

**В. В. НОВОЖИЛОВ**

# **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

Электронный аналог печатного издания: Новожилов В. В. Теория упругости. — СПб.: Политехника, 2010. — 409 с. : ил.

УДК 539.3  
ББК 22.251  
Н74



**ПОЛИТЕХНИКА**  
**ИЗДАТЕЛЬСТВО**  
Санкт-Петербург 2012

[www.polytechnics.ru](http://www.polytechnics.ru)

**Новожилов В. В.**  
**Н74** Теория упругости / В. В. Новожилов. — СПб.: Политехника, 2012. — 409 с.: ил.  
**ISBN 978-5-7325-0956-4**

Книга выдающегося ученого-механика и инженера В. В. Новожилова является результатом его многолетнего исследовательского труда по разработке фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела — дисциплины, которая является теоретической основой для создания инженерных методов расчета конструкций в самых различных областях техники. Первое издание вышло в 1958 г.; переведена на английский язык и опубликована издательством Pergamon Press в 1961 г.

Для научных сотрудников и инженеров, а также аспирантов и студентов, обучающихся в университетах и технических вузах.

**УДК 539.3**  
**ББК 22.251**

**ISBN 978-5-7325-0956-4** © Издательство «Политехника», 2012

## ГЛАВА I

### ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Целью главы является исследование геометрических свойств деформации сплошной среды. Эта задача может быть сформулирована следующим образом: даны положения точек среды до и после деформации; требуется определить обусловленное деформацией изменение вектора, соединяющего две произвольные бесконечно близкие точки среды. Вопрос этот чисто геометрический, и при его рассмотрении совершенно неважны ни причины, вызвавшие деформацию, ни закон, по которому сплошная среда ей сопротивляется.

#### § 1. Перемещения

Пусть положение точек сплошной среды в первоначальном ее (недеформированном) состоянии задается их проекциями на оси некоторой (произвольно выбранной) прямоугольной декартовой системы координат  $X, Y, Z$ . Пусть далее точки среды получают перемещения с компонентами по тем же осям  $u, v, w$ , которые будем считать в каждый момент времени известными функциями координат  $x, y, z$ ; тогда положение произвольной рассматриваемой точки среды в некоторый момент времени  $t$  определится (в той же декартовой системе) следующими координатами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + u(x, y, z, t) \\ \eta &= y + v(x, y, z, t) \\ \zeta &= z + w(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}. \quad (1.1)$$

Перемещения  $u, v, w$  (если противное особо не оговорено) будем считать непрерывными вместе со всеми своими частными производными функциями координат  $x, y, z$ .

Формулы (1.1) устанавливают (для каждого момента времени  $t$ ) соотношение между параметрами  $x, y, z$  и  $\xi, \eta, \zeta$ , которое в силу того, что каждой точке среды до деформации будет соответствовать одна и только одна точка среды после деформации, будет взаимнооднозначным. Ввиду этого формулы (1.1) можно рассматривать как некоторое преобразование координат, причем параметры  $x, y, z$  вве-

денные выше как декартовы координаты точек среды до деформации, могут быть использованы в качестве криволинейных координат, определяющих положения точек деформированной среды.

Полагая в (1.1)  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x_0 + u(x_0, y_0, z, t) \\ \eta &= y_0 + v(x_0, y_0, z, t) \\ \zeta &= z + w(x_0, y_0, z, t) \end{aligned} \right\}, \quad (1.2)$$

определяющие в совокупности кривую, на которой располагаются в момент времени  $t$  те точки  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , которые до деформации (при  $t = 0$ , когда  $u = v = w = 0$ ) находились на прямой ( $x = x_0, y = y_0$ ), параллельной оси  $Z$  (рис. 1).

Отсюда ясно, что координатные линии  $x, y, z$  в деформированной среде являются теми (вообще говоря кривыми) линиями, на которых размещаются в каждый произвольно выбранный момент времени  $t$  точки среды, бывшие до деформации на прямых, параллельных соответствующим осям исходной декартовой системы координат.

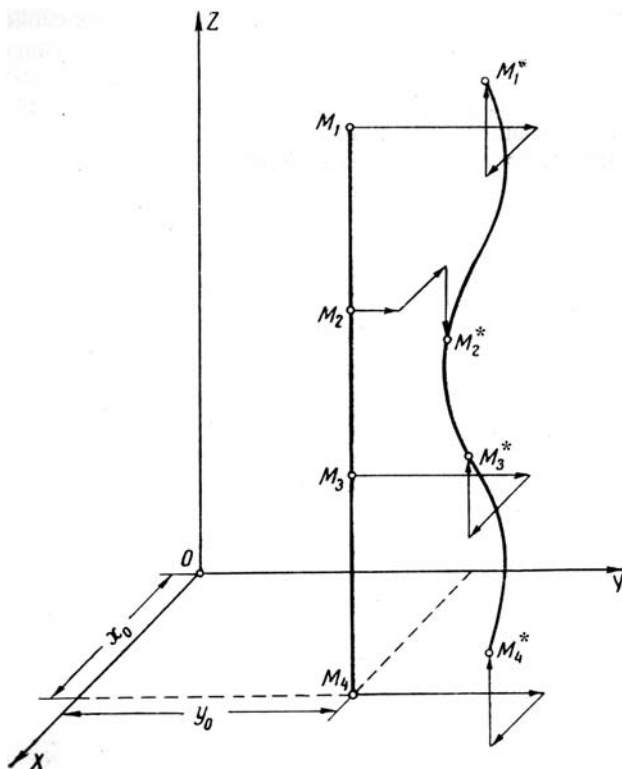


Рис. 1

Замечательным свойством данной системы криволинейных координат является то, что в ней положение произвольной точки среды в любой момент времени определяется теми же (численно) координатами, что и в исходном недеформированном состоянии.

