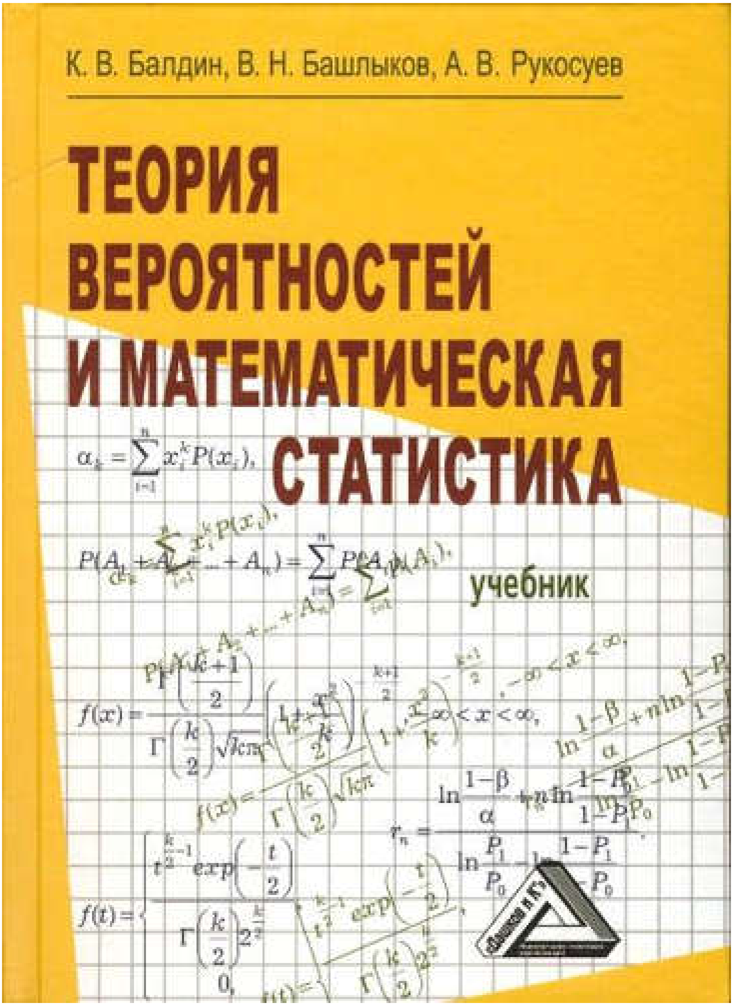
К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
учебник

УДК 519.2
ББК 22.17
Б20

Авторы:

К. В. Балдин — доктор экономических наук, профессор — введение, глава 9 (пп. 9.6, 9.7, 9.8), глава 10 (п. 10.6);
В. Н. Башлыков — доцент — глава 1 (кроме пп. 1.1, 1.2, 1.3), главы 2–10 (кроме пп. 9.6, 9.7, 9.8, 10.6), приложения;
А. В. Рукосуев — ст. преподаватель — глава 1 (пп. 1.1, 1.2, 1.3).

Рецензенты:

Н. И. Брагин — доктор экономических наук, профессор;
И. В. Минаев — доктор технических наук, профессор.

Балдин К. В.

Б20 Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. — 2-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2018. — 472 с.

ISBN 978-5-394-02108-4

Учебник содержит два раздела: “Теория вероятностей” и “Математическая статистика”. В него включены прикладные наработки авторов, вопросы для самоконтроля, примеры использования классических методов и заданий для самостоятельной работы обучаемых.

Для студентов, аспирантов и преподавателей, а также для научных сотрудников, предпринимателей и менеджеров фирм.

Подписано в печать 10.09.2017. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная.
Печ. л. 29,5. Тираж 500 экз.

Издательско-торговая корпорация “Дашков и К°”
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис; http://www.dashkov.ru

ISBN 978-5-394-02108-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях массового характера независимо от их конкретной природы.

Под случайным понимается явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта (испытания) каждый раз может протекать по-разному и точное прогнозирование результатов которого невозможно.

Различные результаты ряда одинаковых опытов всегда связаны с наличием второстепенных факторов, влияющих на исход опыта, но не заданных в числе его основных условий. Основные условия опыта определяют протекание явления в общих чертах и сохраняются неизменными, а второстепенные от опыта к опыту меняются и вносят случайные различия в результаты.

Со случайными явлениями приходится сталкиваться во многих практических задачах, которые требуют изучения не только основных закономерностей, определяющих явление в главных чертах, но и анализа случайных возмущений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих исходу опыта при заданных условиях элемент неопределенности.

