если из осуществления события A следует наступление события B, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Это обозначается так: $A \subset B$.

1.2. Алгебра событий.

Определение 1.4. События A и B называются *равными*, $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 1.5. *Суммой событий* A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что в опыте произойдет хотя бы одно из этих событий. Событию $A + B$ соответствует множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т. е. объединение множеств A и B.

Определение 1.6. *Произведением событий* A и B называется событие AB, состоящее в одновременном появлении этих событий. Событию AB соответствует множество с элементами, принадлежащими одновременно множествам A и B, т. е. пересечение множеств A и B.

Определение 1.7. *Разностью событий* A и B называется событие $A \backslash B$, состоящее в том, что событие A произойдет, а событие B — нет, т. е. событию $A \backslash B$ соответствует множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Определение 1.8. Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно заключается в непоявлении события A. Событию $\overline{A}$ соответствует множество всех элементов пространства Ω, не принадлежащих множеству A, т. е. $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Пример 1.3. Пусть опыт G заключается в проведении стрельбы наугад по квадрату «Ω», точки которого являются элементарными событиями ω. Пусть попадание в квадрат «Ω» есть достоверное событие Ω, а попадание в области «A» и «B» — события A и B. Тогда события $\overline{A}$, $A + B$, AB, $A \backslash B$ представлены на рис. 1.1.

Графические изображения на плоскости соотношений между множествами называются *диаграммами Венна.*

Определение 1.9. События A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в одном опыте, т. е. $AB = \varnothing$.

Рассмотрим основные свойства операций над событиями (свойства событий).

Свойства событий

1) $\Omega + A = \Omega$;
2) $\Omega A = A$;
3) $AA = A$ (но не A^2);
4) $A + A = A$ (но не $2A$);
5) $A + \varnothing = A$;
6) $A\varnothing = \varnothing$;
7) $(A \backslash B)(B \backslash A) = \varnothing$;
8) $A + B = B + A$;
9) $AB = BA$;
10) $C(A + B) = CA + CB$;
11) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;
12) $A + \overline{A} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

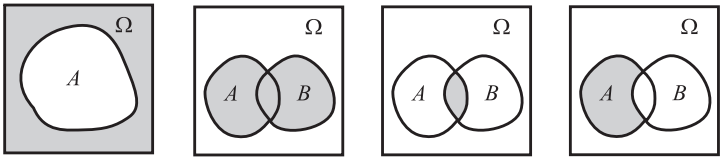

Рис. 1.1

Определение 1.10. Класс $\mathcal{F}$ подмножеств пространства Ω называется *алгеброй событий*, если $\Omega \in \mathcal{F}$ и если $AB \in \mathcal{F}$, $A + B \in \mathcal{F}$, $A \backslash B \in \mathcal{F}$ при любых $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$.

Замечание 1.1. Алгебру событий иногда называют также *алгеброй Буля*.

1.3. Вероятность события.

Определение 1.11. Пусть при n-кратном повторении опыта G событие A произошло m_A раз. *Частотой* $W_n(A)$ события A называется отношение $W_n(A) = m_A/n$.

Свойства частоты $W_n(A)$

1) $W_n(A) \geqslant 0$, так как $m_A \geqslant 0$ и $n > 0$;
2) $W_n(A) \leqslant 1$, так как $m_A \leqslant n$;
3) если при n-кратном повторении опыта несовместные события A и B появились соответственно m_A и m_B раз, то

$$W_n(A + B) \triangleq \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = W_n(A) + W_n(B).$$

Априори (заранее, до опыта) частота $W_n(A)$ является случайной, т. е. нельзя предсказать точное её значение до проведения данной

серии из n опытов. Однако природа случайных событий такова, что на практике наблюдается эффект устойчивости частот. Его суть заключается в том, что при увеличении числа опытов значение частоты практически перестает быть случайным и стабилизируется около некоторого неслучайного числа $\mathbf{P}(A)$, соответствующего данному конкретному событию A в опыте G (точные формулировки приведены в § 13, теорема 13.6).

Замечание 1.2. Число $\mathbf{P}(A)$ первоначально при становлении теории вероятностей называлось *вероятностью* события A в опыте G. Введенное понятие указывает на то, что вероятность $\mathbf{P}(A)$ характеризует частоту появления события A при многократном повторении опыта G.

Но частотное определение вероятности было неудобно по двум причинам: 1) стремление частоты события A к вероятности события происходит не в общепринятом смысле, а в вероятностном; 2) вычисление предельного значения $\mathbf{P}(A)$, к которому стремится частота, может быть невозможным вследствие значительных трудностей при проведении большого числа опытов. Поэтому рассмотрим так называемое аксиоматическое определение вероятности.

