И. К. Даугавет

# ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

## линейные уравнения

2-е издание

- **Общая схема исследования сходимости и устойчивости приближенных методов решения линейных функциональных уравнений**
- **Проекционные методы**
- **Метод конечных элементов**
- **Метод сеток**

bhv®

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**И. К. Даугавет**

# ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

## линейные уравнения

## 2-е издание

*Рекомендовано УМО по образованию в области инновационных междисциплинарных образовательных программ в качестве учебного пособия по специальности «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» — 010503*

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2006

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73
Д21

**Даугавет И. К.**

Д21 Теория приближенных методов. Линейные уравнения. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 288 с.: ил.

ISBN 5-94157-737-0

Книга является вторым, исправленным и дополненным, изданием опубликованного в 1985 году учебника «Приближенное решение линейных функциональных уравнений». Излагается исследование основных приближенных методов решения задач математической физики (проекционные методы, метод сеток, включая метод конечных элементов), основанное на общей схеме, использующей язык функционального анализа. Конкретными объектами исследования являются метод механических квадратур для интегральных уравнений (используется принцип компактной аппроксимации), методы Ритца, Галеркина, метод сеток для эллиптических уравнений, уравнений теплопроводности и колебаний струны. Основное внимание уделяется вопросам сходимости и устойчивости. Некоторые из результатов принадлежат автору.

В новом издании добавлены некоторые результаты, касающиеся метода конечных элементов и устойчивости.

*Для студентов технических вузов и математических факультетов университетов, специалистов в области приближенных методов и их приложений*

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73

Рецензенты:

*Рябов В. М., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой методов вычислений Санкт-Петербургского государственного университета;*

*Демьянович Ю. К., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой параллельных алгоритмов Санкт-Петербургского государственного университета*

**Группа подготовки издания:**

| | |
|---|---|
| Главный редактор | *Екатерина Кондукова* |
| Зам. главного редактора | *Людмила Еремеевская* |
| Зав. редакцией | *Григорий Добин* |
| Компьютерная верстка | *Натальи Смирновой* |
| Корректор | *Наталия Першакова* |
| Дизайн серии | *Игоря Цырульникова* |
| Оформление обложки | *Елены Беляевой* |
| Зав. производством | *Николай Тверских* |

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.12.05.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,22.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-737-0

© Даугавет И. К., 2006
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2006

# Оглавление

# Предисловие ко второму изданию

Дополнения, внесенные во второе издание, касаются в основном вопросов устойчивости проекционных методов и сверхсходимости метода конечных элементов. Изменены некоторые доказательства.

Нумерация теорем, формул в каждом параграфе своя. Ссылки на формулы, теоремы из других параграфов той же главы даются с указанием параграфа, а из другой главы — с указанием параграфа и главы.

Читателям, заинтересованным в более детальном изучении затронутых в книге вопросов, можно рекомендовать книги [2], [14]. В качестве дополнительной литературы к главе 1 можно указать также [10], глава XIV, к главе 2 — [11], глава II, к главе 3 — [15], к главе 4 — [18], [19].

Автор благодарит Ю. К. Демьяновича и В. М. Рябова, замечания которых были учтены при составлении окончательного текста книги.

# Из предисловия к первому изданию

Книга написана на основе лекций, которые под названием "Методы вычислений-2" автор читает студентам IV курса математико-механического факультета Ленинградского университета, специализирующимся по отделениям математики и прикладной математики. Содержанием лекций являются численные методы решения линейных интегральных и дифференциальных уравнений. Особенности курса лекций, а тем самым и книги, диктуются следующими четырьмя обстоятельствами: краткостью курса (лекции читаются один семестр по три часа в неделю), достаточно высокой общей математической подготовкой слушателей, различной узкой математической специализацией слушателей, тем, что для большинства специализаций лекции сопровождаются практическими занятиями, на которых основное внимание уделяется чисто алгоритмическим вопросам. Все это предъявляет к курсу лекций, по мнению автора, следующие требования: курс должен быть посвящен основным идеям построения и исследования приближенных методов, уровень строгости изложения должен быть таким же, как в других математических курсах, курс не должен быть перегружен деталями применения тех или иных методов к решению тех или иных классов задач, желательно, чтобы курс был не набором отдельных алгоритмов и фактов, а представлял собой нечто единое целое. Все эти требования автор и старался удовлетворить в своей книге. Неизбежной основой изложения становится при этом функциональный анализ. Вместе с тем автор стремился к тому, чтобы применение общих идей к конкретным задачам и методам было проиллюстрировано на достаточно содержательном уровне. Курс лекций такой направленности создавался на математико-механическом факультете Ленинградского университета на протяжении ряда лет предшественниками автора; наиболее важная роль в его формировании принадлежит М. К. Гавурину [4].