Очевидно, должна существовать принципиальная разница в методах учета основных факторов, определяющих течение явления в главных чертах, и второстепенных факторов, влияющих на течение явления в качестве возмущений. Элемент неопределенности, присущий случайным явлениям, требует создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы и разрабатываются в теории вероятностей. Ее предметом являются специальные закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях. Закономерности, свойственные случайным явлениям, проявляются тем отчетливее, чем больше проведено опытов. Практика показывает, что подобные закономерности, или своего рода устойчивости, присущи массовым случайным явлениям. Именно эта устойчивость закономерностей, проявляющаяся в массовых случайных явлениях, служит базой для применения вероятностных методов исследования.

Вероятностный метод в науке не противопоставляется классическому детерминистскому методу точных наук, а является его дополнением, позволяющим изучать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

В настоящее время многие науки кроме классического детерминистского подхода широко используют вероятностные методы исследования.

Большое значение для инженеров, экономистов, социологов и других специалистов имеют такие практические приложения теории вероятностей, как математическая статистика, теория надежности сложных систем, теория массового обслуживания и др.

Исторически теория вероятностей, как и любая другая область науки, развивалась из потребностей практики. Начало ее становления относится к XVII веку. Необходимость разработки специального математического аппарата, приспособленного для анализа случайных явлений, диктовалась потребностью обобщения и обработки большого объема статистического материала, накопленного во многих областях науки. Однако эти задачи на начальном этапе развития теории вероятностей были слишком сложными, а законы, управляющие случайными явлениями, проступали недостаточно отчетливо. Необходимо было изучить закономерности случайных явлений на более простых задачах. Такими задачами оказались задачи из области “азартных игр”. Схемы азартных игр являются простыми моделями случайных явлений, позволяющими в простой и доступной форме изучать закономерности случайных явлений. В настоящее время примеры из области азартных игр часто используют при изучении и уяснении сущности основных правил и законов теории вероятностей.

Основой и началом теории вероятностей явились работы Паскаля, Ферма и Гюйгенса, появившиеся в середине XVII века и посвященные области азартных игр. В этих работах были впервые введены такие понятия, как вероятность и математическое ожидание, установлены основные свойства и приемы вычисления этих характеристик.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано со становлением, развитием и обобщением так называемого закона больших чисел. Так, Яков Бернулли во второй половине XVII века впервые показал, что с увеличением числа испытаний частота (частость) какого-либо случайного события приобретает устойчивость и определенным образом приближается к некоторому безразмерному числу, которое объективно отражает возможность появления случайного события и называется вероятностью.

Математик Муавр в начале XVIII столетия впервые рассмотрел простейший случай нормального закона, который в настоящее время имеет широкое применение при решении практических задач.

Большое значение в развитии теории вероятностей имели работы таких математиков, как Лаплас, Гаусс и Пуассон, живших в XVIII–XIX веках. В своих трудах они продолжили исследование нормального закона, закона больших чисел и разработку вопросов приложения теории вероятностей к исследованию результатов испытаний.

Для всего XVIII и начала XIX века характерно бурное развитие теории вероятностей. В этот период наблюдается исключительно большая заинтересованность в этой науке. В России создается знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания.

В середине XIX века вышел первый в России полный учебник теории вероятностей, созданный профессором В. Я. Буняковским.

Великий русский математик П. Л. Чебышев и его ученики А. А. Марков и А. М. Ляпунов последовательно работали над расширением и обобщением закона больших чисел. П. Л. Чебышев ввел в теорию вероятностей понятие случайной величины и метод моментов, что привело к созданию мощного современного аппарата теории вероятностей.

А. А. Марков в своих трудах заложил основу для новой области теории вероятностей — теории случайных процессов.

А. М. Ляпунов известен своим доказательством так называемой центральной предельной теоремы и разработкой метода характеристических функций.

В советский период русская школа теории вероятностей продолжала оставаться на ведущих позициях. Запросы ряда наук и появление новых видов технических систем (радиолокация, связь и др.) явились мощным толчком для дальнейшего бурного развития теории вероятностей.

Среди многих ученых — виднейших математиков нашей страны, занимавшихся разработкой вопросов теории вероятностей, необходимо отметить С. Н. Бернштейна, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, В. И. Романовского, Б. В. Гнеденко, Е. С. Вентцель, В. С. Пугачева, Н. В. Смирнова, Ю. А. Розанова и др.

С. Н. Бернштейн одним из первых разработал аксиоматику теории вероятностей, а также существенно расширил область применения предельных теорем.

А. Я. Хинчин известен исследованиями в области обобщения и усиления закона больших чисел, но главным образом — в области стационарных случайных процессов.