Представим себе, что в среде до деформации рассматривается совокупность точек, лежащих на какой-либо линии (материальное волокно) или на какой-либо поверхности (материальный слой). При деформации данное волокно (или данный слой) будет непрерывно изменять свою форму. Однако если воспользоваться указанной выше системой криволинейных координат, то в ней уравнения этого волокна (или этого слоя) в каждый момент времени  $t$  будут совпадать по виду с уравнениями, задающими исходную форму волокна в декартовых координатах  $X, Y, Z$ . Последнее является прямым следствием того, что при деформации изменяется сама система координат; координаты же точек в ней остаются неизменными.

Такого рода система координат может быть названа «материальной», поскольку все координатные линии в каждый момент времени проходят через одни и те же материальные точки сплошной среды; система как бы связана с определенными волокнами среды и деформируется вместе с ними.

Перемещения  $u, v, w$  рассматривались выше как функции параметров  $x, y, z$ ; их можно, однако, рассматривать и как функции  $\xi, \eta, \zeta$ .

В этом случае вместо (1.1) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi - u(\xi, \eta, \zeta, t) \\ y &= \eta - v(\xi, \eta, \zeta, t) \\ z &= \zeta - w(\xi, \eta, \zeta, t) \end{aligned} \right\}. \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что параметры  $\xi, \eta, \zeta$ , будучи декартовыми координатами точек деформированной среды в момент времени  $t$ , могут быть использованы и в качестве криволинейных координат, определяющих положение этих же точек до деформации.

Полагая в (1.3)  $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ , получим три уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi_0 - u(\xi_0, \eta_0, \zeta, t) \\ y &= \eta_0 - v(\xi_0, \eta_0, \zeta, t) \\ z &= \zeta - w(\xi_0, \eta_0, \zeta, t) \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

выражающие в декартовой системе  $X, Y, Z$  ту кривую, на которой до деформации находились точки сплошной среды, располагающиеся в момент времени  $t$  на прямой ( $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ ), параллельной оси  $Z$ . Таким образом координатные линии  $\xi, \eta, \zeta$  определяют в среде до деформации те волокна, которые в результате деформации (в момент времени  $t$ ) превращаются в прямые, параллельные осям  $X, Y, Z$ .

При этом в два разных момента времени вид прямых, параллельных декартовым осям, будут принимать различные волокна сплошной среды. Ввиду этого в криволинейной системе  $\xi, \eta, \zeta$  неизменность значений координат любой точки среды (в течение процесса деформирования) уже не будет иметь места. Система координат  $\xi, \eta, \zeta$  (используемая как криволинейная для определения положения точек среды до деформации) может быть названа «пространственной» — в том смысле, что определенные координаты присваиваются не конкретным материальным точкам среды, а конкретным точкам пространства. Ряд материальных точек среды, занимающих в процессе деформации последовательно одно и то же положение в пространстве, будут иметь в данной системе одни и те же координаты.

Способ описания деформации (или движения) сплошной среды с помощью криволинейных координат  $x, y, z$  принято связывать с именем Лагранжа (хотя фактически эти координаты были введены в 1761 г. Эйлером [45]), а способ описания деформации сплошной среды с помощью криволинейных координат  $\xi, \eta, \zeta$  — с именем Эйлера (хотя фактически этот способ предложен д'Аламбером в 1752 г. [37]).

В гидромеханике, как известно, пользуются преимущественно так называемыми координатами Эйлера, и это вполне закономерно, так как форма и движение границ жидкости обычно считаются заданными заранее. Кроме того, в гидромеханике искомыми величинами являются обычно не перемещения частиц, а их скорости; в скоростях же формулируются и граничные условия. Все это делает возможным не следить за перемещением произвольной частицы жидкости, а интересоваться лишь распределением скоростей в пространстве, заполненном жидкостью, независимо от того, каким частицам в каждый момент времени данные скорости соответствуют. Наиболее подходящим для этого математическим аппаратом и являются координаты Эйлера  $\xi, \eta, \zeta$ .

В теории же упругости конечной целью обычно является определение перемещений точек упругого тела, для которого задаются первоначальная форма, условия закрепления и нагрузка. При этом требуется определить и форму тех участков поверхностей, ограничивающих тело, перемещения которых явным образом не заданы. Иными словами, краевые условия в теории упругости, вообще говоря, задаются на границах, форма которых зависит от искоемых величин. Поэтому наиболее подходящим математическим аппаратом будут в данном случае криволинейные координаты Лагранжа  $x, y, z$ , поскольку в них уравнения границ тела после деформации будут иметь вид, идентичный уравнениям границ тела до деформации. Можно привести и другие соображения в пользу выбора этой системы координат. В частности, использование ряда важных деформационных гипотез теории упругости (например, гипотезы прямых нормалей в теории пластин и оболочек, плоских сечений в теории изгиба) оказывается наиболее удобным именно в координатах  $x, y, z$  (ввиду простоты записи в данной системе уравнений материальных волокон и слоев как до, так и после деформации).

Высказанные соображения представляются достаточными для того, чтобы дальнейшее изложение основывалось на использовании «материальных» криволинейных координат  $x, y, z$ .