Определение 1.12. Алгебра событий $\mathcal{F}$, включающая в себя результаты сложения и умножения *счетного* числа своих элементов (т. е. замкнутая относительно этих операций), называется *σ-алгеброй*. Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ (т. е. подмножества пространства Ω) называются *случайными событиями* (или просто *событиями*).

Напомним, что множество A называется *счетным*, если между всеми элементами A и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, множество $\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ является счетным.

Определение 1.13. *Вероятностью события A* называется числовая функция $\mathbf{P}(A)$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая следующим четырем *аксиомам теории вероятностей*.

Аксиомы теории вероятностей

A1 (*неотрицательность вероятности*). Каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставится в соответствие неотрицательное число $\mathbf{P}(A)$, т. е. $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

A2 (*нормировка вероятности*). Вероятность достоверного события равна единице, т. е. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

A3 (*конечная аддитивность вероятности*). Для любых несовместных событий A и B из $\mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

A4 (*непрерывность вероятности*). Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из $\mathcal{F}$, такой, что $A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots = \varnothing$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0.$$

Аксиомы **A1**–**A3** тесно связаны со свойствами частоты. В дальнейшем аксиома **A4** и предположение о замкнутости алгебры событий $\mathcal{F}$ относительно счетного числа операций почти не используется. Отметим также, что аксиомы **A3**, **A4** о конечной аддитивности и непрерывности вероятности могут быть заменены на эквивалентную аксиому о счетной аддитивности вероятности (см. п. 3.2).

§ 2. Основные свойства вероятности

2.1. Аксиоматические свойства.

Определение 2.1. Если $\mathbf{P}(A) = 1$, но A не равно Ω, то говорят, что событие A в опыте G происходит *почти наверное* (п.н.).

Определение 2.2. Если $\mathbf{P}(A) = 0$, то говорят, что событие A *почти никогда не происходит в опыте* G.

Свойства P(A)

1) Пусть $\mathbf{P}(A) = 1$. По аксиоме **A2** $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, но из этого не следует, что $A = \Omega$ (т. е. что A является достоверным событием).

2) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, т. е. вероятность невозможного события равна нулю. Во-первых, $\varnothing \in \mathcal{F}$, поскольку σ-алгебре $\mathcal{F}$ принадлежит само событие Ω и его дополнение $\overline{\Omega} \triangleq \Omega\backslash\Omega = \varnothing$. Во-вторых, $\Omega + \varnothing = \Omega$. Поэтому, с одной стороны, по аксиоме **A2** получаем $\mathbf{P}(\Omega + \varnothing) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$, с другой стороны, по аксиомам **A3** и **A2** имеем

$$\mathbf{P}(\Omega + \varnothing) = \left\| \begin{array}{l} \Omega \cdot \varnothing = \varnothing, \text{ так как собы-} \\ \text{тия } \Omega \text{ и } \varnothing \text{ несовместны} \end{array} \right\| = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\varnothing) = 1 + \mathbf{P}(\varnothing).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

3) Пусть $\mathbf{P}(A) = 0$. По свойству 2)P имеем $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, но из этого не следует, что $A = \varnothing$, т. е. событие A не обязательно является невозможным.

4) Если $A \subset B$, то $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$, т. е. вероятность монотонна. Представим множество B как $B = A + B\backslash A$ (рис. 2.1). По построению

$A(B\backslash A) = \varnothing$, следовательно, события A и $B\backslash A$ несовместны. Поэтому по аксиомам **A3** и **A1** имеем $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\backslash A) \geqslant \mathbf{P}(A)$.

5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$ для любого $A \in \mathcal{F}$. Так как $A \subset \Omega$, то из свойства 4)P и аксиомы **A2** следует $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

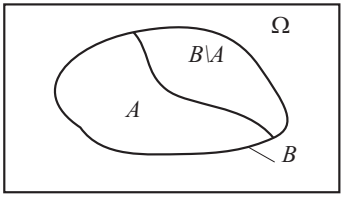

Рис. 2.1

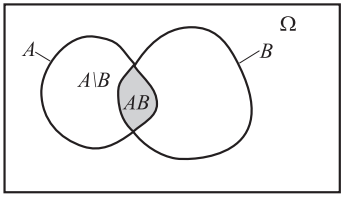

Рис. 2.2

6) $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ для любых $A, B \in \mathcal{F}$. Представим A в виде $A = A\backslash B + AB$ (рис. 2.2). Очевидно, что $(A\backslash B)(AB) = \varnothing$. Тогда по аксиоме **A3** имеем $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\backslash B) + \mathbf{P}(AB)$, откуда

$$\mathbf{P}(A\backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB).$$

Аналогичным образом поступим с событием $A + B$ (рис. 2.2). Имеем $A + B = B + A\backslash B$, причем $B(A\backslash B) = \varnothing$. Тогда из аксиомы **A3** следует

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A\backslash B).$$

Подставляя в данное выражение формулу для $\mathbf{P}(A\backslash B)$, получаем требуемое.

