

Н.Г. Федотов

ТЕОРИЯ ПРИЗНАКОВ  
РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ  
НА ОСНОВЕ  
СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА



Н.Г. Федотов

ТЕОРИЯ ПРИЗНАКОВ  
РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ  
НА ОСНОВЕ  
СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2010

УДК 681.39;  
007.001.362  
ББК 32.97  
Ф 34

Федотов Н.Г. **Теория признаков распознавания образов на основе стохастической геометрии и функционального анализа.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 304 с. — ISBN 978-5-9221-0996-3.

В книге предлагается новая теория признаков распознавания образов на основе стохастической геометрии и функционального анализа, которая позволяет формировать конструктивные признаки распознавания нового класса — триплетные признаки. Источником формирования триплетных признаков является введенное автором новое геометрическое преобразование, связанное со сканированием изображений по сложным траекториям. Построена с единых позиций объединенная теория признаков распознавания и предварительной обработки изображений, пригодная для создания мощных самонастраивающихся систем распознавания образов. Приведены примеры эффективного применения теории в области геологии, медицинской и технической диагностики, нанотехнологии, биометрии.

Научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, специалистам в области теоретической информатики и кибернетики.

***Рукопись книги стала призером конкурса по информатике 2007 г. Международного фонда «Human Capital Foundation» (фонда «Научный потенциал» — Англия).***

---

Научное издание

*ФЕДОТОВ Николай Гаврилович*

**ТЕОРИЯ ПРИЗНАКОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

Редактор *С.А. Тюрина*

Оригинал-макет: *Е.А. Королева*

Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 28.11.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,0. Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

http://www.fml.ru

ISBN 978-5-9221-0996-3

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

9

---

ISBN 978-5-9221-0996-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2009, 2010

© Н.Г. Федотов, 2009, 2010

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Устойчивой тенденцией научно-технического прогресса является увеличение числа людей, занятых обработкой информации. Оно превысило число людей в сфере материального производства. Настоятельной стала потребность во все более совершенных средствах информатики, поскольку информация является ключевым элементом принятия решений. Одной из важнейших задач, возникающих при создании информационных систем, является автоматизация процесса распознавания образов. Для ее решения ведутся широкие исследования, которые призваны помочь познать одно из основных свойств человеческого мозга — способность распознавать — и создать решающие предпосылки для построения интеллектуальных систем. При этом следует подчеркнуть, что подражание деятельности человеческого мозга — не единственный подход к построению подобных систем. У техники есть свои собственные пути реализации этой задачи, отличные от естественных возможностей человека. Раскрытию некоторых из этих путей, связанных с применением стохастической геометрии и функционального анализа, и посвящена эта книга.

В предшествующей книге автора (*Федотов Н.Г. Методы стохастической геометрии в распознавании образов. — М.: Радио и связь, 1990*) аппарат стохастической геометрии применён для формирования признаков распознавания изображений, а полученные на его основе алгоритмы использованы для построения распознающих систем. Простота, высокое быстродействие и экономичность обусловлены тем, что распознавание в таких системах совмещено с процессом сканирования. Эта книга в 1992 г. стала призёром международного конкурса по решению проблемы распознавания образов, организованного транснациональной компанией HEWLETT PACKARD (HP) (жюри: лаборатория HP по распознаванию образов и университет г. Бристоль — Англия). Конкурс проводился под девизом «Новые идеи в решении проблемы распознавания образов». Автор с удовлетворением отмечает, что идеи, изложенные в книге, не устарели. По данным INTERNET методы стохастической геометрии используются в Институте белка РАН при микроскопических исследованиях протеинов. По данным [15] методы, основанные на стохастических признаках, применяются при поиске изображений по их содержанию в больших базах данных. Автор и его научная школа успешно применяют методы стохастической геометрии при анализе и распознавании биологических микрообъектов из области нанотехнологий [51, 52, 55, 80, 82, 86]. Однако главный потенциал новизны упомянутой книги заключается во введённом в ней автором новом геометрическом преобразовании, связанном со сканированием

изображений по сложным траекториям. Это преобразование названо в последующих работах трейс-преобразованием (от английского слова *trace* — след). Введённое трейс-преобразование дало импульс развитию новой теории признаков распознавания в последующих исследованиях автора, включая и данную книгу.

Первые четыре главы настоящей книги посвящены формированию признаков распознавания на основе исследования геометрических вероятностей пересечений, покрытий геометрических объектов: прямых, отрезков прямых, кривых, областей и решёток. Часть этих геометрических объектов интерпретируется как распознаваемое изображение, другая часть как сложные траектории сканирования.

В главе 5 излагается теория трейс-преобразования. Показано, что трейс-преобразование является удобным инструментом изучения движения объектов. Исследуется реакция результатов трейс-преобразования на группу движений и масштабные изменения объектов, по ним определяются параметры этих преобразований.

Трейс-преобразование служит источником нового класса конструктивных признаков распознавания, которые могут быть получены в режиме автоматической компьютерной генерации. Характерной особенностью этих признаков, названных триплетными, является их структура в виде композиции трёх функционалов. Благодаря такой структуре возможна генерация большого числа (тысяч) новых признаков распознавания. Опора на большое число признаков позволяет говорить о новом понимании изображений. В процессе генерации могут появляться коррелированные признаки, для исключения избыточности анализируются пути сокращения размерности признакового пространства. Исследованию теории триплетных признаков, процессу их генерации и его программной реализации посвящены главы 6 и 7.

Трейс-преобразование и введённое автором двойственное трейс-преобразование дают возможность осуществить нелинейную фильтрацию изображений с целью их сегментации, уменьшения зашумлённости, сглаживания, полигональной аппроксимации и других видов предварительной обработки изображений. С теоретической точки зрения это очень важно, так как позволяет с единых позиций рассмотреть два этапа распознавания образов: предварительную обработку и формирование признаков. Это важно и с практической точки зрения, так как предобработка изображения и формирование признаков осуществляется за один шаг работы сканирующей системы, что ведёт к повышению быстродействия распознающих систем. Этот материал составляет содержание главы 8.

В главе 9 рассмотрено приложение стохастической геометрии и функционального анализа к решению задач технической дефектоскопии — распознаванию дефектов сварных соединений.

Глава 10 посвящена распознаванию сложноструктурированных изображений на основе стохастической геометрии и функционального анализа и его программной реализации. Речь идёт о применении триплетных признаков для распознавания гистологических изображений и изображений ультразвуковых исследований в рамках

проекта INTAS. Целью проекта было создание моделей на стыке медицины, информатики и математики для совершенствования диагностики.

В главе 11 исследуется новое применение аппарата стохастической геометрии и функционального анализа для поиска биометрической информации в больших базах данных.

В главе 12 показано, что аппарат стохастической геометрии можно успешно применять для распознавания не только изображений, но и незрительных образов. Приведены примеры применения стохастической геометрии для решения практических задач по распознаванию образов в геологии, геофизике и экологии. Все они демонстрируют, что аппарат стохастической геометрии необычайно эффективен. Эта мысль вполне понятна и людям других профессий, в том числе и людям искусства, тоже имеющим дело со случайностью. Ее весьма емко выразил Ю. Тынянов, говоря о поэзии Б. Пастернака в своей замечательной книге «Архаисты и новаторы»: «У нас нет связи, которую он (поэт) дает, она случайна; но когда он дал ее, она вам как-то припоминается, она где-то там уже была — и образ становится обязательным».

В заключение автор выражает признательность членам жюри конкурса по информатике 2007 г. международного фонда «Human Capital Foundation» (фонд «Научный потенциал» — Англия) за предоставленную возможность написания настоящей книги.

Автор благодарит членов научной школы, которые в разные годы учились под его руководством в аспирантуре и докторантуре: к.т.н. Л. А. Шульгу, к.т.н. Т. В. Никифорову, к.ф.-м.н. А. А. Кадырова, к.ф.-м.н. А. В. Моисеева, аспирантов А. С. Кольчугина, С. В. Романова, А. В. Роя, О. В. Смолькина за участие в исследованиях и разработке приложений.