В заключение параграфа заметим, что в теории деформаций характер зависимости перемещений  $u, v, w$  от времени не будет играть никакой роли. Изложение будет строиться путем чисто геометрического сопоставления двух состояний тела—исходного и деформированного. При этом не будут иметь значения ни промежутки времени, в течение которого деформация была осуществлена, ни траектории, по которым перемещались материальные частицы среды, прежде чем заняли рассматриваемые окончательные положения.

## § 2. Изменение длины линейного элемента

В результате деформации точка  $M(x, y, z)$ , принадлежащая рассматриваемому сплошному телу, переместится в положение  $M^*$  с декартовыми координатами  $\xi, \eta, \zeta$ , а бесконечно близкая к ней точка  $N(x + dx, y + dy, z + dz)$  — в положение  $N^*$  с координатами  $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$  (рис. 2). Вектор  $M^*N^*$  (с проекциями на оси  $X, Y, Z$ :  $d\xi, d\eta, d\zeta$ ), квадрат длины которого равен

$$|M^*N^*|^2 = ds_*^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2, \quad (2.1)$$

определяет величину и направление линейного элемента тела, величина и направление которого до деформации определялись вектором  $MN$ , квадрат длины которого равен

$$|MN|^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.2)$$

Применив формулы (1.1) к точке  $N(x + dx, y + dy, z + dz)$  и разложив их правые части в ряды Тейлора, в точке  $(x, y, z)$  будем (при сохранении только членов первого порядка малости) иметь

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ d\eta &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ d\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

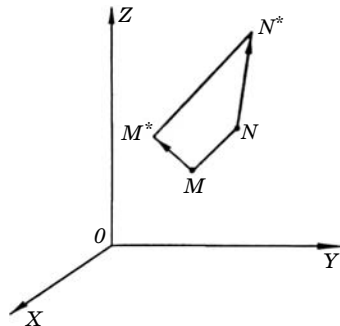


Рис. 2

Составим далее разность  $ds_*^2$  и  $ds^2$ , подставив при этом в (2.1) значения  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  согласно (2.3); тогда получится выражение

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}^* \mathbf{N}^*|^2 - |\mathbf{MN}|^2 &= ds_*^2 - ds^2 = 2(\varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \\ &+ \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz), \end{aligned} \quad (2.4)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \gamma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \gamma_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \gamma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = 2\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = 2\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = 2\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.5)$$

Введем обозначение

$$E_{MN} = \frac{|\mathbf{M}^* \mathbf{N}^*| - |\mathbf{MN}|}{|\mathbf{MN}|} = \frac{ds_* - ds}{ds}. \quad (2.6)$$

$E_{MN}$  — есть обусловленное деформацией увеличение расстояния между точками  $M$  и  $N$ , отнесенное к расстоянию между ними до деформации. Данную величину назовем относительным удлинением в точке  $M$  в направлении точки  $N$ .

При использовании обозначения (2.6) формула (2.4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{MN} &= \left( 1 + \frac{1}{2} E_{MN} \right) ds^2 = \varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \\ &+ \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz, \end{aligned} \quad (2.7)$$

или

$$E_{MN} = \left( 1 + \frac{1}{2} E_{MN} \right) = \varepsilon_{xx} \lambda^2 + \varepsilon_{yy} \mu^2 + \varepsilon_{zz} \nu^2 + \varepsilon_{xy} \lambda \mu + \varepsilon_{xz} \lambda \nu + \varepsilon_{yz} \mu \nu, \quad (2.8)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — косинусы, определяющие направление вектора  $MN$  (т. е. направление линейного элемента до деформации);

$$\lambda = \frac{dx}{ds}; \quad \mu = \frac{dy}{ds}; \quad \nu = \frac{dz}{ds}. \quad (2.9)$$

Приняв в (2.8)  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$  (что соответствует случаю, когда рассматривается линейный элемент, параллельный до деформации оси  $X$  и равный  $dx$ ), будем иметь

$$E_x = \left(1 + \frac{1}{2} E_x\right) = \varepsilon_{xx}. \quad (2.10)$$

Отсюда

$$E_x = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1. \quad (2.11)$$

Эта формула определяет значение относительного удлинения волокна, параллельного до деформации оси  $X$ . По аналогии можно написать и формулы для относительных удлинений волокон, первоначально параллельных осям  $Y$  и  $Z$ ,

$$E_y = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} - 1; \quad E_z = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}} - 1. \quad (2.12)$$

### § 3. Изменение направления линейного элемента

Вектор  $MN$  (см. предыдущий параграф) образует с осями координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  углы, косинусы которых суть

$$\lambda = \frac{dx}{ds}; \quad \mu = \frac{dy}{ds}; \quad \nu = \frac{dz}{ds}. \quad (3.1)$$

Соответственно, вектор  $M^*N^*$  образует с теми же осями углы, косинусы которых суть

$$\lambda^* = \frac{d\xi}{ds_*}; \quad \mu^* = \frac{d\eta}{ds_*}; \quad \nu^* = \frac{d\zeta}{ds_*}. \quad (3.2)$$

Подставив в (3.2) вместо  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  их значения согласно (2.3) и выразив затем на основании (2.6)  $ds_*$  через  $ds$  и  $E_{MN}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda^* &= \frac{1}{1 + E_{MN}} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \lambda + \frac{\partial u}{\partial y} \mu + \frac{\partial u}{\partial z} \nu \right] \\ \mu^* &= \frac{1}{1 + E_{MN}} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \lambda + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mu + \frac{\partial v}{\partial z} \nu \right] \\ \nu^* &= \frac{1}{1 + E_{MN}} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \lambda + \frac{\partial w}{\partial y} \mu + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \nu \right] \end{aligned} \right\}. \quad (3.3)$$