Термин "функциональное уравнение", использованный в заглавии этой книги, двусмыслен. С одной стороны, так называют те уравнения, в которых искомой является функция, например, интегральные или дифференциальные уравнения. С другой стороны, так часто называют уравнения в абстрактных (линейных нормированных или, более обще, метрических) пространствах; слово "функциональное" в этой связи может иметь непосредственное отношение к функциональному анализу. В книге будут изучаться приближенные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений, причем эти уравнения будут рассматриваться как частные случаи уравнений в нормированных пространствах. Если говорить более подробно, то в первой главе книги будет указана некоторая общая схема исследования приближенных методов решения абстрактных уравнений, которая будет дальше использоваться применительно к интегральным и дифференциальным уравнениям.

Приближенные методы решения уравнений предлагались чаще всего не "чистыми" математиками, а механиками, физиками, которые были в первую очередь заинтересованы в доведении результатов до числа. Проходил обычно довольно значительный срок, прежде чем предложенный метод сам становился объектом математического исследования. Так, предложенный в начале века метод Галеркина впервые был исследован лишь в 1942 г. М. В. Келдышем. Первоначально каждый алгоритм численного решения исследовался своими специфическими методами. Однако с накоплением материала в этой области появилась необходимость и одновременно возможность выработать общую точку зрения на приближенные методы. Эта работа была проделана Л. В. Канторовичем в 1948 г. в его знаменитой статье "Функциональный анализ и прикладная математика", где была построена общая теория приближенных методов решения уравнений. Естественной базой построения общей теории явился функциональный анализ, поскольку все многообразие уравнений, которые реально приходится решать, может быть объединено термином "функциональное уравнение" в его втором смысле. В настоящее время существуют различные общие схемы приближенных методов решения линейных уравнений, но идейный исток у них один — схема Л. В. Канторовича.

Та конкретная общая схема, которая используется в книге, принадлежит М. К. Гавурину. Вообще следует отметить идейную близость предлагаемой книги книге М. К. Гавурина "Лекции по методам вычислений" (1971 г.). Читатели, знакомые с этой книгой, заметят, что из нее заимствована не только общая схема, но и способ изложения некоторых других вопросов. Концепция устойчивости, которой придерживается автор, также принадлежит М. К. Гавурину. Эта концепция не является общепринятой. Причины, по которым автор отдал ей предпочтение, излагаются в конце § 4 главы 4, когда имеется уже достаточный материал для сопоставления разных понятий устойчивости.

Переходя к характеристике содержания книги, отметим только две особенности, которые являются следствием тех требований, предъявляемых к курсу, которые были сформулированы ранее. Во-первых, относительно большое место в книге занимают приближенные методы решения интегральных уравнений. Это объясняется тем, что именно на уравнениях второго рода проще и ярче всего можно проиллюстрировать некоторые важные идеи теории приближенных методов. В частности, доказательство теоремы о сходимости метода механических квадратур позволяет познакомить читателя в простейшей форме с важным в современной вычислительной математике принципом компактной аппроксимации. Во-вторых, исследование тех или иных приближенных методов проводится обычно лишь для простейших модельных задач.

Из сказанного следует, что основное назначение книги — быть учебным пособием для студентов-математиков. Вместе с тем автор надеется, что она может быть полезна и другим читателям. Предполагается, что читатель знаком с основными простейшими понятиями и фактами функционального анализа и математической физики.

# Глава 1

# Общая схема приближенных методов

## § 1. Близкие уравнения

Приведем некоторые основные понятия, которые будут использоваться на протяжении всей книги.