Автор благодарит инженера Е. А. Крючкову за большую помощь в оформлении рукописи этой книги.

Случайность оказывается более сильной связью, чем самая тесная логическая связь.

*Ю. Тынянов «Архансты и новаторы»*

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема распознавания образов является одной из центральных в кибернетике и информатике. Наряду с общетеоретическим значением — элемент распознавания образов присутствует в любом непримитивном поведении систем — для многих областей техники разработка методов распознавания является самоцелью. Речь идет в первую очередь о таких областях, как радиолокация, робототехника, техническая диагностика, системотехника. Успех в решении проблемы распознавания образов даст импульс развитию важнейшего направления информационных технологий — обработке данных, представленных в виде изображений.

В книге излагается новая теория признаков распознавания и предварительной обработки изображений, направленная на создание мощных самонастраивающихся распознающих систем.

В распознавании образов традиционно выделяют три этапа: предварительную обработку, формирование признаков и решающую процедуру. В информатике сложилась ситуация, когда большая часть научных работ посвящена решающим процедурам и меньше исследований по предобработке и, в особенности, по признакам распознавания, в то время как для проектировщиков распознающих систем наиболее важными являются процедуры предварительной обработки и формирования признаков, радикально уменьшающие избыточность исходной информации.

Формирование признаков распознавания рассматривается как эмпирическая задача, которая может быть решена в каждом конкретном случае на основании опыта и интуиции разработчика систем распознавания образов.

Существующие методы построения признаков распознавания узко специализированы и используют незначительную часть информации об объектах. Структурные методы не обладают инвариантностью по отношению к группе движений и линейным деформациям объектов. Придание им такой способности требует больших вычислительных затрат. Метод дескрипторов Фурье пригоден для распознавания контурных изображений. Метод моментов использует только функцию яркостной интенсивности точки и не включает в распознающие варианты информацию об окрестностях точек.

Предлагаемый в книге подход к решению этой задачи с позиций стохастической геометрии и функционального анализа даёт возможность не только теоретически исследовать малоизученные ранее этапы предварительной обработки изображений и формирования признаков распознавания, но и получить новый класс конструктивных признаков распознавания (триpletные признаки). При таком подходе за счёт выбора трейс-функционалов полнее (чем в методах интегральной геометрии, моментов и т. д.) отображаются свойства окрестностей точек пересечения изображений сканирующими линиями. Это ведёт к большей универсальности признаков, они могут быть применены для распознавания не только монохроматических (чёрно-белых), но и тональных, и цветных изображений.

Экспериментально подтверждённая эффективность признаков распознавания нового класса связана с их геометричностью — большинство формул стохастической геометрии и известные геометрические преобразования — Радона, Хо, Фурье, Радона-Хо — могут быть представлены в виде композиции трёх функционалов.

При распознавании образов важной целью является достижение инвариантности распознавания по отношению к группе движений и линейным деформациям объектов, так как от этого зависит надёжность распознавания. Вместе с тем, в ряде областей — в робототехнике (при позиционировании инструмента), в аэрокосмических исследованиях и т. д. важно не только правильно распознать движущийся объект, но и определить параметры движения. Варьируя свойства функционалов, включённых в tripletный признак, мы можем получить признаки, инвариантные по отношению к перемещениям, вращениям и линейным деформациям объектов или чувствительные (чувствительные) к ним. Последние могут служить для определения параметров движения. При конструировании признаков функционалы выбираются из различных областей математики: теории вероятностей, статистики, интегральной геометрии, теории рядов и фракталов. Поэтому сформированные на их основе признаки несут в себе следы генезиса соответствующих областей математики, благодаря чему достигается гибкость и универсальность распознавания и повышается интеллектуальность распознающих систем. Это показывается на приведенных в книге примерах интеллектуальных систем распознавания в области биологических нанотехнологий, биометрии, медицинской и технической диагностики, геологии.

Идея метода tripletных признаков является новой, она возникла как естественное обобщение и соединение известных интегральных подходов, таких как метод моментов, фрактальной размерности, метод проекций, метод признаков интегральной геометрии.

Новым является предложенный в книге подход к предварительной обработке изображений с помощью введённых автором трейс-преобразования и двойственного трейс-преобразования.

В данной книге рассматривается применение разработанной теории предварительной обработки изображений и теории признаков распознавания для эффективного решения задач распознавания в разных областях.

В предисловии эти результаты перечислены в соответствии с делением книги на главы для обозначения структуры книги и подчёркивания её внутренней целостности.

Как отмечалось, представленная в книге новая теория предварительной обработки изображений и признаков распознавания базируется на совместном применении математического аппарата стохастической геометрии и функционального анализа. Термин «стохастическая геометрия» охватывает ту часть геометрии и теории групп, которая относится к случайным процессам. Усиление этого сложного математического аппарата элементами функционального анализа оказалось плодотворным для исследования проблемы распознавания образов.

Применить ядро стохастической геометрии — интегральную геометрию — для решения задач распознавания образов впервые предложил в 1961 г. американский профессор А. Новиков на конференции по принципам самоорганизации, проведенной в Стэнфордском университете [117]. Однако в технике эти идеи не получили должного развития.

Данная книга посвящена исключительно информатике, её теоретическим проблемам, решаемым программным путём. Однако автор счёл необходимым включить в приложение описание некоторых разработанных им ранее электронных распознающих систем, исключительно в качестве натуральных моделей, для пояснения деталей процесса обработки информации.

# ГЛАВА 1

## ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

### 1.1. Теорема Бюффона и идея построения распознающей системы

Проблема распознавания образов охватывает практически все многообразие человеческой деятельности. В терминах распознавания образов можно описать деятельность врача при диагностике заболеваний, физика при интерпретации результатов эксперимента, социолога при изучении общественного мнения. Причем не только исследовательская деятельность, направленная на познание природы и общества, приводит к необходимости распознавать образы. В обыденной жизни буквально на каждом шагу человек решает проблему распознавания (человеческих лиц, речи, письменных знаков, дорожной ситуации и т. п.). Вместе с тем распознавание образов не ограничено рамками человеческого интеллекта — оно является фундаментальным свойством живых организмов, которые для того, чтобы выжить, приобрели в процессе эволюции способность классифицировать сходные раздражители с целью выработки адекватной реакции. Таким образом, элемент распознавания образов неизбежно присутствует в поведении живых организмов, а элемент автоматического распознавания присутствует в адаптивном поведении сложных технических систем класса «искусственный интеллект».

Однако несмотря на универсальный и всеобъемлющий характер проблемы распознавания и присутствие элементов распознавания в любом непримитивном поведении систем, в литературе существует обескураживающе большое число различных определений проблемы распознавания. Общим содержанием этих определений является то, что под распознаванием образов понимается отнесение объектов, задаваемых совокупностью наблюдений, к одному из классов или образов. Подчеркнем, что до тех пор, пока не наложено формальных ограничений на множество объектов, относящихся к одному классу или образу, задача распознавания будет алгоритмически неразрешима. Поэтому такие ограничения непременно содержатся в постановке задачи распознавания, хотя, может быть, и в неявном виде. Обилие

типов ограничений, накладываемых на объекты, относящиеся к одному классу, и порождает разнообразие формулировок задач распознавания.

Несмотря на различия определений проблемы распознавания, конечной целью является построение некоторой системы обработки информации, имеющей вход и выход. Данные, поступающие на вход, очень сложны: имеют большую избыточность, содержат помехи и тесно связаны с природой объектов. Выходная информация исключительно проста — содержит указание класса или образа. Без потери общности можно считать, что выходная информация содержит лишь номера классов или образов, т. е. является конечным подмножеством натуральных чисел  $1, 2, \dots, N$ . Распознающая система осуществляет отображение входной информации на это множество.

Таким образом, при проектировании распознающих систем возникает следующая общая задача. Имеется множество образов  $\{A\} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ , число которых известно и равно  $N$ . Каждому образу соответствует совокупность наблюдений, являющаяся множеством  $\{X\}$ . Требуется построить распознающий алгоритм, осуществляющий однозначное отображение совокупности наблюдений или множества  $\{X\}$  на множество образов  $\{A\}$ , т. е.  $\{A\} \leftarrow \{X\}$  [38].