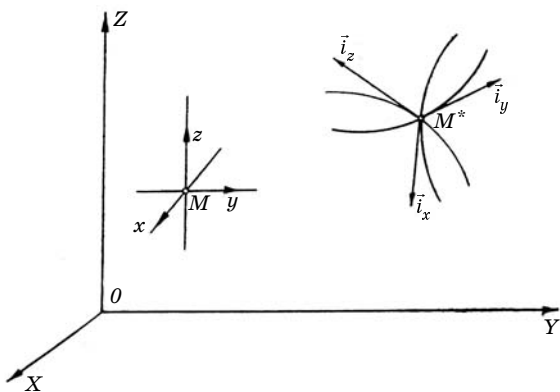


Рис. 3

Эти формулы определяют направление произвольного волокна тела после деформации.

В частном случае, если  $\lambda = 1$ ,  $\mu = \nu = 0$ , формулы (3.3) дают

$$\lambda^* = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + E_x}; \quad \mu^* = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + E_x}; \quad \nu^* = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + E_x}. \quad (3.4)$$

Здесь  $E_x$  есть определяющееся формулой (2.11) относительное удлинение волокна, параллельного до деформации оси  $X$ .

Поскольку линейный элемент  $dx$  превращается после деформации в линейный элемент координатной кривой  $x$  деформированного тела, формулы (3.4) дают направляющие косинусы касательной к этой кривой в точке  $M^*$ .

Таблица 1

|     | $i_x$                                               | $i_y$                                               | $i_z$                                               |
|-----|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $X$ | $\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + E_x}$ | $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + E_y}$     | $\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + E_z}$     |
| $Y$ | $\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + E_x}$     | $\frac{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}{1 + E_y}$ | $\frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{1 + E_z}$     |
| $Z$ | $\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + E_x}$     | $\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{1 + E_y}$     | $\frac{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}{1 + E_z}$ |

Путем совершенно аналогичных рассуждений из формул (3.3) могут быть получены и направляющие косинусы касательных к координатным линиям  $y$  и  $z$  в деформированном теле.

Обозначим (рис. 3) единичные векторы, направленные по касательным к координатным линиям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в точке  $M^*$  через  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $i_z$ . Направляющие косинусы этих трех единичных векторов по отношению к декартовым осям будут определяться табл. 1.

Формулы (3.3) выражают направляющие косинусы вектора  $M^*N^*$  через направляющие косинусы вектора  $MN$ . Путем обращения данных формул могут быть получены следующие выражения для направляющих косинусов вектора  $MN$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1 + E_{MN}}{D} (\alpha_{11} \lambda^* + \alpha_{12} \mu^* + \alpha_{13} v^*) \\ \mu &= \frac{1 + E_{MN}}{D} (\alpha_{21} \lambda^* + \alpha_{22} \mu^* + \alpha_{23} v^*) \\ v &= \frac{1 + E_{MN}}{D} (\alpha_{31} \lambda^* + \alpha_{32} \mu^* + \alpha_{33} v^*) \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \alpha_{12} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \\ \alpha_{13} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\ \alpha_{21} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ \alpha_{22} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_{23} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \\ \alpha_{31} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \downarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{32} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \\ \alpha_{33} &= \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)} = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}. \quad (3.6)$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & 1 + \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & 1 + \frac{dw}{dz} \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Несколько ниже (в § 12) будет показано, что

$$D = 1 + \Delta, \quad (3.8)$$

где  $\Delta$  есть относительное приращение объема в точке  $M$  (обусловлено деформацией).

Из формулы (3.8) следует, что  $D$  — функциональный определитель преобразования координат (1.1) — не может равняться нулю, так как это означало бы бесконечное уплотнение материала тела в тех точках, где данное равенство имеет место. В соответствии с этим обращение формул (3.3) всегда возможно и, следовательно, формулы (3.5) всегда могут быть написаны.

В частном случае, когда  $\lambda^* = 1, \mu^* = \nu^* = 0$ , из (3.5) получаем

$$\lambda = \frac{1 + E_\xi}{D} \alpha_{11}; \quad \mu = \frac{1 + E_\xi}{D} \alpha_{21}; \quad \nu = \frac{1 + E_\xi}{D} \alpha_{31}. \quad (3.9)$$

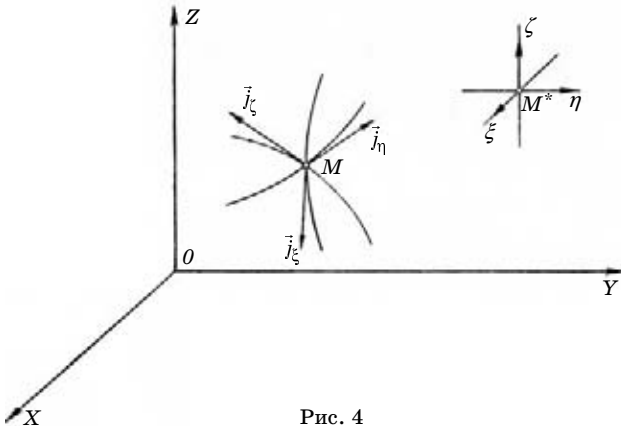


Рис. 4

|     | $j_\xi$                           | $j_\eta$                           | $j_\zeta$                           |
|-----|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| $X$ | $\frac{1 + E_\xi}{D} \alpha_{11}$ | $\frac{1 + E_\eta}{D} \alpha_{12}$ | $\frac{1 + E_\zeta}{D} \alpha_{13}$ |
| $Y$ | $\frac{1 + E_\xi}{D} \alpha_{21}$ | $\frac{1 + E_\eta}{D} \alpha_{22}$ | $\frac{1 + E_\zeta}{D} \alpha_{23}$ |
| $Z$ | $\frac{1 + E_\xi}{D} \alpha_{31}$ | $\frac{1 + E_\eta}{D} \alpha_{32}$ | $\frac{1 + E_\zeta}{D} \alpha_{33}$ |

Здесь  $E_\xi$  есть относительное удлинение проходящего через точку  $M$  волокна, которое после деформации становится параллельным оси  $X$ .