7) $\mathbf{P}(A + B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathcal{F}$. Из аксиомы **A1** следует $\mathbf{P}(AB) \geqslant 0$, поэтому по свойству 6)P получаем

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

По индукции можно получить неравенство для произвольных событий $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

8) на основе аксиомы **A3** по индукции можно показать, что если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

9) Пусть события A и B несовместны, т. е. $AB = \varnothing$. Тогда верно $\mathbf{P}(C(A+B)) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB)$. По предположению имеем $(CA)(CB) = \varnothing$, так как $AB = \varnothing$. И кроме того, по свойству событий 10) A имеем $C(A+B) = CA + CB$. Следовательно, по аксиоме **A3** получаем

$$\mathbf{P}(C(A+B)) = \mathbf{P}(CA+CB) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB).$$

2.2. Свойства вероятности для полной группы событий.

Определение 2.3. События $H_1, \ldots, H_n$ в опыте G образуют *полную группу несовместных событий*, если они попарно несовместны ($H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$) и в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий H_i, $i = \overline{1,n}$, т. е. $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$. События $H_1, \ldots, H_n$ называются *гипотезами*, если они образуют полную группу несовместных событий и $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 2.4. Рассмотрим опыт G с конечным числом возможных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, где ω_i — элементарные события, образующие полную группу несовместных событий, появление которых равновероятно, т. е. $\mathbf{P}(\omega_i) = p$, $i = \overline{1,n}$. Такие события $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называются *случаями*, а про опыт G говорят, что он *сводится к схеме случаев*.

Определение 2.5. Рассмотрим в опыте G, сводящемся к схеме случаев, произвольное событие A, которое можно представить в виде суммы m случаев, т. е. $A = \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}$ при $m \leqslant n$. Тогда такие слагаемые $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}$ называют *случаями, благоприятствующими событию* A (или *благоприятными случаями*).

Определение 2.6. *Условной вероятностью* $\mathbf{P}(A|B)$ события A относительно события B, если $\mathbf{P}(B) > 0$, называется вероятность осуществления события A при условии, что событие B уже произошло. Условная вероятность определяется формулой

$$\mathbf{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Свойства P(A) (продолжение)

10) Если события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$\mathbf{P}(H_1) + \ldots + \mathbf{P}(H_n) = \mathbf{P}(H_1 + \ldots + H_n) = 1.$$

Данное свойство непосредственно вытекает из определения 2.3, аксиомы **A2** и свойства 8)P.

11) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$. По определению $\overline{A} = \Omega \setminus A$, поэтому $A\overline{A} = \varnothing$. По свойству 12) A имеем $A + \overline{A} = \Omega$, т. е. события A и $\overline{A}$ образуют полную группу несовместных событий. Следовательно, по свойству 10)Р: $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A + \overline{A}) = 1$, откуда следует искомая формула.

12) $\mathbf{P}(A+B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$. По свойству 11) A имеем $\overline{A+B} = \overline{A} \times$ $\times \overline{B}$. Поэтому из свойства 11)Р следует $\mathbf{P}(A+B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A+B}) =$ $= 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$.

13) $\mathbf{P}(AB) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} + \overline{B})$. Это следует из свойства 12)Р, если вместо событий A и B рассмотреть соответственно события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ и использовать свойство событий 12) A: $\overline{\overline{A}} = A$.

14) Если опыт G сводится к схеме случаев, то $\mathbf{P}(\omega_i) = p = 1/n$, $i = \overline{1,n}$. Действительно, так как события $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несовместны, то по аксиоме **А2** и свойству вероятности 8)Р имеем

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\omega_1 + \ldots + \omega_n) = \mathbf{P}(\omega_1) + \ldots + \mathbf{P}(\omega_n) = np.$$

15) Если событие A представимо в виде суммы m благоприятных случаев из общего числа n случаев, то вероятность такого события находится по *классической формуле вычисления вероятности*: $\mathbf{P}(A) =$ $= m/n$. Действительно,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}) = \mathbf{P}(\omega_{i_1}) + \ldots + \mathbf{P}(\omega_{i_m}) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.1. Опыт состоит в подбрасывании игральной кости (см. пример 1.1). Требуется найти вероятность выпадения четного числа очков (события A). В данном случае опыт сводится к схеме случаев, если в качестве элементарного события ω_i выбрать выпадение на верхней грани игральной кости числа очков, равного i, $i = \overline{1,6}$. Тогда $n = 6$, а $m = 3$, поскольку $A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$. Таким образом, $\mathbf{P}(A) = 1/2$.