В этой главе речь пойдет о распознавании образов, имеющих зрительную природу, т. е. изображений различных объектов. Очевидно, что поскольку такие образы различимы по форме, они обладают некоторыми устойчивыми геометрическими характеристиками. Применение аппарата стохастической геометрии для анализа и распознавания подобных образов мы начнем с рассмотрения наиболее известной теоремы Бюффона [8, 17, 105], лежащей в основе стохастической геометрии<sup>1</sup>.

Пусть для распознавания предъявлены два класса объектов или два образа, представляющие собой решетки параллельных линий, произвольно ориентированные на плоскости и отличающиеся расстояниями между линиями: у одного из образов это расстояние равно  $a$ , у другого —  $a'$ . Для решения этой задачи распознавания применим вышеупомянутую теорему Бюффона, известную в литературе как задача об иголке. Согласно теореме, если мы случайным образом бросаем на решетку иголку, т. е. ориентированный отрезок длины  $l$ , которая не превышает расстояния между линиями решетки, то вероятность того, что иголка пересечет одну из линий, а не просто упадет между ними, равна  $(2/\pi)(l/a)$ . Пусть выбрали иголку с длиной, равной меньшему расстоянию между прямыми  $l = a < a'$ , осуществили многократное случайное бросание иголки на изображение решетки на плоскости (причем случайность бросания означает, что реализуется произвольный выбор ориентации и положения иголки на плоскости), произвели подсчет и усреднение числа случаев пересечения, тогда

<sup>1</sup> Несмотря на более чем 200-летнюю историю этой теоремы, распространение ее на трехмерное пространство осуществлено лишь недавно, в середине 70-х годов XX века (см.: Амбарцумян Р. В. К решению задачи Бюффона–Сильвестра в R3 // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 210, № 6. — С. 1257–1260). Это свидетельствует о значительных потенциальных возможностях развития идей теоремы, стимулированных современной математикой, в силу чего она представляется привлекательной и для техники.

в итоге получим число — оценку вероятности пересечений. Если полученное число близко к  $2/\pi$ , то это — решетка параллельных линий с меньшим расстоянием  $a$  между линиями (рис. 1.1, а). Если же число не превышает  $(2/\pi)(a/a')$ , то в эксперименте была предъявлена решетка линий с большим расстоянием  $a'$  между ними (рис. 1.1, б).

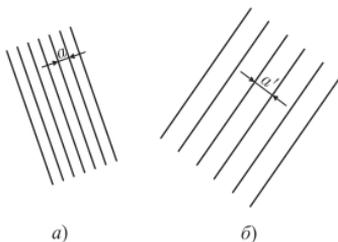


Рис. 1.1

Таким образом, описанный выше бюффовский процесс, заключающийся в случайном бросании направленных отрезков линий и подсчете среднего числа их пересечений с изображением объекта, оказывается чувствительным к форме объектов. Полученные в результате числа оценки вероятностей пересечений характеризуют геометрические параметры объектов. Отсюда можно сделать вывод о потенциальных возможностях применения данного процесса для распознавания образов. Следует сразу же отметить, что результат распознавания при таком подходе не зависит от ориентации и расположения изображений объектов. Это весьма ценное свойство, свидетельствующее о достижении значительной гибкости распознавания, так как если способ распознавания не зависит от ориентации и параллельного смещения, то, следовательно, сами объекты могут претерпевать такие изменения, а именно повороты и переносы в поле изображения.

Для технического воплощения описанного выше бюффовского процесса проектировщик распознающей системы должен найти эквивалент случайному бросанию иголки на плоскость. В качестве такого эквивалента естественно выбрать автоматическое электронное сканирование, при котором реализуется некоторое подобие метода Монте-Карло. При этом необходимо обеспечить такую же, как и при бросании иглок, траекторию движений сканирующего луча в виде случайно ориентированных и случайно расположенных в поле изображения направленных отрезков линий. Реализовать такой вид сканирования можно, например, на основе электронно-лучевой сканирующей системы типа «бегущий луч». На рис. 1.2 изображена архитектура системы, воплощающая эту идею [39].

Источником сканирующего луча в системе служит лазер или, как в данном случае, инжекционный лазер. С помощью датчика формирования случайных параметров развертки и подсистемы управления разверткой создается траектория сканирующего луча в виде случайных отрезков линий фиксированной длины  $l$ . Сканирующий луч проецируется оптической системой на носитель изображения, отраженный от носителя свет проецируется оптической системой на фотоприемник. При пересечении сканирующим лучом линий изображения вследствие различия коэффициентов отражения фона и изображения уменьшается

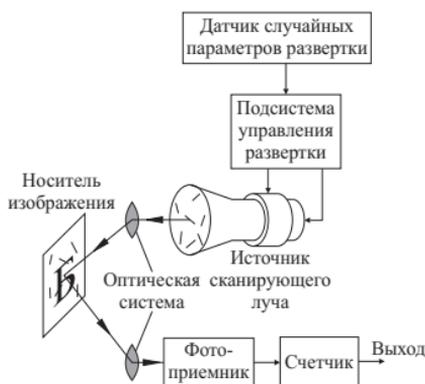


Рис. 1.2

отраженный световой поток, поступающий на фотоприемник. В результате этого от фотоприемника на счетчики поступают сигналы пересечения. Усредненное число сигналов пересечения, подсчитанное счетчиками, несет информацию о форме объекта. На основе этой натурной модели можно рассмотреть основные пути извлечения данных об объекте.

Следует подчеркнуть, что усреднение числа пересечений не является единственным способом извлечения информации о характере объекта при распознавании. Вообще говоря, возможны и другие варианты организации решающей процедуры для такого типа распознающей системы. Дело в том, что результат эксперимента по бросанию отрезков линий представляет собой наблюдение случайной величины. Пригодность наблюдения для решения задачи распознавания образов следует из того, что распределение случайной величины зависит от формы объекта. В бюффоновском процессе мы имели дело только со средним значением такой случайной величины. Однако, как будет показано ниже, в ряде случаев в качестве более информативных характеристик могут рассматриваться не только средние значения, но и полные распределения наблюдаемых величин. При этом решающие процедуры распознавания могут строиться на основе теории статистических решений.

В качестве других возможных расширений метода распознавания отметим следующие. Прежде всего, можно усложнить наблюдения в наших экспериментах по бросанию отрезка линии, т.е. применить более сложные признаки распознавания. Пусть, например, для распознавания предъявлены объекты, имеющие настолько гладкие границы, что в каждой точке существует конечное значение кривизны. Тогда при бросании случайных отрезков прямой можно в качестве наблюдений измерять кривизну границы в точке пересечения. Эти наблюдения, как

естественно предположить, должны быть связаны с общей кривизной границы объекта, характерной для каждого класса объектов.

Далее, расширение метода возможно, если в экспериментах по распознаванию бросать случайным образом не направленный отрезок линии, а какую-либо другую кривую той же длины  $l$ . Можно бросать, например, круг радиуса  $l/2$ , причем, как это не покажется неожиданным, вероятность пересечений при распознавании решеток линий на рис. 1.1 останется той же, что и при бросании направленных отрезков линий.

Наконец, можно в корне изменить характер обработки информации и не требовать от результата ясного математического смысла, а оценивать лишь его различающую способность (подобно тому, как это делается в нейрокомпьютинге, где хорошее различие объектов является лишь результатом удачной коммутации сети).

Однако все кратко отмеченные здесь расширения метода распознавания выходят за рамки бюффоновского процесса, и мы вернемся к ним в последующих главах по мере включения в рассмотрение новых фактов стохастической геометрии. Вместе с тем существует круг вопросов, органически связанных с теоремой Бюффона. Невнимание к ним приводит к определенным практическим трудностям при техническом воплощении системы, идея которой обсуждается в настоящей главе. Поэтому есть смысл остановиться на этих вопросах подробнее.