Ряд важнейших основополагающих работ в различных областях теории вероятностей и математической статистики принадлежит А. Н. Колмогорову. Он дал первое законченное аксиоматическое построение теории вероятностей, внес большой вклад в развитие теории случайных функций (стохастических процессов). Работы Колмогорова, относящиеся к оценке эффективности стрельбы, легли в основу целого научного направления в теории стрельбы, переросшего затем в более широкую науку об эффективности боевых действий.

В области математической статистики своими работами известны В. И. Романовский и Н. В. Смирнов, исследованиями в области теории массового обслуживания — Б. В. Гнеденко.

Огромный вклад в развитие теории стрельбы и прицельного бомбометания, основанного на применении методов теории вероятностей, внесла Е. С. Вентцель. А наиболее широко она известна как автор одного из лучших и полных учебников по теории вероятностей, одного из первых учебников по исследованию операций.

В. С. Пугачев разработал ряд общих методов в теории случайных функций, охватывающих как стационарные, так и нестационарные процессы.

В настоящее время не только естественные, технические, но и гуманитарные науки занимаются накоплением и обработкой статистических данных. Сбор, описание и обработка наблюдений и измерений производятся методами математической статистики, которая базируется на теории вероятностей.

Современная физика, электротехника и радиотехника имеют дело со случайными процессами, изучение которых невозможно без основательного освоения такого раздела теории вероятностей, как случайные функции.

Современные сложнейшие приборы управления процессами производства, приборы телеуправления и автоматического контроля основаны на учете целого ряда случайных процессов в виде помех или в виде различного рода сложных функций, учитываемых и перерабатываемых в приборах.

Изучение и освоение подобных приборов, а тем более конструирование их невозможно без изучения ряда разделов теории вероятностей.

Установление разумных допусков при изготовлении различных деталей в зависимости от их назначения и допускаемых пределов ошибок на выходе всего агрегата, выработка и применение наиболее действенных, экономически целесообразных и надежных методов контроля качества продукции при массовом ее производстве осуществляются на основе рекомендаций, выработанных с использованием теории вероятностей.

Из всего сказанного достаточно отчетливо видно, что квалифицированному специалисту, имеющему дело с весьма разнообразными отраслями знаний, не обойтись без необходимых знаний в области теории вероятностей и математической статистики.

В соответствии с названием учебник состоит из двух взаимосвязанных разделов.

Раздел I “Теория вероятностей” состоит из четырех глав. В главе 1 “Случайные события” излагаются основные понятия теории вероятностей, способы нахождения вероятностей случайных событий, правила действий с вероятностями и основные теоремы.

В главе 2 “Случайные величины” представлена классификация случайных величин, законы распределения и формы их представления, а также их числовые характеристики.

В главе 3 “Функции случайных аргументов” рассматриваются теоремы и методы определения числовых характеристик функций случайных аргументов, а также функциональные преобразования систем случайных величин.

Глава 4 “Случайные процессы” посвящена рассмотрению случайных функций и процессов, их характеристик, а также случайных потоков, на изучении которых базируется изучение систем массового обслуживания.

Раздел II “Математическая статистика” состоит из шести глав. В главе 5 “Статистические методы оценивания характеристик продукции” раскрыта сущность выборочного метода оценивания и основных теорем, входящих в закон больших чисел. Оценивание законов распределения, точечное и интервальное оценивание числовых характеристик случайных величин составляют содержание главы 6 “Методы статистической обработки результатов испытаний”. Глава 7 “Статистическая проверка гипотез” раскрывает сущность классического метода, метода последовательного анализа Вальда и условия их применения. Главы 8, 9 и 10 посвящены методам статистического анализа результатов испытаний. В них дается общая характеристика методов и достаточно подробно рассмотрены основы дисперсионного (глава 8), регрессионного (глава 9) и корреляционного (глава 10) анализов.

Для удобства работы в приложении приведены все необходимые при проведении расчетов таблицы, на которые в соответствующих главах сделаны ссылки.

Представленный курс теории вероятностей и математической статистики охватывает все разделы, изучаемые студентами, обучающимися по специальностям "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет, анализ и аудит", "Менеджмент организации" и др. При написании учебника авторы придерживались современных точек зрения на понятия, о которых идет речь, и не отступали от общепринятых взглядов. Авторы стремились изложить материал в доступной для студентов форме, чему способствует большое количество примеров, иллюстрирующих соответствующие теоретические положения. Однако авторы не претендуют на исчерпывающую полноту охвата учебного материала.

Раздел I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей — математическая наука, занимающаяся изучением закономерностей в случайных явлениях массового характера [5].