Пусть $U$ и $F$ — два линейных нормированных пространства. Оператор $A$, заданный на линейном множестве $D(A) \subset U$, со значениями в $F$ будем назвать *линейным*, если он однороден и аддитивен. Область задания $D(A)$ оператора $A$ обычно будем считать плотной в $U$. Таким образом, ограниченность (или, что то же самое, непрерывность) оператора не входит в понятие линейности. Однако в тех случаях, когда линейный оператор $A$ еще и ограничен, обычно будем считать, что область его задания — все пространство: $D(A) = U$. Символом $L(U, F)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из $U$ в $F$. Как известно, $L(U, F)$ само является линейным нормированным пространством. Наконец, через $R(A)$ будем обозначать множество значений оператора $A$:

$$R(A) = \{f \mid f \in F, \quad f = Au, \quad u \in D(A)\}.$$

Будем говорить, что линейный оператор $A$ *обратим*, если однородное уравнение $Au = 0$ имеет только нулевое решение. В этом случае оператор $A$ устанавливает между $D(A)$ и $R(A)$ взаимнооднозначное соответствие, и на множестве $R(A)$ определен оператор $A^{-1}$, называемый обратным по отношению к $A$, такой, что для любого $u \in D(A)$ будет $A^{-1}Au = u$ и для любого $f \in R(A)$ будет $AA^{-1}f = f$. Оператор $A^{-1}$ также линеен (т. е. аддитивен и однороден), причем

$$D(A^{-1}) = R(A), \quad R(A^{-1}) = D(A).$$

Задача, рассматриваемая в этом параграфе, такова. Пусть дано линейное уравнение

$$Au = f \tag{1}$$

и другое линейное уравнение

$$(A + \Delta A)u = f + \Delta f, \tag{2}$$

в котором линейный оператор $\Delta A$ и элемент $\Delta f \in F$ в каком-то смысле малы. Пусть $u^*$ — решение уравнения (1), а $u^* + \Delta u$ — решение уравнения (2). Требуется оценить разность $\Delta u$ между этими решениями.

Прежде чем перейти к решению этой задачи, отметим, что она бывает интересна в разных отношениях, и ее решение находит применение в различных ситуациях. Перечислим некоторые из них.

1. Довольно частым является тот случай, когда само уравнение, которое требуется решить, известно нам неточно. Например, неточно (или даже таблично) заданы коэффициенты дифференциального уравнения и его правая часть. Вопрос о том, к каким ошибкам в решении приведет неточность в задании уравнения, приводит нас к поставленной задаче.
2. Распространенным приближенным методом является метод замены уравнения на более простое, "близкое". Так, интегральные уравнения часто решают методом замены ядра на вырожденное (этот метод будет подробно изучаться в *главе 2*). Ясно, что оценка погрешности метода замены уравнения на близкое сводится к рассматриваемой задаче.
3. Как будет видно из дальнейшего, большинство методов приближенного решения интегральных и дифференциальных уравнений приводят к системам линейных алгебраических уравнений. Матрица коэффициентов и правые части этой системы строятся по некоторым правилам, исходя из заданного уравнения. Вычисление коэффициентов и правых частей, как правило, не может быть произведено вполне точно хотя бы из-за неизбежных ошибок округления. Вопрос о том, насколько исказится приближенное решение из-за неточного построения системы линейных уравнений, также приводит нас к поставленной задаче.
4. Пусть нам известен некоторый элемент $\overline{u} \in D(A)$, который из каких-либо соображений нам угодно принять за приближенное решение уравнения (1). Для оценки качества этого приближенного решения естественно подставить его в уравнение. Разность между результатом подстановки в левую часть и правой частью $A\overline{u} - f$ называется *невязкой* приближенного

решения $\overline{u}$. Само приближенное решение $\overline{u}$, как очевидно, является "точным" решением уравнения $Au = f + \Delta f$, где $\Delta f = A\overline{u} - f$ есть его невязка. Таким образом, оценка погрешности приближенного решения через его невязку также сводится к поставленной задаче. Некоторая специфика здесь заключается в том, что $\Delta A = 0$. Как видно из сказанного, ошибку, вызванную неточным построением решения, можно трактовать как следствие неточного задания правой части. Это позволяет, в частности, вопрос о том, с какой точностью следует решать упомянутые в пункте 3 системы уравнений, заменять вопросом о допустимой невязке полученных приближенных решений этих систем.

Поставленная задача решается следующей теоремой.

## Теорема 1

Пусть выполнены условия: 1) пространство $U$ полно; 2) $R(A) = F$, оператор $A$ обратим и обратный оператор $A^{-1}$ ограничен[1]; 3) оператор $\Delta A$ ограничен и $\left\|A^{-1}\Delta A\right\| \le \rho < 1$.