Дело в том, что источник вышеупомянутых трудностей связан с далеко не очевидным понятием случайной прямой. Концентрированным выражением этих трудностей является парадокс Бертрана [8], который показывает, к чему приводит нестрогое вероятностное мышление проектировщика распознающей системы при реализации процедуры случайного бросания.

Парадокс Бертрана, опубликованный в XIX веке, сыграл роль строгого оппонента по отношению к зарождающейся стохастической геометрии. Доводы его были столь серьезны, что он на некоторое время заблокировал развитие стохастической геометрии, многообещающее начало которой было положено яркой теоремой Бюффона [8]. Лишь с развитием теории меры, связанным с именем Пуанкаре, противоречие было разрешено, и это дало импульс развитию новой ветви математики — интегральной геометрии и стохастической геометрии в целом.

Парадокс Бертрана связан с решением следующей задачи. Пусть в качестве объекта выбрана окружность единичного радиуса и вычисляется вероятность того, что случайная хорда этой окружности не превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника. Это эквивалентно бросанию случайных бесконечных линий и вычислению условной вероятности того, что если линия пересекает окружность, то длина ее хорды больше чем  $\sqrt{3}$ . Возможны такие решения.

**Решение 1.** Длина хорды зависит от ее расстояния от центра окружности и не зависит от ее направления. Поэтому из соображений симметрии можно заранее задать ориентацию хорды, например вертикальную. Проведем диаметр, перпендикулярный этому направлению

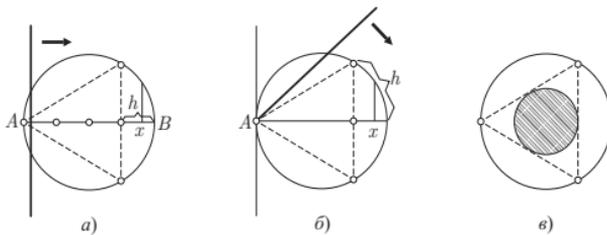


Рис. 1.3

(рис. 1.3, а). Очевидно, что только хорды, пересекающие диаметр в промежутке от четверти до трех четвертей его длины, будут превосходить стороны правильного треугольника. Таким образом, искомая вероятность равна  $1/2$ .

**Решение 2.** Всякая хорда пересекает окружность в двух точках. Предположим, что обе точки распределены на окружности по случайному равномерному закону, причем их положения на окружности независимы. Из соображений симметрии можно без потери общности предположить, что треугольник построен так, чтобы один из концов хорды совпал с его вершиной. Таким образом, в этом случае фиксируется один из концов хорды на окружности (рис. 1.3, б). Касательная к окружности в точке фиксации конца хорды и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по  $60^\circ$ . Условию задачи соответствуют только хорды, попадающие в средний угол. Следовательно, при этом способе вычисления искомая вероятность оказывается равной  $1/3$ .

**Решение 3.** Всякая хорда единственным образом определяется основанием перпендикуляра, проведенного из центра окружности, т.е. положением своей середины. Поэтому можно считать, что каждой точке круга соответствует единственная хорда. Для того чтобы хорда удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы ее середина находилась внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Площадь этого круга равна одной четверти площади данного. Следовательно, искомая вероятность равна  $1/4$ .

Таким образом, у нас есть три прямых метода определения искомой вероятности, дающие результаты  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ . Все эти три метода можно физически воплотить в системах, осуществляющих случайное бросание линий и подсчет вероятности пересечения, но результаты их работы, как мы видим, будут разными. Мы должны теперь выяснить, в чем причина неоднозначности решения нашей задачи. Лежит ли она в принципиальной невозможности определить вероятность или же в том, что мы принимали в процессе решения какие-либо недопустимые предположения?

Анализ показывает, что если в условии задачи не определено понятие случайной хорды, мы применяем три различных метода генерации

случайных прямых линий и за решение задачи выдаются фактически решения трех различных задач.

В самом деле, в первом решении наш генератор случайных прямых заставляет прямую скользить вдоль одного из диаметров (см. рис. 1.3, а). Множество всех возможных мест остановки этой прямой есть множество точек отрезка  $AB$  длины, равной диаметру. Равновероятными считаются события, состоящие в том, что остановка произойдет в интервале длиной  $h$ , где бы внутри диаметра не был расположен этот отрезок.

Во втором решении генерация случайных прямых осуществляется следующим образом. Прямую, закрепленную, как на шарнире, в одной из точек окружности, заставляют совершать колебания в диапазоне не более  $180^\circ$  (рис. 1.3, б). При этом предполагается, что остановка прямой внутри дуги окружности зависит только от длины дуги  $h$ , но не от ее положения. Таким образом, равновероятными событиями считаются остановки прямой в пределах любых дуг окружности одинаковой длины. Несогласованность определений вероятности в первом и втором вариантах решения становится очевидной после следующего элементарного расчета. Вероятность того, что прямая остановится в промежутке от  $A$  до  $x$ , согласно первому решению равна  $x/D$ . Вероятность того, что проекция точки пересечения прямой с окружностью в решении 2 попадает в тот же интервал, как показывают элементарные геометрические подсчеты, равна

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{D-2x}{D} \quad \text{при } x \leq D \quad (D=2)$$

и

$$1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{D-2x}{D} \quad \text{при } x \geq D.$$

Наконец, в решении 3 генератор случайным образом бросает точку внутрь круга. Далее оценивается вероятность попадания внутрь меньшего концентрического круга (рис. 1.3, в).

Итак, источник недоразумений при определении вероятности в нашей задаче заключен в неоднозначности понятия случайного бросания прямой линии. Для уточнения этого понятия сначала нужно выбрать систему координат, которые определяют прямую линию единственным образом, а затем определить вероятностное распределение в области изменения этих координат. Полученные выше различные решения, как мы установили, соответствуют различным способам, с помощью которых можно выполнить такую операцию случайного бросания. Не вводя каких-либо дополнительных принципов, нельзя утверждать, какое из этих решений правильно, можно лишь констатировать, что все они различны. Принцип, к которому приходится обращаться при таких обстоятельствах, называется инвариантностью. Для пояснения понятия инвариантности необходимо обратиться к элементам теории меры.

## 1.2. Меры, инвариантные к группе движений

Мера множества является обобщением понятий длины отрезка, площади фигуры, объема тела. Индуктивно мера соответствует массе множества при некотором распределении массы по пространству или при некоторой заданной плотности в пространстве [20, 31]. Понятие меры возникло первоначально в теории функций действительного переменного в связи с изучением и усовершенствованием понятия интеграла и оттуда перешло в теорию вероятностей, теорию динамических систем и многие другие области математики. Вероятностные меры рассматриваются в следующем параграфе; здесь же мы кратко обсудим общие меры, на основе которых впоследствии строятся вероятностные меры.

Рассмотрим наиболее простые с точки зрения изучения меры геометрические объекты множества точек на плоскости. Стремление к установлению вышеупомянутого принципа инвариантности означает, что мы хотим, чтобы вероятность попадания точки в некоторое множество совпадала с вероятностью того, что точка лежит в этом множестве при любом его повороте и параллельном переносе. *Это условие означает, что мера множества точек должна быть инвариантна относительно вращений и трансляций или, иначе говоря, инвариантна относительно группы движений твердого тела.* Для наших целей такую меру дает способ, при котором множествам точек на плоскости приписываются неотрицательные числа. Эта мера обладает следующими свойствами.

1. Мера пустого множества равна 0.
2. Мера  $\mu(F)$  принимает действительные неотрицательные значения.
3. Мера  $\mu(F)$  аддитивна. Если имеется счетное множество непесекающихся множеств точек  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , то мера их объединения равна сумме мер, т. е. если  $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$  и  $F_i \cap F_k = \emptyset$  при  $i \neq k$ , то

$$\mu(F) = \sum_{k=1}^n \mu(F_k).$$

4. Мера инвариантна к группе движений твердого тела  $\Omega$ .