Используя равенство  $\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = 1$  и подставив в него значения  $\lambda, \mu, \nu$ , согласно (3.9) можно получить для  $E_\xi$  следующее выражение:

$$E_\xi = \frac{D}{\sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2}} - 1. \quad (3.10)$$

Поскольку линейному элементу  $d\xi$  в теле после деформации соответствует линейный элемент координатной линии  $\xi$  в теле до деформации (§ 1), формулы (3.9) определяют направляющие косинусы касательной к этой кривой в точке  $M$ .

Из (3.5) путем аналогичных рассуждений могут быть получены и направляющие косинусы касательных к линиям  $\eta$  и  $\zeta$  в теле до деформации.

Обозначим единичные векторы, направленные по касательным к координатным линиям  $\xi, \eta, \zeta$  в точке  $M$  тела до деформации, через  $j_\xi, j_\eta, j_\zeta$  (рис. 4). В соответствии с полученными результатами направляющие косинусы этих трех единичных векторов по отношению к декартовым осям  $X, Y, Z$  будут определяться табл. 2.

В этой таблице (помимо обозначений, введенных ранее)  $E_\eta, E_\zeta$  — относительные удлинения в точке  $M^*$  тех волокон тела, которые после деформации становятся параллельными осям  $Y$  и  $Z$ ; формулы для них могут быть написаны по аналогии с (3.10).

## § 4. Сдвиги

Рассмотрим два произвольных волокна (I и II), проходящих через точку  $M$  в теле до деформации. Пусть угловые коэффициенты касательных к данным волокнам (в точке  $M$ ) будут равны  $\lambda_I, \mu_I, \nu_I$ , и  $\lambda_{II}, \mu_{II}, \nu_{II}$  (соответственно).

После деформации направления вышеуказанных касательных изменяются (рис. 5) и новые значения направляющих косинусов  $\lambda_I^*, \mu_I^*, \nu_I^*$  и  $\lambda_{II}^*, \mu_{II}^*, \nu_{II}^*$  могут быть вычислены с помощью (3.3).

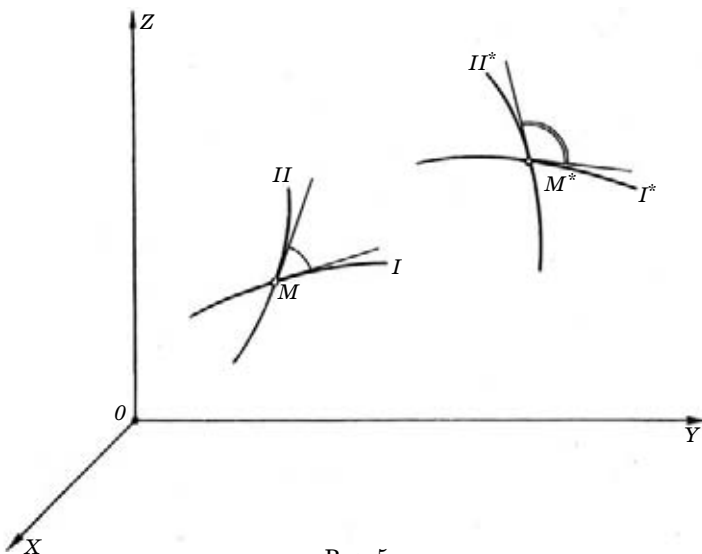


Рис. 5

Затем по формуле

$$\cos(I^*, II^*) = \lambda_I^* \lambda_{II}^* + \mu_I^* \mu_{II}^* + \nu_I^* \nu_{II}^* \quad (4.1)$$

можно найти косинус угла между волокнами  $I^*$  и  $II^*$  после деформации. Подставив в (4.1) вместо направляющих косинусов их значения согласно (3.3) и учитывая обозначения (2.5), получим

$$\begin{aligned} \cos(I^*, II^*) = & \frac{1}{(1 + E_I)(1 + E_{II})} [(1 + 2\varepsilon_{xx})\lambda_I \lambda_{II} + \\ & + (1 + 2\varepsilon_{yy})\mu_I \mu_{II} + (1 + 2\varepsilon_{zz})\nu_I \nu_{II} + \varepsilon_{xy}(\mu_I \lambda_{II} + \lambda_I \mu_{II}) + \\ & + \varepsilon_{xz}(\lambda_I \nu_{II} + \nu_I \lambda_{II}) + \varepsilon_{yz}(\mu_I \nu_{II} + \nu_I \mu_{II})]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Входящие сюда относительные удлинения волокон  $E_I$  и  $E_{II}$  определяются формулой (2.8), в которую надо подставить вместо  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  значения направляющих косинусов волокон  $I$  и  $II$  в теле до деформации (т. е.  $\lambda_I$ ,  $\mu_I$ ,  $\nu_I$  и  $\lambda_{II}$ ,  $\mu_{II}$ ,  $\nu_{II}$ , соответственно).