Тогда:

а) $R(A + \Delta A) = F$, оператор $A + \Delta A$ обратим, обратный оператор $(A + \Delta A)^{-1}$ ограничен и

$$\left\|(A + \Delta A)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\rho}; \tag{3}$$

б) для разности решений уравнений (2) и (1) выполняется оценка

$$\|\Delta u\| \le \frac{1}{1-\rho}\left(\rho\left\|u^*\right\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta f\|\right). \tag{4}$$

## Доказательство

а) Пусть для некоторого элемента $f \in F$ нашлось решение $u_0$ уравнения $(A + \Delta A)u = f$, так что $(A + \Delta A)u_0 = f$. Применяя к обеим частям последнего тождества оператор $A^{-1}$, получаем $(I + A^{-1}\Delta A)u_0 = A^{-1}f$. Так как норма

[1] Тем самым уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части $f$.

оператора $A^{-1}\Delta A$ меньше единицы, то по теореме Банаха существует обратный оператор $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$, причем

$$\left\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \left\|A^{-1}\Delta A\right\|} \le \frac{1}{1-\rho}.$$

Поэтому $u_0 = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} f$. В частности, если $f = 0$, то непременно и $u_0 = 0$, и потому оператор $A + \Delta A$ обратим. Пусть теперь $f$ — произвольный элемент пространства $F$. Положим $u_0 = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} f$. Для $u_0$ справедливо равенство $u_0 = A^{-1} f - A^{-1}\Delta A u_0$, из которого видно, что $u_0 \in D(A) = D(A + \Delta A)$. Применяя к элементу $u_0$ оператор $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$, видим, что $(A + \Delta A)u_0 = f$. Итак, при любом $f \in F$ уравнение $(A + \Delta A)u = f$ имеет решение $u_0 = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} f$. Тем самым показано, что $R(A + \Delta A) = F$ и $(A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}$. Остается отметить, что из последнего равенства вытекают ограниченность оператора $(A + \Delta A)^{-1}$ и оценка (3). Утверждение а) доказано.

б) В силу наложенных условий и уже доказанного утверждения а) уравнения (1) и (2) однозначно разрешимы. Также однозначно разрешимо и уравнение $Au = f + \Delta f$; его решение обозначим через $u^* + \Delta u_1$. Итак, мы имеем тождества

$$Au^* = f, \tag{5}$$

$$(Au^* + \Delta u_1) = f + \Delta f, \tag{6}$$

$$(A + \Delta A)(u^* + \Delta u) = f + \Delta f. \tag{7}$$

Вычитая из (6) тождество (5), получаем $A\Delta u_1 = \Delta f$, откуда $\Delta u_1 = A^{-1}\Delta f$ и

$$\left\|\Delta u_1\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta f\right\|. \tag{8}$$

Вычитая из тождества (7) тождество (6), находим

$$(A + \Delta A)(\Delta u - \Delta u_1) = -\Delta A(u^* + \Delta u_1),$$

откуда (вспоминая, что $(A+\Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}$),

$$\begin{aligned} \|\Delta u - \Delta u_1\| &\le \left\| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} \right\| \cdot \left\| A^{-1}\Delta A \right\| \cdot \left( \|u^*\| + \|\Delta u_1\| \right) \le \\ &\le \frac{\rho}{1-\rho}\left( \|u^*\| + \|\Delta u_1\| \right) \le \frac{\rho}{1-\rho}\left( \|u^*\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta f\| \right) \end{aligned} \tag{9}$$

Из оценок (8) и (9) сразу же следует (4). ■

❑ **Замечание 1.** Поскольку $\|u^*\| = \|A^{-1}f\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|f\|$, то из неравенства (4) вытекает оценка

$$\|\Delta u\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\rho}\left(\rho\|f\| + \|\Delta f\|\right). \tag{10}$$

❑ **Замечание 2.** Уравнения (1) и (2) можно считать близкими, если малы величины $\|A^{-1}\Delta A\|$ и $\|\Delta f\|$. В этом случае правые части оценок (4) и (10) будут, вообще говоря, также малы.

❑ **Замечание 3.** В приложениях теоремы 1 обычно одно из уравнений (1), (2) считается "точным" — тем, решение которого нас в действительности интересует, а другое — "приближенным", решение которого нам известно или мы собираемся его реально строить. В оценки (4) и (10) эти уравнения входят неравноправно — вычисление их правых частей требует в основном информации об уравнении (1). Поэтому какое из этих уравнений считать "точным", а какое "приближенным", зависит от той задачи, которую мы решаем при помощи теоремы 1. Например, если по заданному "точному" уравнению мы должны выбрать "приближенное", которое дало бы нам решение с заданной точностью, уравнением (1) удобно считать "точное". Если же у нас уже имеются оба уравнения — "точное" и "приближенное", то обычно о "приближенном" уравнении мы располагаем большей информацией (оно уже решено или будет реально решаться, и значительную информацию мы можем получить в процессе решения), и потому именно "приближенное" уравнение выгодно считать уравнением (1), а "точное" — уравнением (2). Вообще, видимо, первый способ ((1) — "точное", (2) — "приближенное" уравнение) более удобен в теоретических вопросах, например, при исследовании сходимости решений последовательности уравнений к решению предельного. Противоположный же способ рассмотрения более удобен, когда требуется вычислить реальную оценку.