Последнее условие означает, что если множество  $F$  конгруэнтно множеству  $F'$ , то мера  $F$  равна мере  $F'$ . Напомним, что множества  $F$  и  $F'$  конгруэнтны, если один элемент группы движений твердого тела может перевести  $F$  в  $F'$ . В общем случае, когда группа преобразований может перевести произвольно взятую точку множества в любую другую (это свойство называется транзитивностью группы на множестве), существует не более одной инвариантной меры, кроме масштабной константы. Возможна ситуация, когда такой инвариантной меры нет вообще, так как группа может оказаться сильно транзитивной. Это означает, что несколько преобразований могут перевести точку  $A$

в точку  $B$ . Примером такой группы преобразований является группа, состоящая из вращений, переноса и растяжений. Она сильно транзитивна, и поэтому на плоскости не существует меры, инвариантной этим преобразованиям. По этой причине, в частности, очень трудно распознавать биологические объекты, подверженные росту. Развитие, рост, таким образом, оказываются очень сложными изменениями не только с точки зрения кибернетики, но и математики.

**Мера множества точек.** Предположим, что  $x, y$  — декартовы координаты точки  $A$  на плоскости. Группу  $\Omega$  движений на плоскости, а именно трансляции и вращения, можно представить алгебраическим преобразованием координат:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a; \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $a, b$  — компоненты сдвига;  $\alpha$  — угол поворота.

Наша задача заключается в том, чтобы определить меру множества  $F$  точек  $A$  так, чтобы она была инвариантна относительно преобразований группы движений  $\Omega$ . В стохастической геометрии мера определяется как двойной интеграл вида <sup>1</sup>

$$\mu(F) = \int_F f(x, y) dx dy.\tag{1.2}$$

Иными словами, необходимо найти функцию  $f(x, y)$ , такую, чтобы мера  $\mu(F)$  была инвариантна относительно трансляций и вращений. Это означает, что должно иметь место равенство  $\mu(F') = \mu(F)$ , где  $F'$  — образ  $F$  при движении, или эквивалентное равенство

$$\int_F f(x, y) dx dy = \int_{F'} f(x', y') dx' dy'.\tag{1.3}$$

Вместе с тем согласно правилу замены переменных в двойном интеграле

$$\int_F f(x, y) dx dy = \int_{F'} f(x, y) \frac{D(x, y)}{D(x', y')} dx' dy',\tag{1.4}$$

где  $\frac{D(x, y)}{D(x', y')}$  — якобиан или функциональный определитель вида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix}\tag{1.5}$$

<sup>1</sup> Следуя математической литературе [17, 20, 31], применяем здесь и далее сокращенную математическую запись двойного интеграла. Таким образом, формула (1.2) эквивалентна  $\mu(F) = \iint_F f(x, y) dx dy$ .

В нашем случае связь переменных интегрирования задается уравнениями (1.1). Вычислив производные и выполнив подстановку в (1.5), получим

$$\frac{D(x, y)}{D(x', y')} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1.$$

С учетом единичного значения якобиана равенство (1.4) можно записать проще:

$$\int_F f(x, y) dx dy = \int_{F'} f(x, y) dx' dy'. \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.3) и (1.6) следует

$$\int_{F'} f(x, y) dx' dy' = \int_{F'} f(x', y') dx' dy'.$$

Поскольку это равенство должно быть справедливым для любого множества  $F'$ , необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$f(x, y) = f(x', y').$$

Но всякая точка  $(x, y)$  может быть переведена с помощью движений группы  $\Omega$  в любую другую точку  $(x', y')$  (в силу транзитивности группы  $\Omega$  относительно точек), поэтому из последнего равенства следует, что функция  $f(x, y)$  имеет одно и то же значение во всех точках плоскости, т. е.  $f(x, y) = \text{const}$ .

Поскольку в дальнейшем при образовании вероятностных мер берутся отношения мер, мы можем без потери общности считать константу равной единице.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *мера множества точек  $A(x, y)$  определяется формулой*

$$\mu(F) = \int_F dx dy. \quad (1.7)$$

*Эта мера является единственной (с точностью до постоянного множителя) инвариантной относительно группы движений  $\Omega$  — трансляций и вращений на плоскости.*

Дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла (1.7), называется *плотностью множества точек*, она обозначается через  $dA$ .

Если выразить  $dA = dx dy$  через другие переменные  $u, v$ , связанные с переменными  $x, y$  равенствами  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ , то получим соотношение

$$dA = dx dy = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv. \quad (1.8)$$

Заметим, что вместо обычного умножения дифференциалов

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (1.9)$$

необходимо пользоваться правилом (1.8). Такое умножение дифференциалов  $dx$  и  $dy$  называется внешним. Чтобы подчеркнуть указанное различие, условимся применять специальный символ внешнего произведения. Плотность множества точек при этом будет записываться в виде

$$dA = dx \wedge dy. \quad (1.10)$$

Аналогично плотность упорядоченной последовательности  $n$  независимых точек  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , на плоскости будет иметь вид

$$dA_1 \wedge dA_2 \wedge \dots \wedge dA_n, \quad (1.11)$$

где  $dA_i = dx_i \wedge dy_i$ .

Рассмотрим подробнее правила внешнего умножения дифференциальных форм, задаваемые соотношением (1.8), так как мы будем применять их в дальнейшем. Эти правила заключаются в следующем.

1. Произведение нескольких форм равно нулю, если какие-либо две из перемножаемых форм равны друг другу.

2. Произведение не меняется после выполнения четного числа перестановок сомножителей и меняет знак после выполнения нечетного числа таких перестановок.

Вычисляя, например, внешнее произведение дифференциалов (1.9) и используя соотношения

$$du \wedge du = 0; \quad dv \wedge dv = 0; \quad du \wedge dv = -dv \wedge du,$$

получаем в полном соответствии с (1.8)

$$dx \wedge dy = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv.$$

С учетом введенного символа внешнего дифференцирования плотность множества точек  $\mu(F)$  окончательно определится формулой

$$\mu(F) = \int_F dx \wedge dy. \quad (1.12)$$

Рассмотренные выше положения о плотности множества точек окажутся применимыми и для плотностей множества других геометрических элементов. Это будут всегда внешние дифференциальные формы. Кроме того, поскольку необходимо исключить из рассмотрения отрицательные плотности, считается, что при вычислении плотности *внешние произведения будут браться по абсолютной величине*.

**Мера множества прямых.** Положение прямой  $G$  на плоскости может быть задано нормальными координатами  $\rho$ ,  $\theta$ . Координаты  $\rho$ ,  $\theta$  являются полярными координатами перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую  $G$  (рис. 1.4).

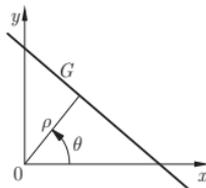


Рис. 1.4

Уравнение прямой  $G$  в нормальных координатах

$$\frac{x \cos \theta}{-\rho} + \frac{y \sin \theta}{-\rho} + 1 = 0. \quad (1.13)$$

Мера множества  $F$  прямых  $G$  определится интегралом вида

$$\mu(F) = \int_F f(\rho, \theta) d\rho \wedge d\theta \quad (1.14)$$

при условии, что этот интеграл инвариантен относительно группы движений  $\Omega$ , преобразования которой определяются (1.1). Это условие накладывает ограничения на вид функции  $f(\rho, \theta)$ .