Таким образом, формулы (2.8) и (4.2) дают возможность найти угол между любыми двумя волокнами, проходящими через произвольную точку деформированного тела, если известны направляющие косинусы этих волокон до деформации и шесть величин  $\varepsilon_{ij}$ , определяющихся формулами (2.5).

Применим формулу (4.2) к частному случаю, когда направления касательных к волокнам  $I$  и  $II$  в теле до деформации параллельны координатным осям  $X$  к  $Y$  (соответственно). В этом случае  $\lambda_I = \mu_{II} = 1$ ,  $\mu_I = \lambda_{II} = \nu_I = \nu_{II} = 0$ , причем направления касательных к волокнам

$I$  и  $II$  в теле после деформации будут совпадать с направлениями единичных векторов  $i_x, i_y$  (§ 3).

Учитывая сделанные замечания,

$$\cos(i_x, i_y) = \frac{\varepsilon_{xy}}{(1 + E_x)(1 + E_y)} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})}}. \quad (4.3)$$

До деформации угол между волокнами  $I$  и  $II$  (в данном частном случае равный углу между осями координат  $X$  и  $Y$ ) был прямым. Обозначив уменьшение этого угла в результате деформации через  $\varphi_{xy}$ , получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}\right) = \sin \varphi_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})}}. \quad (4.4)$$

Аналогично могут быть введены еще два параметра  $\varphi_{xz}, \varphi_{yz}$  — изменения первоначально прямых углов между волокнами, параллельными в теле до деформации осям  $X$  и  $Z$  или  $Y$  и  $Z$ ,

$$\sin \varphi_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{zz})}}; \quad \sin \varphi_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz})}}; \quad (4.5)$$

углы  $\varphi_{xy}, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}$  назовем сдвигами.

## § 5. Компоненты деформации

В формулы (2.8) и (4.2), первая из которых позволяет определить относительное удлинение произвольного волокна тела, а вторая — угол между двумя произвольными пересекающимися волокнами, входят помимо косинусов  $\lambda, \mu, \nu$ , определяющих направления рассматриваемых волокон до деформации, шесть параметров  $\varepsilon_{ij}$ . Данные шесть величин, связанные с перемещениями формулами (2.5), будучи известными в каждой точке тела, полностью характеризуют его деформацию, поскольку, зная их, можно вычислить относительные удлинения в любой точке и в любом направлении, а также определить обусловленные деформацией изменения углов между любой парой волокон. Равенство всех  $\varepsilon_{ij}$  нулю в каждой точке тела означает неизменность расстояний между любыми двумя точками тела, а также неизменность углов между любой парой волокон, что равносильно отсутствию деформации. Отсюда ясно, что перемещения  $u, v, w$ , удовлетворяющие системе из шести нелинейных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (5.1)$$

могут быть только перемещениями тела как абсолютно твердого целого.

Как известно из курсов теоретической механики, компоненты перемещения произвольной точки абсолютно твердого тела определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ v &= v_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ w &= w_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{aligned} \right\}, \quad (5.2)$$

в которых  $u_0, v_0, w_0$  — перемещения произвольной точки тела (например, центра тяжести), а  $a_k, b_k, c_k$  — коэффициенты, зависящие от трех эйлеровых углов, определяющих направления осей связанной с твердым телом декартовой системы  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  по отношению к первоначальным направлениям этих осей (т. е. по отношению к их направлениям до перемещения тела; рис. 6).

Выражения коэффициентов  $a_k, b_k, c_k$  через эйлеровы углы приведены в табл. 3.

Предлагаем читателю самостоятельно удостовериться в том, что подстановка (5.2) в (2.5) приводит к равенствам (5.1).

Выше было сказано, что деформация тела в каждой его точке полностью характеризуется шестью величинами  $\varepsilon_{ij}$ , поскольку их задание по существу равносильно косвенному заданию удлинений и сдвигов.

Удлинения и сдвиги как характеристики деформации имеют преимущество наглядности. Их геометрический смысл вполне ясен, чего нельзя сказать о параметрах  $\varepsilon_{ij}$ . Однако последние имеют существенные

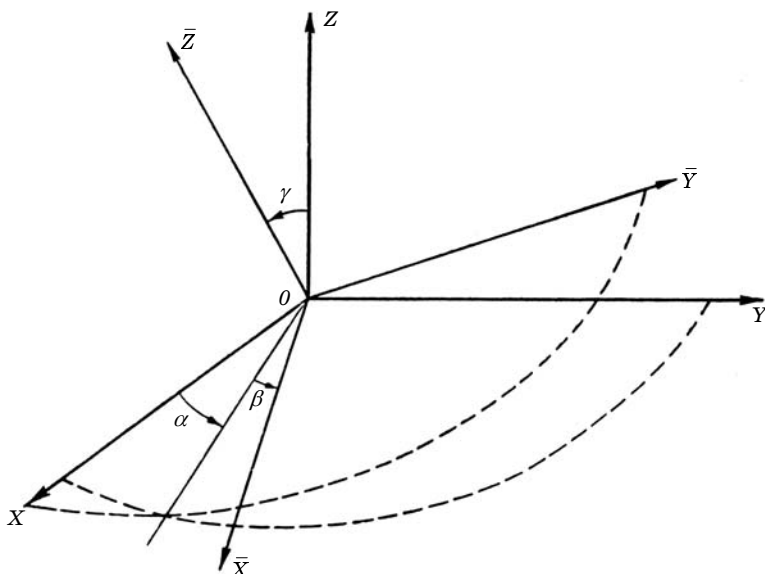


Рис. 6

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| Предисловие к переизданию .....               | 3  |
| Предисловие к первому изданию (1958 г.) ..... | 4  |
| Основные условные обозначения .....           | 6  |
| Введение .....                                | 10 |