Под случайным принято понимать явление, которое при многократном наблюдении (воспроизведении одного и того же комплекса условий проведения эксперимента) протекает каждый раз по-разному.

Например, в 1827 г. ботаник Р. Броун открыл явление, которое стали называть броуновским. Он наблюдал под микроскопом и обнаружил, что частицы пыльцы находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить. Вскоре было обнаружено, что это движение — общее свойство любых мелких частиц, взвешенных в жидкости. Интенсивность движения зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц. Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории других частиц, так что близкие частицы очень быстро становятся удаленными.

Приведем другой пример. Производится стрельба из артиллерийского орудия.

С помощью методов баллистики при определенных исходных данных (начальной скорости движения снаряда $\overline{V}_0$, угле бросания Θ_0, баллистическом коэффициенте снаряда C) можно рассчитать теоретическую траекторию движения (штрихпунктирная линия на рис. 1.1.1).

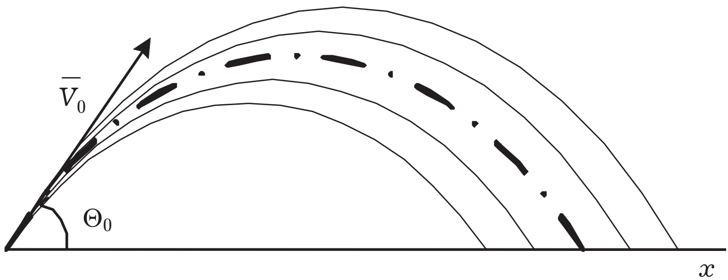

Рис. 1.1.1

При реальных стрельбах траектория полета каждого отдельного снаряда будет отклоняться от расчетной. При проведении нескольких выстрелов при одних и тех же исходных данных (V_0, Θ_0, C) будем наблюдать рассеивание траектории полета снарядов относительно расчетной. Это обусловлено действием большого числа второстепенных факторов, влияющих на траекторию полета, но не заданных в числе исходных данных. К числу таких факторов следует отнести ошибки при изготовлении снаряда, отклонение веса снаряда от номинального значения, неоднозначность структуры заряда, ошибки в установке угла наклона ствола орудия, метеорологические условия и т. д.

Основные факторы, учитываемые при наблюдении случайного явления, определяют его протекание в общих чертах и от наблюдения (опыта) к наблюдению не меняются. Второстепенные факторы вызывают различия в их результатах.

Вполне очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором точно и полно учтены факторы, определяющие явление. Невозможно достигнуть того, чтобы при многократных наблюдениях результаты полностью и в точности совпадали.

Иногда при решении практических задач случайными отклонениями пренебрегают, рассматривая не само реальное явление, а его упрощенную схему (модель), полагая, что в данных условиях наблюдения явление протекает вполне определенным образом. При этом из всей совокупности факторов, влияющих на явление, выделяются основные, наиболее существенные. Влиянием остальных, второстепенных, факторов просто пренебрегают.

Такая схема изучения явлений часто применяется в механике, технике, психологии, экономике и других отраслях знаний. При таком подходе к изучению явлений выявляется основная закономерность, присущая данному явлению и дающая возможность предсказать результат наблюдения при определенных исходных данных. По мере развития науки число учитываемых факторов увеличивается, явление исследуется подробнее, научный прогноз становится точнее. Описанная схема изучения явлений получила название классической схемы так называемых точных наук.

Однако при решении многих практических задач классическая схема "точных наук" неприменима. Существуют задачи, результат решения которых зависит от достаточно большого числа факторов, зарегистрировать и учесть которые практически невозможно.

Например, производится обстрел объекта из артиллерийского орудия с целью его поражения. Как было отмечено выше, при стрельбе из артиллерийского орудия имеет место рассеивание точек падения снарядов. Если размеры объекта существенно превышают размеры зоны рассеивания, то этим рассеиванием можно пренебречь, поскольку выпущенный снаряд попадет в цель. Если размер объекта меньше размеров зоны рассеивания, то некоторая часть снарядов в цель не попадет. В этих условиях приходится решать задачи, например, по определению среднего числа снарядов, попавших в цель, требуемого числа снарядов для надежного поражения цели и др. При решении таких задач классическая схема "точных наук" оказывается недостаточной. Эти задачи связаны со случайной природой рассеивания снарядов, и при их решении случайностью этого явления пренебрегать нельзя. Необходимо изучить рассеивание снарядов как случайное явление с точки зрения присущих ему закономерностей. Надо исследовать закон распределения координат точек падения снарядов, выяснить источники, вызывающие рассеивание и т. д.