Положение прямой (1.13) в результате движений, т. е. выполнения преобразований по формулам (1.1), определяется уравнением

$$\frac{(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a) \cos \theta}{-\rho} + \frac{(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b) \sin \theta}{-\rho} + 1 = 0$$

или упрощенным уравнением

$$\frac{x' \cos(\theta - \alpha)}{-(\rho - a \cos \theta - b \sin \theta)} + \frac{y' \sin(\theta - \alpha)}{-(\rho - a \cos \theta - b \sin \theta)} + 1 = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.13), мы видим, что движения, определяемые параметрами сдвига  $(a, b)$  и поворотом на угол  $\alpha$ , преобразуют координаты  $\rho, \theta$  прямой  $G$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - a \cos \theta - b \sin \theta; \\ \theta' &= \theta - \alpha. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Условие инвариантности  $\mu(F)$  относительно таких преобразований означает, что должно существовать равенство  $\mu(F) = \mu(F')$ , где  $F'$  — образ  $F$  при движении, и, следовательно, должно иметь место равенство

$$\int_F f(\rho, \theta) d\rho \wedge d\theta = \int_{F'} f(\rho', \theta') d\rho' \wedge d\theta'.$$

Наряду с этим в силу правила замены переменных в двойном интеграле и соотношения (1.5) получаем

$$\int_{F'} f(\rho', \theta') d\rho' \wedge d\theta' = \int_F f(\rho', \theta') d\rho \wedge d\theta,$$

поскольку якобиан определяется как

$$\frac{D(\rho', \theta')}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} 1 & a \sin \theta - b \cos \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

На основании последних двух равенств

$$\int_F f(\rho, \theta) d\rho \wedge d\theta = \int_F f(\rho', \theta') d\rho \wedge d\theta.$$

Существование этого равенства для любого множества  $F$  имеет место лишь при выполнении условия  $f(\rho, \theta) = f(\rho', \theta')$ . Поскольку движением можно перевести произвольно взятую прямую  $G(\rho, \theta)$  в любую другую прямую  $G'(\rho', \theta')$ , то из последнего равенства следует, что функция  $f(\rho, \theta)$  должна иметь одно и то же значение для всех прямых плоскости, т. е.  $f(\rho, \theta) = \text{const}$ . Полагая постоянную равной единице, получаем:

*мера множества прямых  $G(\rho, \theta)$  определяется выражением*

$$\mu(F) = \int_F d\rho \wedge d\theta. \quad (1.16)$$

*Эта мера является единственной (с точностью до постоянного множителя), инвариантной относительно группы движений  $\Omega$ .*

Дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла, называется *плотностью множества прямых* и обозначается

$$dG = d\rho \wedge d\theta. \quad (1.17)$$

Как показал Пуанкаре, *это единственный дифференциальный элемент, который остается инвариантным относительно группы трансляций и вращений.*

Рассмотрим другие формы плотности множества прямых  $dG$ . В тех случаях, когда прямая линия  $G$  задана другими координатами, плотности множества прямых  $dG$  принимают отличные от (1.17) формы. Выражения для плотности  $dG$  при этом могут быть получены по правилам замены координат.

1. Пусть прямая линия  $G$  задается углом  $\varphi$  наклона прямой к оси  $x$  и абсциссой точки пересечения с той же осью. Тогда связь с нормальными координатами определяется уравнениями  $\rho = x \sin \varphi$ ,  $\theta = \varphi - \pi/2$ . Вычислим значение якобиана

$$\frac{D(\rho, \theta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi & 0 \\ x \cos \varphi & 1 \end{vmatrix} = \sin \varphi.$$

С учетом этого

$$dG = \sin \varphi dx \wedge d\varphi. \quad (1.18)$$

2. Допустим, положение прямой линии  $G$  задается уравнением прямой в отрезках, т. е. координатами прямой линии  $G$  являются отрезки  $\alpha$ ,  $\beta$ , которые она отсекает на координатных осях. В этом случае координаты связаны соотношениями  $\rho = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\theta = \arctg(\alpha/\beta)$ .

В результате, определив якобиан, получим

$$dG = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} d\alpha \wedge d\beta. \quad (1.19)$$

3. Предположим, прямая линия  $G$  определяется уравнением вида  $ux + vy + 1 = 0$ .

Будем рассматривать  $u$  и  $v$  как координаты прямой. Заметим, что между координатами  $(u, v)$  и координатами  $(\alpha, \beta)$  существует связь

$\alpha = -1/u$ ;  $\beta = 1/v$ . Произведя с учетом этого в (1.19) замену переменных, получим

$$dG = \frac{du \wedge dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \quad (1.20)$$

Как видно из приведенных примеров, плотности множества прямых  $dG$  имеют в других системах координат более сложную структуру по сравнению с нормальной системой. Плотность  $dG$  в этих координатах включает кроме дифференциального элемента еще и некоторую функцию координат. Таким образом, приведенные примеры иллюстрируют положение о том, что не существует иных, кроме  $dp \wedge d\theta$ , дифференциальных элементов, инвариантных к группе движений. Нетрудно установить, что  $du \wedge dv$ , например, не является инвариантным элементом. Действительно, в этом случае при переносе множества прямых линий на большее расстояние от начала координат уменьшается его мера. Если выразить этот дифференциальный элемент через координаты  $(\rho, \theta)$ , то окажется, что  $du \wedge dv = (1/\rho^3) d\rho \wedge d\theta$ . Итак, если  $d\rho \wedge d\theta$  действительно инвариантно при переносе, то, так как  $\rho$  не инвариантно, элемент  $du \wedge dv$  не может обладать этим свойством.

**Кинематическая мера.** Рассмотрим множества конгруэнтных фигур. Положение твердой фигуры  $K$  (например, области, отрезка или кривой) на плоскости определяется положением одной точки  $A(x, y)$  этой фигуры и углом  $\varphi$  между направлением  $AW$ , фиксированным в фигуре  $K$ , и некоторым выбранным направлением  $Ox$  на плоскости. Можно считать, что  $x, y, \varphi$  являются координатами фигуры  $K$ . Мерой множества  $F$  всевозможных положений фигуры  $K$  или, иначе говоря, множества  $F$  фигур, конгруэнтных  $K$ , является интеграл

$$\mu(F) = \int_F f(x, y, \varphi) dx \wedge dy \wedge d\varphi. \quad (1.21)$$

Найдем функцию  $f(x, y, \varphi)$ , такую что данная мера удовлетворяет критерию инвариантности относительно группы движений  $\Omega$ .

Группа движений определяется как преобразование координат, задаваемое уравнениями (1.1) и  $\varphi = \varphi' + \alpha$  или

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a; \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b; \\ \varphi &= \varphi' + \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Согласно критерию инвариантности требуется, чтобы  $\mu(F) = \mu(F')$  для всякого множества  $F$ , таким образом, должно иметь место равенство

$$\int_F f(x, y, \varphi) dx \wedge dy \wedge d\varphi = \int_{F'} f(x', y', \varphi') dx' \wedge dy' \wedge d\varphi'. \quad (1.23)$$

С другой стороны, в силу правила замены переменных в двойном интеграле и с учетом (1.22)

$$\int_F f(x, y, \varphi) dx \wedge dy \wedge d\varphi = \int_{F'} f(x, y, \varphi) dx' \wedge dy' \wedge d\varphi', \quad (1.23a)$$

поскольку

$$\frac{D(x, y, \varphi)}{D(x', y', \varphi')} = 1.$$

С содержательной точки зрения справедливость этого вывода также легко видеть. Действительно, если  $F'$  — образ  $F$  при движении, то имеет место равенство  $dx \wedge dy \wedge d\varphi = dx' \wedge dy' \wedge d\varphi'$ .

Сравнив (1.23) и (1.23a), получим равенство

$$\int_{F'} f(x', y', \varphi') dx' \wedge dy' \wedge d\varphi' = \int_{F'} f(x, y, \varphi) dx' \wedge dy' \wedge d\varphi'.$$

Так как это равенство должно быть справедливо для всех движений данной группы, т. е. для любого множества  $F'$  фигур, то необходимо, чтобы  $f(x, y, \varphi) = f(x', y', \varphi')$ . Поскольку движением можно перевести фигуру из произвольно взятого положения  $(x, y, \varphi)$  в любое другое  $(x', y', \varphi')$ , то функция  $f(x, y, \varphi)$  должна сохранять одно и то же значение для всех положений фигуры  $K$ . Таким образом, получается, что функция  $f(x, y, \varphi) = \text{const}$ . Полагая эту постоянную равной единице, приходим к выводу: мера множества  $F$  фигур, конгруэнтных фигуре  $K(x, y, \varphi)$ , определяется выражением

$$\mu(F) = \int_F dx \wedge dy \wedge d\varphi. \quad (1.24)$$

*Эта мера называется кинематической мерой множества фигур, конгруэнтных  $K$ , или множества положений фигуры  $K$ . С точностью до постоянного множителя она является единственной мерой, инвариантной относительно группы движений  $\Omega$ .*

Рассмотрим два важных для распознавания образов свойства кинематической меры.