### Глава I. Теория деформаций

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Перемещения .....                                                                                      | 15 |
| § 2. Изменение длины линейного элемента .....                                                               | 19 |
| § 3. Изменение направления линейного элемента .....                                                         | 21 |
| § 4. Сдвиги .....                                                                                           | 25 |
| § 5. Компоненты деформации .....                                                                            | 27 |
| § 6. Преобразование компонентов деформации при переходе от одних координатных осей к другим .....           | 30 |
| § 7. Главные направления деформации .....                                                                   | 32 |
| § 8. Вычисление главных удлинений; инварианты деформации .....                                              | 37 |
| § 9. Преобразование параметров $e_{ij}$ и $\omega_k$ при переходе от одних координатных осей к другим ..... | 39 |
| § 10. Геометрический смысл параметров $\omega_k$ .....                                                      | 41 |
| § 11. Общая картина деформации в окрестности произвольной точки тела .....                                  | 45 |
| § 12. Относительное изменение объема .....                                                                  | 48 |
| § 13. Упрощения, возможные при малых удлинениях и сдвигах .....                                             | 50 |
| § 14. Случай, когда малы не только деформации, но и углы поворота ..                                        | 52 |
| § 15. Условия сплошности деформаций .....                                                                   | 55 |

### Глава II. Равновесие объемного элемента

|                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Напряжения .....                                                                                               | 61  |
| § 2. Формулы для пересчета компонентов напряжения при переходе от одной системы координат к другой .....            | 66  |
| § 3. Главные направления напряжений; инварианты тензора напряжений ..                                               | 69  |
| § 4. Максимальные значения касательных напряжений .....                                                             | 71  |
| § 5. Среднее касательное напряжение .....                                                                           | 75  |
| § 6. Условия равновесия элементарного параллелепипеда, выделенного из деформированного тела .....                   | 77  |
| § 7. Преобразование уравнений равновесия объемного элемента к декартовым координатам точек тела до деформации ..... | 81  |
| § 8. Симметрия обобщенных напряжений .....                                                                          | 88  |
| § 9. Еще две формы написания уравнений равновесия объемного элемента ..                                             | 93  |
| § 10. Упрощение уравнений равновесия при малых удлинениях и сдвигах ....                                            | 98  |
| § 11. Упрощение уравнений равновесия при малых поворотах .....                                                      | 100 |
| § 12. Переход к линейным уравнениям равновесия объемного элемента ..                                                | 101 |
| § 13. Дифференциальные уравнения движения объемного элемента сплошной среды .....                                   | 103 |
| § 14. Простейшие операции с тензорами .....                                                                         | 105 |
| § 15. О форме функциональной зависимости между двумя симметричными соосными тензорами второго ранга .....           | 111 |

### Глава III. Работа деформации и некоторые связанные с нею принципы. Потенциал напряжений идеально упругого тела и следующие из него соотношения между напряжениями и деформациями

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Приращение работы деформации .....                   | 115 |
| § 2. Начало возможных перемещений для сплошных сред ..... | 120 |

|                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 3. Вывод дифференциальных уравнений равновесия деформированного тела и соответствующих этим уравнениям граничных условий из принципа возможных перемещений | 122 |
| § 4. О формулировке граничных условий для сплошного тела, находящегося в равновесии                                                                          | 125 |
| § 5. Геометрически возможные перемещения, статически возможные напряжения и равенство, их связывающее                                                        | 128 |
| § 6. Начало возможных перемещений как следствие равенства (5.2)                                                                                              | 132 |
| § 7. Начало возможных изменений напряженного состояния                                                                                                       | 133 |
| § 8. Потенциальная энергия деформации упругого тела                                                                                                          | 135 |
| § 9. Еще одно свойство удельной энергии деформации                                                                                                           | 139 |
| § 10. Дополнительная работа деформации                                                                                                                       | 140 |
| § 11. Полная энергия деформации и ее свойства                                                                                                                | 144 |
| § 12. Начало Кастильяно                                                                                                                                      | 146 |
| § 13. Некоторые приближенные методы решения задач теории упругости, основывающиеся на начале возможных перемещений                                           | 150 |
| § 14. О выборе начала отсчета для перемещений и деформаций                                                                                                   | 156 |
| § 15. Соотношения между напряжениями и деформациями в изотропных упругих телах                                                                               | 158 |
| § 16. О связи между напряжениями и деформациями в анизотропных телах; главные направления анизотропии                                                        | 163 |
| § 17. Термодинамика обратимой деформации                                                                                                                     | 166 |
| § 18. Классификация задач теории упругости                                                                                                                   | 169 |

#### Глава IV. Криволинейные координаты

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Некоторые сведения из теории ортогональных криволинейных координат                       | 172 |
| § 2. Формулы для компонентов деформации в произвольной ортогональной системе координат        | 179 |
| § 3. Уравнения равновесия объемного элемента в ортогональных криволинейных координатах        | 184 |
| § 4. Работа деформации (и связанные с нею принципы) в ортогональных криволинейных координатах | 191 |