Рассмотрим второй пример. Система автоматического управления функционирует в условиях непрерывно воздействующих помех. Действие помех приводит к отклонению управляемых параметров от расчетных значений. При исследовании процесса функционирования системы необходимо установить природу и структуру случайных возмущений, выяснить влияние конструктивных параметров системы на вид этой реакции и т. п.

Все подобные задачи (а число их в природе чрезвычайно велико) требуют изучения не только основных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и анализа случайных возмущений и исключений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих исходу наблюдений при заданных исходных данных элемент неопределенности.

С теоретической точки зрения второстепенные (случайные) факторы ничем не отличаются от основных (наиболее существенных). Точность решения задачи можно повышать за счет учета большого числа факторов от самых существенных до самых ничтожных. Однако это может привести к тому, что решение поставленной задачи ввиду сложности и громоздкости будет практически неосуществимым и не будет представлять никакой ценности.

Очевидно, должна существовать принципиальная разница в методах учета основных факторов, определяющих явление в главных чертах, и второстепенных факторов, влияющих на явление в качестве возмущений. Элементы неопределенности, сложности, присущие случайным явлениям требуют создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы и разрабатываются в теории вероятностей. Ее предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях. При многократных наблюдениях однородных случайных явлений обнаруживаются в них вполне определенные закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым случайным явлениям.

Например, если много раз подряд бросать монету, то частота появления цифры (отношение числа бросаний, при которых появилась цифра, к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к числу равному 0,5. Такое же свойство "устойчивости частоты" обнаруживается и при многократном повторении любого другого опыта, исход которого представляется заранее неопределенным (случайным).

Закономерности в случайных явлениях появляются всегда, когда имеют дело с массой однородных случайных явлений. Они оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, а средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже неслучайным.

Методы теории вероятностей приспособлены только для исследования массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но дают возможность предсказать средний случайный результат массы однородных случайных явлений, предсказать средний исход массы аналогичных опытов, конкретный исход каждого из которых остается неопределенным (случайным).

Вероятностные методы не противопоставляют себя классическим методам "точных наук", а являются их дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

В зависимости от сложности случайного явления для его описания используют следующие понятия: *случайное событие, случайная величина, случайная функция* (рис. 1.1.2) [3].

Именно в такой последовательности и будем рассматривать закономерности в случайных явлениях.

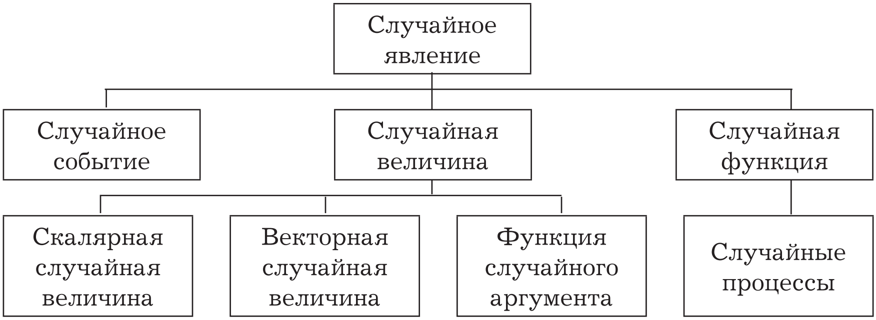

Рис. 1.1.2

1.2. Основные понятия и определения

Одним из фундаментальных понятий в теории вероятностей является испытание (эксперимент). Под испытанием понимают наблюдение того или иного явления при реализации определенного комплекса условий (наблюдение этого же явления в других условиях считается другим испытанием).

Если результат испытания фиксируется только как факт, то его называют событием.

Введем следующую формальную схему испытания (эксперимента) (рис. 1.2.1).

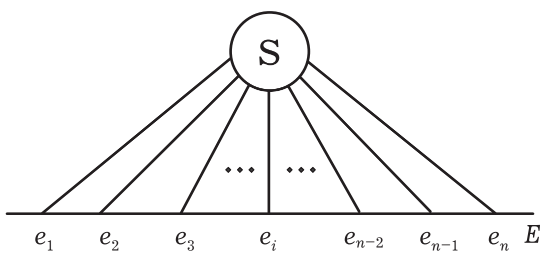

Рис. 1.2.1

На рисунке обозначено:

S — комплекс условий эксперимента;

E — множество результатов эксперимента.

В одной реализации эксперимента может появиться один и только один исход, который называют *элементарным событием* e_i. Множество всех исходов эксперимента E называют *пространством элементарных событий*. Оно вводится описательным путем.