1. *Кинематическая мера инвариантна относительно обращения движений.* Это означает, что мера остается неизменной, если считать неподвижными оси  $(A, x', y')$ , связанные с фигурой  $K$ , а ранее неподвижные оси  $(O, x, y)$  — подвижными. Иначе говоря, если за фигуру принять координатные реперы  $(O, x, y)$ , совершающие обратные движения относительно системы координат  $(A, x', y')$ , принятой за неподвижную, то получится кинематическая мера, равная исходной кинематической мере множества фигур  $K$ , движущихся в системе координат  $(O, x, y)$ .

Действительно, координаты  $x', y', \varphi'$  первоначальной системы относительно системы подвижных осей связаны с координатами подвижной

системы уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x' &= -x \cos \varphi - y \sin \varphi; \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi; \\ \varphi' &= \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Вычислим значение якобиана:

$$\frac{D(x', y', \varphi')}{D(x, y, \varphi)} = -1.$$

Поскольку по определению мера всегда положительна, имеет место равенство

$$\int_F dx \wedge dy \wedge d\varphi = \int_{F'} dx' \wedge dy' \wedge d\varphi',$$

которое и доказывает существование инвариантности.

**Пример.** В качестве приложения этого свойства инвариантности для решения задач распознавания образов рассмотрим следующий пример. Пусть необходимо определить меру множества фигур, конгруэнтных фигуре  $K$ , площадь которой равна  $S$  и которая содержит внутри себя некоторую точку  $A$ .

По причине доказанного первого свойства инвариантности тот же результат получится, если найти меру множества точек  $A$ , рассматриваемых как фигуры  $K$ , и содержащихся внутри  $K$ .

Другими словами, справедливо

$$\mu(K \ni A) = \mu(A \in K) = \int dx \wedge dy \wedge d\varphi = \int_{A \in K} dx \wedge dy \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi S,$$

поскольку  $A(x, y)$  пробегает все точки, находящиеся внутри  $K$ , и в каждом положении точки  $A$  угол  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ .

Итак, мера множества таких положений области  $K$  площади  $S$ , для которых фиксированная точка  $A$  содержится внутри  $K$ ,

$$\mu(A \in K) = \int_{A \in K} dK = 2\pi S. \quad (1.25)$$

**2. Кинематическая мера не изменится, если изменить подвижную систему координат.** Данное свойство означает следующее. Если для определения положения фигуры  $K$  взять вместо точки  $A$  и направления  $AW$  иную точку  $A_1$  и иное направление  $A_1W$ , то кинематическая мера при этом не изменится.

Отметим, что данное свойство следует из первого свойства и основного свойства инвариантности относительно группы движений. Действительно, если имеет место инвариантность относительно группы движений, то в силу этого существует и инвариантность относительно изменения неподвижной системы координат. Подлежащее доказательству свойство состоит в инвариантности относительно замены подвижной системы координат, которая является неподвижной при обращении движений.

Рассмотренное свойство кинематической меры играет важную роль и очень удобно в приложениях к распознаванию образов. Применяя его, можно в каждом отдельном случае выбрать наиболее удобную подвижную систему координат.

### 1.3. Формирование случайных параметров сканирования

В теории вероятностей обычно исследуются случайные переменные, которые являются числами и принимают значения из некоторого множества, где определена неотрицательная мера. Выполнение определенных дополнительных условий, важнейшее из которых — равенство меры единице<sup>1</sup> на всем множестве, позволяет интерпретировать эту меру как вероятность. В стохастической геометрии случайными элементами являются уже не числа, а геометрические объекты, такие как линии, фигуры, плоскости и т. д. Под событиями здесь понимается результат взаимодействия геометрических объектов: пересечения линий, покрытия решеток, фигур и т. п. Задача о вероятностях геометрических событий является неопределенной до тех пор, пока не выбрана вероятностная мера. Для ее выбора нужно задать параметры множества геометрических объектов, а затем определить вероятностную меру в этом полученном параметрическом пространстве, удовлетворяющем условиям инвариантности относительно действующей группы преобразования.

После краткого рассмотрения элементов теории меры вернемся к нашей цели — построению системы распознавания образов, реализующей буюфоновский процесс. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда распознающая система, архитектура которой представлена на рис. 1.2, осуществляет сканирование в виде случайных точек. Прежде всего, уточним, что следует подразумевать под понятием случайного выбора точки на плоскости. Ограничимся рассмотрением фрагмента плоскости, или сетчаткой, ибо для этого варианта ответ ясен. Предполагается, что площадь всей сетчатки равна единице, затем в качестве меры вероятности используется площадь частных областей на сетчатке — мера Лебега.

Итак, если рассматривать в качестве геометрических объектов множества точек, то в этом случае параметрическое пространство совпадает с пространством элементов и в качестве вероятностной меры, инвариантной по отношению к трансляциям и вращениям, естественно выбрать меру Лебега. Если число точек конечное, то множества бесконечной меры должны быть исключены и меру Лебега следует рассматривать в области с ограниченной мерой (роль которой в нашем случае играет сетчатка). Предположим, что  $F$  есть такая область и

<sup>1</sup> Это требование вызвано тем, что максимальное значение вероятности не превышает единицы.

$\mu(\Phi)$  — ее мера Лебега. Вероятность  $P(F)$  того, что точка лежит в множестве  $F \subset \Phi$ , считается равной

$$P(F) = \frac{\mu(F \cap \Phi)}{\mu(\Phi)}.$$

Рассмотрим такой вариант, когда распознающая система осуществляет сканирование в виде случайных прямых. Выше, решая задачу о пересечении окружности случайными прямыми, мы столкнулись со странной ситуацией, когда из-за нечеткости понятия «случайное бросание» получались разные решения — парадокс Бертрана. Ключом к объяснению этого парадокса является принцип инвариантности, согласно которому вероятность пересечения не должна зависеть от движений объекта. Соблюдению принципа инвариантности соответствует первое решение парадокса Бертрана (см. 1.1), оно получается, если параметрическое пространство задано в виде  $(\rho, \theta)$ . Иначе говоря, множество прямых должно задаваться в нормальных координатах  $(\rho, \theta)$ , рассматривавшихся в предшествующем параграфе. Напомним, что  $(\rho, \theta)$  являются полярными координатами точки пересечения прямой с перпендикуляром, опущенным на нее из начала координат. Таким образом, каждой точке в параметрическом пространстве — на плоскости  $(\rho, \theta)$  — соответствует прямая  $G$  в пространстве геометрических элементов — на плоскости  $x, y$  (рис. 1.5). Для конкретизации нашего определения

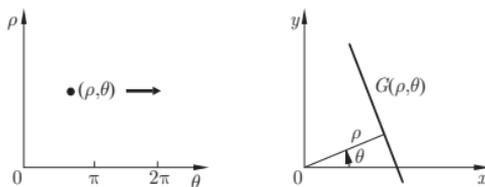


Рис. 1.5

«случайного бросания» необходимо теперь задать распределение параметров  $\rho$  и  $\theta$ . Однако здесь мы сталкиваемся с некоторыми трудностями. Если поле изображения считается бесконечным, то величина  $\rho$  может принимать неограниченно большие значения и, следовательно, равномерное распределение задать нельзя. В этом случае возникает ситуация, аналогичная той, которая имеет место при попытке строго выбрать случайным образом число из множества всех вещественных чисел. Под расплывчатым определением «случайным образом» обычно подразумевается «с равномерным распределением», и мы сталкиваемся с иллюзорным равномерным распределением по всем вещественным числам. Иллюзорность его видна, в частности, из следующего факта. Если вероятность выбора некоторого множества чисел характеризуется некоторой конечной вероятностью, то тогда всей числовой оси, являющейся бесконечным объединением этих множеств, соответствует бесконечная вероятность. Если же множеству приписывается нулевая

вероятность, то и всей числовой оси при таком равномерном распределении соответствует нулевая вероятность.