В теореме 1 речь шла об оценке абсолютной погрешности при замене решения уравнения (1) решением уравнения (2) (или наоборот). Иногда больший интерес представляет оценка относительной погрешности $\|\Delta u\| / \|u^*\|$. Задача об оценке относительной погрешности будет решаться в предположении, что все операторы $A$, $A^{-1}$, $\Delta A$ ограничены.

***Определение***

Пусть линейный оператор $A$ ограничен вместе с обратным $A^{-1}$. *Числом обусловленности* оператора $A$ называется величина

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

В случае, если оператор $A$ не имеет обратного (или $A^{-1}$ не ограничен), иногда считают $\mu(A) = +\infty$. Очевидно, что для любого обратимого оператора $A$ $\mu(A) \geq 1$.

Неформальный смысл числа обусловленности выявляется следующей теоремой.

Введем обозначения:

$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \delta f = \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}, \quad \delta u = \frac{\|\Delta u\|}{\|u^*\|}$$

— относительные погрешности в операторе $A$, правой части $f$ и относительная погрешность в решении уравнения (1), вызванная погрешностями в $A$ и $f$.

## Теорема 2

Пусть пространство $U$ — полное и пусть $A$, $A^{-1}$, $\Delta A$ — ограниченные линейные операторы, причем $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$. Пусть $u^*$ и $u^* + \Delta u$ — решения уравнений (1) и (2) соответственно. Тогда

$$\delta u \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \cdot \delta A} (\delta A + \delta f). \tag{11}$$

**Доказательство**

Отметим прежде всего, что

$$\left\|A^{-1}\Delta A\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A\right\| = \mu(A) \cdot \delta A = \rho < 1,$$

и поэтому выполнены условия теоремы 1. Значит, справедливо неравенство (4). Но

$$\left\|\Delta f\right\| = \left\|f\right\| \cdot \delta f \le \left\|A\right\| \cdot \left\|u^*\right\| \cdot \delta f.$$

Поэтому

$$\left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta f\right\| \le \mu(A)\delta f \cdot \left\|u^*\right\|.$$

Подставив эту оценку в правую часть неравенства (4) и поделив на $\left\|u^*\right\|$, получим

$$\delta u \le \frac{1}{1-\rho}\left(\rho + \mu(A)\delta f\right).$$

Остается подставить сюда вместо $\rho$ его значение и вынести $\mu(A)$ за скобку. ■

В предположении, что относительная погрешность $\delta A$ настолько мала, что величиной $\mu(A)\delta A$ можно пренебречь по сравнению с единицей, качественно оценка (11) выглядит так: относительная погрешность решения оценивается величиной, пропорциональной сумме относительных погрешностей в операторе и в правой части, причем коэффициент пропорциональности — число обусловленности оператора $A$.

Разумеется, правая часть оценки (11) тем меньше, чем меньше число обусловленности $\mu(A)$. Оператор $A$ и уравнение (1) принято называть *хорошо обусловленными*, если число обусловленности $\mu(A)$ невелико, и *плохо обусловленными*, если $\mu(A)$ большое.

Можно показать, что оценка (11) является точной в том отношении, что для любого обратимого оператора $A$ найдутся такая правая часть $f$ и такие отличные от нулевых погрешности $\Delta A$ $\left(\left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A\right\| < 1\right)$ и $\Delta f$, что отношение правой и левой части оценки (11) сколь угодно близко к единице.

# § 2. Общая схема приближенных методов. Сходимость

Пусть требуется решить уравнение

$$Au = f \tag{1}$$

с линейным оператором $A$, действующим из нормированного пространства $U$ в пространство $F$. Приближенные методы решения уравнения (1) обычно требуют решения некоторого другого, более простого линейного уравнения, чаще всего системы линейных алгебраических уравнений. Это обстоятельство и будет положено в основу излагаемой ниже общей схемы приближенных методов[1].