Пример 1.2.1. Производится прием готовой продукции на предприятии. Элементарными событиями будут e_1 — исправное изделие не принято, e_2 — принятое изделие исправно, e_3 — принято исправным дефектное изделие. Множество исходов: e_1, e_2, e_3 образует пространство элементарных событий $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Группируя различным образом элементарные события, также будем получать события. Событие A — это подмножество пространства элементарных событий $A \subset E$.

В дальнейшем события будем обозначать прописными буквами начала латинского алфавита: A, B, C и т. д. или такими же буквами с цифровыми индексами.

Например, событие A — изделие принято (пример 1.2.1) включает элементарные события e_2 — принятое изделие исправно и e_3 — принято исправным дефектное изделие:

$$A = \{e_2, e_3\}.$$

Пример 1.2.2. Производится обстрел m целей. Элементарные события: e_1 — ни одна цель не поражена ($e_1 = 0$); поражена одна цель ($e_2 = 1$); поражено две цели ($e_3 = 2$) и т. д. до $e_{m+1} = m$. В этом случае получаем пространство элементарных событий

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_{m+1}\}.$$

Событие В — поражение не менее двух целей (пример 1.2.2) включает элементарные события e_3, e_4, ..., e_{m+1}

$$E = \{e_3, e_4, ..., e_{m+1}\}.$$

Все множество событий, которое можно построить на пространстве элементарных событий, называют полем событий, или сигма-алгеброй (σ-алгеброй).

Событие, которое наступает всякий раз при реализации комплекса условий, называют *достоверным*. Например, падение на землю монеты или кости при их подбрасывании и т. д.

Событие, которое никогда не наступает при реализации данного комплекса условий, называют *невозможным*. Например, процедура банкротства более m предприятий при диагностике m предприятий является событием невозможным.

В дальнейшем будем обозначать достоверные события буквой U, а невозможные — буквой V.

Событие, которое при реализации данного комплекса условий может как наступить, так и не наступить, называют *случайным*. Например, попадание в цель при одном выстреле, прием партии готовой продукции при контроле ее качества, отказ элемента системы в процессе ее функционирования в течение времени t и т. п.

Между различными событиями, принадлежащими одному и тому же пространству элементарных событий, могут быть установлены определенные соотношения и операции. Обычно для изображения событий используют логические диаграммы Эйлера-Венна (Венна) [5].

Рассмотрим некоторые операции над событиями.

Произведением (пересечением) нескольких событий A_1, A_2, ..., A_n называют событие

$$B = \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

состоящее в совместном (одновременном или последовательном) их наступлении. Событие B включает те и только те элементарные события, которые принадлежат одновременно и A_1, и A_2, и ..., и A_n. Диаграмма Венна для события $B = A_1 \cdot A_2$ показана на рис. 1.2.2 (заштрихованная область).

Например, событие, заключающееся в нормальном функционировании технической системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов (рис. 1.2.3), является произведением двух событий: A_1 — исправная работа первого элемента и A_2 — исправная работа второго элемента, причем оба эти события при испытании осуществляются одновременно. Примером произведения событий, наступающих при испытании последовательно, является поражение трех целей при их обстреле из орудия тремя снарядами.

Суммой (объединением) событий A_1, A_2, ..., A_n называют событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из них и обозначаемое

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Событие C включает в себя все те элементарные события, которые принадлежат хотя бы одному из событий A_i.

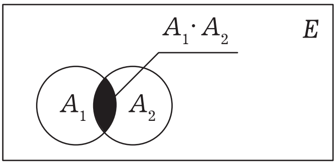

Рис. 1.2.2

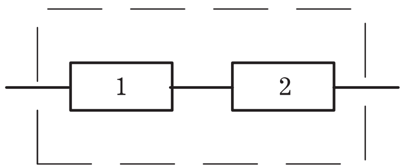

Рис. 1.2.3

В рассмотренном выше примере (см. рис. 1.2.3), событие C является суммой событий A_1 или A_2, если C — отказ цепи, а A_1 и A_2 — отказ первого и второго элемента соответственно. Диаграмма Венна для суммы событий представлена на рис. 1.2.4 (заштрихованная область).

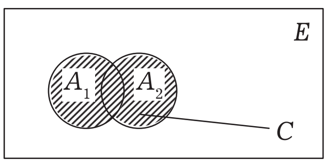

Рис. 1.2.4

События A_1 и A_2 называются *несовместными* в данном испытании, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_1 — получение одного попадания в цель и A_2 — получение двух попаданий (в той же серии выстрелов) являются несовместными. Символически признак несовместности событий A_1 и A_2 можно представить так:

$$A_1 \cdot A_2 = V.$$

У несовместных событий нет общих точек на диаграмме. Несколько событий называются *попарно несовместными*, если никакие два из них в данном испытании не могут наступить вместе. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_0 — ни одного попадания в цель, A_1 — одно попадание в цель, A_2 — два попадания в цель попарно несовместны. Обычно попарно несовместные события называют просто несовместными.