Собственно говоря, трудности той же природы возникали при попытках определить случайную точку на плоскости. Для преодоления этих трудностей в нашей ситуации используем тот же прием, что и в варианте случайных точек: ограничимся рассмотрением только тех прямых, которые пересекают сетчатку.

Для нас это очень естественное ограничение, учитывая, что целью является реализация случайного бросания прямых в технической системе с неизбежно ограниченной сетчаткой.

Итак, ограничиваемся рассмотрением такого подмножества плоскости  $(\rho, \theta)$ , которое соответствует линиям  $G$ , проходящим через сетчатку. Теперь уточним понятие «случайное бросание» линии с учетом наших ограничений. Очевидно, в нашей ситуации оно означает задание равномерного распределения на этом подмножестве.

Применим эти рассуждения для пояснения решения парадокса Бертрана. Пусть сетчатка является кругом единичного радиуса. Определим вероятность того, что линия, случайным образом брошенная на эту сетчатку, будет иметь длину, превосходящую  $\sqrt{3}$ . На сетчатку попадают линии  $G$ , параметр  $\theta$  которых изменяется от 0 до  $2\pi$ , а параметр  $\rho$  — от 0 до 1, поскольку сетчатка — круг единичного радиуса. В параметрическом пространстве, или на плоскости  $(\rho, \theta)$ , как показано на рис. 1.6, множество точек, которое соответствует линиям, пересекающим сетчатку, представляет собой прямоугольник высотой  $2\pi$  и шириной 1. Из предыдущих рассуждений следует, что точкам, лежащим в левой заштрихованной половине прямоугольника, соответствуют хорды, превосходящие по длине  $\sqrt{3}$ . Таким образом, ответ равен  $1/2$ , поскольку распределение на плоскости  $(\rho, \theta)$  равномерно в пределах большого прямоугольника.

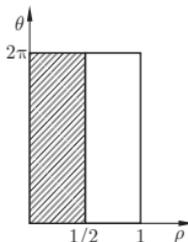


Рис. 1.6

Итак, для случайных прямых мы можем также задать вероятностную меру в виде отношения частных областей к площади всей сетчатки в целом (мера Лебега), но уже только в *параметрическом пространстве*  $(\rho, \theta)$ , где прямой соответствует точка.

Однако возможен и иной подход к конструированию вероятностной меры на множестве случайных прямых. Этот подход основан на определении меры множества прямых, пересекающих сетчатку. Под сетчаткой мы будем понимать выпуклое множество  $\Phi$ , границей которого является выпуклая кривая с длиной  $L_\Phi$ . Можно показать (см. § 2.1), что

$$\mu(G; G \cap \Phi \neq \emptyset) = \int_{G \cap \Phi \neq \emptyset} d\rho \wedge d\theta = L_\Phi. \quad (1.26)$$

Теперь можно ввести вероятностную меру на множестве прямых линий, пересекающих сетчатку  $\Phi$ . Эта мера строится на основе полученной в предыдущем параграфе инвариантной меры (1.16) множества линий путем замены единицы постоянным множителем  $k$ . Причем значение постоянного множителя  $k$  выбирается равным  $1/L_\Phi$ . За счет введения нормирующего множителя  $k$  мы получаем вероятностную меру  $P(F)$ . Действительно, если считать, что  $F$  есть множество всех линий на сетчатке, то полученная мера  $P(F)$  будет равна единице, и, таким образом, она удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вероятностной мере. Итак, полученная вероятностная мера

$$P(F) = k \int_F d\rho \wedge d\theta, \quad \text{где } k = \frac{1}{L_\Phi}. \quad (1.27)$$

Краткий экскурс в теорию меры позволяет нам теперь наполнить более живым содержанием архитектуру распознающей системы, показанную на рис. 1.2. В частности, полученные сведения дают возможность разработать структуру датчика случайных параметров развертки.

Как было установлено, для того, чтобы вероятность пересечения изображения объекта со случайными прямыми оставалась неизменной при изменении ориентации и положения объектов, необходимо, чтобы параметры случайных прямых были равномерно распределены в координатах  $(\rho, \theta)$ . В этой системе координат уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x \cos \theta}{-\rho} + \frac{y \sin \theta}{-\rho} + 1 = 0. \quad (1.28)$$

Уравнение прямой в декартовых координатах  $y = kx + b$ . Сравнение этого уравнения с нормальным уравнением прямой позволяет получить соотношения, определяющие связь параметров прямой в декартовой системе координат и нормальной системе

$$k = -\operatorname{ctg} \theta, \quad b = \frac{\rho}{\sin \theta}. \quad (1.29)$$

Поскольку развертка источника сканирующего луча (роль которого выполняет инжекционный лазер) работает в декартовой системе координат, то для управления разверткой необходимо выполнять функциональные преобразования случайных чисел. Эту задачу генерирования равномерно распределенных случайных чисел и их функционального преобразования для управления разверткой выполняет датчик случайных параметров развертки, рассмотренный в приложении А (см. [39, 40]). Зададимся вопросом, чему равна вероятностная мера для геометрических элементов более общей природы, чем случайные линии – для множества конгруэнтных фигур. Отметим, что к этому же классу элементов принадлежит и множество всевозможных положений отрезков прямой или множество всевозможных положений бюфоновских игловок, о которых шла речь в начале главы.

Как будет показано ниже (см. § 2.2), кинематическая мера множества отрезков длиной  $l$ , случайно ориентированных и случайно расположенных на сетчатке  $\Phi$  площадью  $S_\Phi$  и с периметром  $L_\Phi$

равна  $2\pi S_\Phi + 2L_\Phi$ . Знание этого факта позволяет нам снова, как и в случае множества линий, нормализовать инвариантную меру и получить на ее основе вероятностную меру. Принимая обратную дробь от вышеприведенного выражения за постоянный множитель  $k$  в формуле инвариантной кинематической меры (1.20), получаем меру, столь же инвариантную, как кинематическая, но равную единице для всего множества «иголок», полностью или хотя бы частично лежащих на сетчатке. Эта вероятностная мера определяется выражением

$$P(F) = \frac{1}{k} \int_F dx \wedge dy \wedge d\varphi; \quad \text{где } k = 2\pi S_\Phi + 2L_\Phi. \quad (1.30)$$

Стоящая под интегралом дифференциальная форма  $dx \wedge dy \wedge d\varphi$  называется кинематической плотностью и, как отмечалось выше, обозначается  $dK$ . Это внешнее произведение не является единственной формой для кинематической плотности; при замене системы координат, естественно, будет изменяться форма кинематической плотности. Установим, какой вид имеет кинематическая плотность в нормальной системе координат. Пусть положение фигуры  $K$  в декартовой системе координат определяется положением точки  $A(x, y)$  этой фигуры и углом  $\varphi$ , составленным направлением  $AW$ , фиксированным в фигуре, и некоторым выбранным направлением на плоскости  $Ox$  (рис. 1.7).

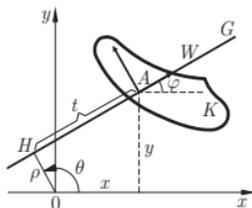


Рис. 1.7

Таким образом, декартовыми координатами фигуры  $K$  являются  $x, y, \varphi$ . В нормальной системе координат положение фигуры  $K$  можно определить заданием нормальных координат прямой  $AW$ , которую обозначим  $G(\rho, \theta)$ , и расстоянием  $t = HA$  от точки  $A$  до основания  $H$  перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую  $G$ . Тогда преобразования координат определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta + t \sin \theta; \\ y &= \rho \sin \theta - t \cos \theta; \\ \varphi &= \theta - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Поскольку

$$\frac{D(x, y, \phi)}{D(\rho, \theta, t)} = 1,$$