#### Глава V. Общие формулы классической (линейной) теории упругости

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Линеаризация выражений для деформаций                                                         | 197 |
| § 2. Определение вектора поворота $\omega$ по заданным деформациям                                 | 198 |
| § 3. Определение вектора перемещения по заданным компонентам деформации                            | 200 |
| § 4. Об однозначности определения перемещений и углов поворота                                     | 201 |
| § 5. Условия равновесия внутри объема тела и на его границе                                        | 204 |
| § 6. Закон Гука                                                                                    | 206 |
| § 7. Дифференциальные уравнения линейной теории упругости (в перемещениях)                         | 209 |
| § 8. Представление общего решения однородных уравнений теории упругости в форме П. Ф. Папковича    | 212 |
| § 9. Постановка задачи теории упругости в напряжениях                                              | 214 |
| § 10. Учет влияния нагрева тела в процессе его деформации                                          | 216 |
| § 11. Постановка динамических задач линейной теории упругости                                      | 219 |
| § 12. Удельная энергия деформации изотропного тела, следующего закону Гука                         | 224 |
| § 13. Формула Клапейрона                                                                           | 226 |
| § 14. Определение удельной дополнительной работы (первого рода) для тел, подчиняющихся закону Гука | 227 |

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 15. Теорема взаимности работ                                                                                   | 228 |
| § 16. Принцип минимума полной энергии и начало Кастильяно в условиях при минимости классической теории упругости | 230 |
| § 17. Пропорциональность перемещений действующей нагрузке; принцип наложения                                     | 232 |
| § 18. Теоремы существования и единственности решения задачи линейной теории упругости                            | 235 |
| § 19. Закон Гука для анизотропных тел                                                                            | 240 |
| § 20. Элементы симметрии упругих свойств анизотропных тел и их классификация                                     | 245 |
| § 21. Преобразование уравнений классической теории упругости к ортогональным криволинейным координатам           | 249 |
| § 22. Уравнения линейной теории упругости в цилиндрических и сферических координатах                             | 254 |

## Глава VI. Задача Сен-Венана

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Полуобратный метод Сен-Венана                                                       | 260 |
| § 2. Принцип Сен-Венана                                                                  | 261 |
| § 3. Постановка задачи Сен-Венана                                                        | 262 |
| § 4. Растяжение стержня продольной силой                                                 | 264 |
| § 5. Изгиб стержня моментом                                                              | 265 |
| § 6. Кручение стержней (общая теория)                                                    | 268 |
| § 7. Другие пути решения задачи о кручении                                               | 275 |
| § 8. Результирующие касательные напряжения (в задаче о кручении) и некоторые их свойства | 278 |
| § 9. Теорема о циркуляции касательного напряжения (в задаче о кручении)                  | 280 |
| § 10. Кручение стержня, сечением которого является круг или круговое кольцо              | 282 |
| § 11. Кручение стержня с эллиптическим поперечным сечением                               | 283 |
| § 12. Эффект концентрации напряжений в скрученном стержне, имеющем малую выкружку        | 285 |
| § 13. Кручение стержня, поперечное сечение которого есть равносторонний треугольник      | 287 |
| § 14. Кручение стержня прямоугольного профиля                                            | 289 |
| § 15. Кручение стержня, поперечное сечение которого есть полукольцо                      | 293 |
| § 16. Аналогия Прандтля                                                                  | 297 |
| § 17. Кручение односвязных тонкостенных профилей, составленных из прямоугольных полос    | 300 |
| § 18. Кручение тонкостенных стержней двухсвязного профиля (кручение труб)                | 302 |
| § 19. Изгиб стержня поперечной силой, приложенной на его конце                           | 306 |
| § 20. Центр изгиба                                                                       | 312 |
| § 21. Центр изгиба стержня, поперечное сечение которого есть полукольцо                  | 316 |
| § 22. Изгиб стержня эллиптического поперечного сечения                                   | 318 |

## Глава VII. Плоская задача теории упругости

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Плоская деформация                                                                          | 324 |
| § 2. Функция Эри                                                                                 | 327 |
| § 3. Плоское напряженное состояние                                                               | 328 |
| § 4. Обобщенное плоское напряженное состояние                                                    | 330 |
| § 5. Выражение функции Эри через гармонические функции                                           | 335 |
| § 6. Выражение граничных условий через функцию Эри, если на поверхности тела заданы внешние силы | 339 |
| § 7. Выражение перемещений через функцию Эри                                                     | 341 |
| § 8. Плоская задача в криволинейных координатах                                                  | 344 |
| § 9. Постановка плоской задачи в комплексной форме                                               | 348 |

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 10. Исследование вида функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ .....                                          | 351 |
| § 11. Комплексная форма граничных условий для плоской задачи .....                                      | 353 |
| § 12. Преобразование граничных условий к криволинейным координатам ..                                   | 356 |
| § 13. О конформном преобразовании областей на круг единичного радиуса ...                               | 362 |
| § 14. Решение плоской задачи для кругового цилиндра (или для круговой пластины) .....                   | 364 |
| § 15. Концентрация напряжений в плоском листе, ослабленном круговым вырезом .....                       | 367 |
| § 16. Метод степенных рядов (неопределенных коэффициентов) как общий прием решения плоской задачи ..... | 371 |
| § 17. Видоизмененный метод неопределенных коэффициентов .....                                           | 376 |
| § 18. Концентрация напряжений в окрестности эллиптического выреза ...                                   | 379 |
| § 19. Концентрация напряжений в окрестности квадратного выреза .....                                    | 383 |
| § 20. Плоская задача для полуплоскости .....                                                            | 388 |
| § 21. Силы, распределенные вдоль линии, сосредоточенные силы и функции, их изображающие .....           | 395 |
| § 22. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость (задача Фламана) ...                               | 399 |
| Литература .....                                                                                        | 403 |