Несколько событий $A_1, A_2,..., A_n$ составляют *полную группу*, если в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них, т. е. если

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = U. \qquad (1.2.1)$$

Так, в рассматриваемом выше примере стрельбы по цели двумя снарядами события A_0, A_1, A_2 составляют полную группу несовместных событий. Диаграмма Венна для данного случая показана на рис. 1.2.5.

Два несовместных события, составляющих полную группу, называются *противоположными* (рис. 1.2.6). Их обычно обозначают A и $\overline{A}$ (не "А"). Например, отказ и нормальное функционирование элемента технической системы, попадание и промах при стрельбе одним снарядом по цели являются противоположными событиями.

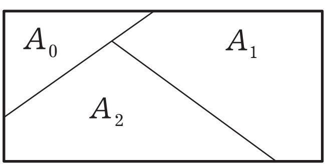

Рис. 1.2.5

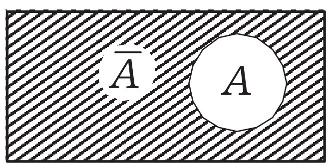

Рис. 1.2.6

Для противоположных событий справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &A + \overline{A} = U, \\ &A \cdot \overline{A} = V. \end{aligned} \qquad (1.2.2)$$

Пример 1.2.3. Испытание заключается в осуществлени при определенных условиях трех выстрелов по цели. Рассматриваются события:

A_i — попадание при i-м выстреде ($i = 1, 2, 3$);

B_j — получение ровно j попадание ($j = 0, 1, 2, 3$);

B — получение хотя бы одного попадания.

Требуется представить события B_j и B через события A_i и противоположные им события $\overline{A}_i$.

Решение.

Принимая во внимание смысл рассматриваемых событий, запишем:

$$B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3; \qquad (1.2.3)$$

$$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3; \qquad (1.2.4)$$

$$B_2 = A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3; \qquad (1.2.5)$$

$$B_3 = A_1 A_2 A_3. \qquad (1.2.6)$$

Событие B можно представить различными соотношениями:

– суммой событий, являющихся совместными

$$B = A_1 + A_2 + A_3; \qquad (1.2.7)$$

– суммой несовместных событий

$$B = B_1 + B_2 + B_3; \qquad (1.2.8)$$

– через противоположное событие

$$B = \overline{B}_0. \qquad (1.2.9)$$

С учетом соотношения (1.2.3)

$$B_0 = \overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}. \qquad (1.2.10)$$

1.3. Частота и вероятность. Способы нахождения вероятностей случайных событий

1.3.1. Аксиоматическое построение теории вероятностей

При обработке результатов испытаний принято считать наиболее информативной характеристикой того, как часто наступало некоторое событие A в серии испытаний, произведенных при одном и том же комплексе условий, отношение числа $N(A)$ испытаний, в которых оно имело место, к общему их числу:

$$P^*(A) = \frac{N(A)}{N}. \tag{1.3.1}$$

Эту величину принято называть *частотой* наступления события (иногда ее называют частостью). Вполне очевидно, что для невозможного события

$$P^*(V) = 0,$$

для достоверного

$$P^*(U) = 1,$$

а для случайного

$$0 \le P^*(A) \le 1.$$

Знаки нестрогого неравенства здесь поставлены потому, что случайное событие в принципе может наступить или не наступить во всех произведенных испытаниях.

При многократном осуществлении какого-либо одного и того же испытания частота наступления соответствующего ему события сравнительно редко сколько-нибудь значительно отклоняется от некоторого неотрицательного числа, причем тем реже, чем больше произведено испытаний. Такое свойство частоты называют устойчивостью. Это свойство, многократно проверенное экспериментально, является одной из наиболее характерных закономерностей, которые присущи случайным явлениям.

Число, относительно которого при неограниченном увеличении количества испытаний стабилизируется частота наступления события в определенных условиях, принимают за меру объективной возможности его появления в этих условиях и называют *вероятностью* данного события.

Обозначать вероятности принято буквами p или P с указанием или без указания в скобках соответствующего события.

Из введенного выше понятия вероятности следует, что

$$0 \le P \le 1,$$

причем для достоверного события

$$P(U) = 1,$$

а для невозможного

$$P(V) = 0.$$

Вероятность случайного события позволяет судить о том, как часто оно будет иметь место при проведении данного эксперимента. Например, если вероятность нормального функционирования системы за промежуток времени T равна 0,94, то при достаточно большом числе испытаний системы в соответствующих условиях она не откажет в среднем в 94 испытаниях из каждых 100.