16) Рассмотрим опыт G, сводящийся к схеме случаев, и предположим, что событиям A, B, AB благоприятствуют соответственно m_A, $m_B > 0$, m_{AB} случаев из всех n возможных. Допустим, что событие B уже произошло. Это означает, что из всех возможных n случаев реально могло появиться только m_B случаев, причем из них только m_{AB} случаев благоприятствуют событию A. Тогда $\mathbf{P}(A|B) =$ $= m_{AB}/m_B$. Действительно, получаем

$$\mathbf{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{m_{AB}}{n} \frac{n}{m_B} = \frac{m_{AB}}{m_B}.$$

17) $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. Данная формула следует из определения 2.6 и свойства коммутативности операции

умножения событий: $AB = BA$. Действительно,

$$\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(BA) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A).$$

Одной из основных формул для подсчета вероятности случайного события является классическая формула, приведенная в свойстве 15)Р. В схеме случаев предлагается следующий порядок решения задач с помощью этой формулы.

1) Определить элементарные события, сводя опыт к схеме случаев.

2) Подсчитать количество n всех случаев.

3) Описать событие A, вероятность которого требуется найти.

4) Подсчитать число m_A случаев, благоприятствующих событию A.

5) Воспользоваться классической формулой вычисления вероятности $\mathbf{P}(A) = m_A/n$.

Замечание 2.1. При выделении случаев исходят, как правило, из интуитивных соображений о симметрии исходов и их равновозможности. В данной главе во всех задачах будем рассматривать только такие модели опытов, которые сводятся к схеме случаев. Поэтому выбираемые далее элементарные события будем считать равновероятными.

2.3. Типовые задачи.

Задача 2.1. В отдел технического контроля поступила партия из 15 изделий, среди которых 5 бракованных. Для проверки качества партии наугад выбрано одно изделие. С какой вероятностью оно окажется бракованным?

Решение. Перенумеруем все изделия и определим элементарные события (случаи)

$$\omega_i = \{\text{выбор } i\text{-го изделия}\}, \quad i = \overline{1, 15}.$$

Таких элементарных событий 15, т. е. $n = 15$. Опишем событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{выбор бракованного изделия}\}.$$

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно количеству бракованных деталей, т. е. $m_A = 5$. Тогда согласно классической формуле вычисления вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 1/3$.

Задача 2.2. Усложним предыдущую задачу. Предположим, что для проверки партии, состоящей из 15 деталей, среди которых находятся 5 бракованных, выбираются 3 детали. Партия считается бракованной, если бракуется хотя бы одна деталь. Требуется найти вероятность того, что партия будет забракована.

Решение. Следуя предложенному выше порядку решения задачи, определим элементарное событие в рассматриваемом опыте следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из трех деталей,} \\ \text{выбранных из 15 деталей} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для того чтобы подсчитать количество n всех возможных случаев, используем так называемую *схему выбора без возвращения*. Первую деталь для проверки можно выбрать 15 способами (по количеству имеющихся в партии деталей). При проверке для каждого способа выбора первой детали существует 14 способов выбрать вторую деталь (так как одна деталь, выбранная первой, уже отсутствует). Таким образом, при проверке общее количество способов выбора 2-х деталей равняется $15 \cdot 14$. Рассуждая далее аналогичным образом, получаем $n = 15 \cdot 14 \cdot 13$.

Опишем теперь событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \text{в последовательности из трех выбранных} \\ \text{деталей окажется хотя бы одна бракованная} \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим событие $\overline{A}$, противоположное событию A:

$$\overline{A} = \left\{ \begin{array}{c} \text{в последовательности из трех выбранных} \\ \text{деталей не окажется ни одной бракованной} \end{array} \right\}.$$

Подсчитаем число элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{A}$. С этой целью повторим рассуждения, использованные для подсчета n. Выбирая детали только из 10 небракованных, получим $m_{\overline{A}} = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

Тогда, используя классическую формулу вычисления вероятности, окончательно будем иметь

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 67/91$.

Задача 2.3. Для 20 участников конференции, среди которых 12 российских, в гостинице забронировано 20 номеров. Из этих номеров