Особенность устойчивости частоты состоит в том, что при увеличении числа испытаний она не стремится к вероятности как к пределу, а стабилизируется относительно этой характеристики так, что существенные отклонения частоты от вероятности оказываются все более и более редкими. Тем не менее это дает основание принимать за вероятность события частоту его наступления, полученную по результатам большого числа испытаний. Однако следует иметь в виду, что практическое применение такого способа нахождения вероятностей может быть существенно ограничено стоимостью соответствующих экспериментов. Кроме того, обычно проблематичным является решение вопроса о том, какое число испытаний можно считать достаточным для нахождения вероятности интересующего события без большого риска допустить существенную ошибку в оценке ее величины.

Например, еще в XVIII в. было замечено, что среди обычной корреспонденции письма без адреса обладают определенной устойчивостью. Замечено, что на протяжении нескольких лет на каждый миллион писем приходилось в среднем 25–27 писем без адреса.

Частотный подход к определению вероятности, несмотря на его кажущуюся простоту, приводил к теоретическим и математическим трудностям. Поэтому в современной теории вероятностей понятие вероятности события обычно вводят аксиоматически.

Рассмотрим формулировки аксиом, данные академиком А. Н. Колмогоровым [17].

1. Каждому случайному событию $A \subset E$ поставлено в соответствие число $P(A)$, $0 \le P(A) \le 1$, которое называют вероятностью наступления события A.

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(U) = 1.$$

3. Если события $A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n$ попарно несовместные, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Из аксиом следуют свойства вероятности, которые приведем без доказательства.

1. Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(V) = 0.$$

2. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A, равна:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. Если событие А влечет за собой событие В ($A \subset B$), то

$$P(A) \le P(B).$$

4. Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей

$$0 \le P(A) \le 1.$$

5. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Таким образом вводится одно из правил действия с вероятностями — правило сложения вероятностей.

Другое правило — правило умножения вероятностей — опирается на понятие условной вероятности. *Условной вероятностью $P(A/B)$ называют вероятность события A, вычисленную при условии, что событие B произошло.*

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

или

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

1.3.2. Классический способ определения вероятности

В теории вероятностей широкое распространение получили задачи, условия которых соответствуют так называемой схеме урн [6]. Сущность этой схемы может быть сформулирована следующим образом. Результаты эксперимента представляются конечным числом *равновозможных и несовместных* исходов, составляющих *полную группу*, причем некоторые исходы благоприятствуют наступлению какого-либо события, т. е. при осуществлении любого из них данное событие имеет место. (Понятие равновозможности исходов эксперимента в классической теории вероятностей является основным, однако формально не определяется.)

Такая схема реализуется наиболее просто, если эксперимент заключается в том, что из “урны” (непрозрачного сосуда, содержащего некоторое известное количество одинаковых на ощупь шаров разного цвета) извлекается наудачу некоторое число шаров, а интересующим экспериментатора событием является выход определенной комбинации шаров каждого цвета. Этим и объясняется принятое название данной схемы.

Классический способ определения вероятности представляется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.3.2)$$

где m — число исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A;

n — общее число равновозможных несовместных исходов.

В урне находятся K одинаковых на ощупь шаров, в том числе M белых и $(K - M)$ черных. Испытание заключается в извлечении из нее наудачу N каких-либо шаров. Интересующее нас событие состоит в том, что среди выбранных шаров ровно m окажутся белыми.

Очевидно, что общее число всех равновозможных и несовместных исходов рассматриваемого испытания равно C_K^N. Событие, вероятность которого надо определить, будет иметь место, если в выборку попадут любые m белых шаров и любые $(N - m)$ черных. Количество вариантов выбора m белых шаров из общего их числа M равно C_M^m Каждый такой вариант может осуществиться с каким-либо из C_{K-M}^{N-m} вариантов выбора $(N - m)$ черных шаров из $(K - M)$, имеющихся в урне. Следовательно, число исходов, благоприятствующих наступлению интересующего нас события, равно произведению $C_M^m C_{K-M}^{N-m}$. Таким образом, согласно формуле (1.3.2), искомая вероятность определяется выражением:

$$P = \frac{C_M^m C_{K-M}^{N-m}}{C_K^N}.$$

Общим недостатком классического способа определения вероятности является ограниченная его применимость. Действительно, далеко не все комплексы условий приводят к возможности применения рассмотренных способов.

Поэтому в теории вероятностей разработаны способы, позволяющие определить вероятности одних событий через известные вероятности других. Основу этих способов составляют правила умножения и сложения вероятностей, опирающиеся на понятие условной вероятности.