Итак, пусть наряду с уравнением (1) задано другое уравнение (или последовательность уравнений)

$$A_n u_n = f_n \tag{2}$$

с линейным оператором $A_n$, действующим из пространства $U_n$ в пространство $F_n$. Нормированные пространства $U_n$ и $F_n$ всегда будем считать полными, а оператор $A_n$ всегда будем предполагать ограниченным. Уравнения (1) и (2) считаются некоторым образом связанными между собой. Будем предполагать, что задан линейный ограниченный оператор $\psi_n$, действующий из пространства $F$ в пространство $F_n$, и что правая часть $f_n$ уравнения (2) всегда есть результат применения этого оператора к $f$ : $f_n = \psi_n f$. Решение $u^*$ уравнения (1) и решение $u_n^*$ уравнения (2) лежат, вообще говоря, в разных пространствах; поэтому не всегда $u_n^*$ можно рассматривать как приближенное решение уравнения (1). Будем называть $u_n^*$ *каркасом приближенного решения* и считать, что само приближенное решение $u^{(n)}$ восстанавливается по каркасу с помощью линейного ограниченного оператора $\overline{\varphi}_n$, действующего из $U_n$ в $U$: $u^{(n)} = \overline{\varphi}_n u_n^*$. Наконец, предположим, что задан еще один линейный ограниченный оператор $\varphi_n$, действующий из пространства $U$ в про-

[1] Эта основная идея общей теории приближенных методов принадлежит Л. В. Канторовичу, а та конкретная схема, о которой идет речь далее, — М. К. Гавурину.

странство $U_n$. Роль этого оператора будет выяснена позже. Пока заметим только, что он не связан с алгоритмом метода; $\varphi_n u$ есть "представитель" элемента $u$ в пространстве $U_n$.

Все введенные пространства и операторы можно изобразить на схеме (рис. 1).

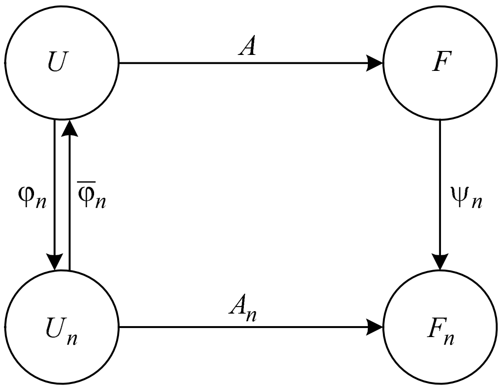


**Рис. 1**

Перейдем к вопросу о сходимости приближенных решений $u^{(n)}$ к точному $u^*$. При этом, конечно, считается, что (2) — последовательность уравнений.

***Определение 1***

*Мерой аппроксимации уравнения* (1) *уравнением* (2) *на элементе* $u \in D(A)$ называется число

$$\gamma_n(u) = \left\| A_n \varphi_n u - \psi_n A u \right\|.$$

Говорят, что последовательность операторов $A_n$ аппроксимирует оператор $A$ на элементе $u$, если $\gamma_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Пусть $\delta_n$ — некоторая бесконечно малая величина. Условимся говорить, что уравнения (2) аппроксимируют на элементе $u$ уравнение (1) с порядком $\delta_n$, если $\gamma_n(u) = O(\delta_n)$.

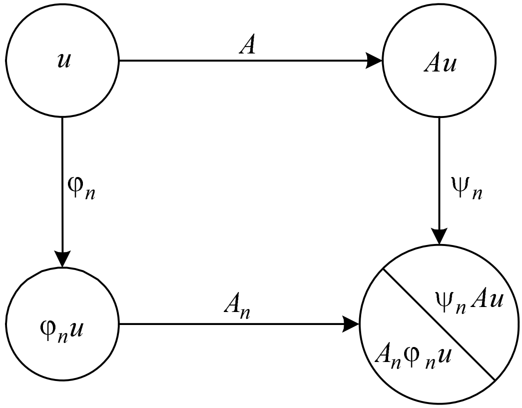


**Рис. 2**

Формула, определяющая меру аппроксимации, легко запоминается с помощью схемы (рис. 2), которую следует сопоставить со схемой, изображенной на рис. 1: мера аппроксимации есть норма разности двух элементов, указанных в правом нижнем кружочке. Поясним смысл меры аппроксимации еще следующим образом. Каждый элемент $\bar{u} \in D(A)$ есть решение уравнения $Au = \bar{f}$, где $\bar{f} = A\bar{u}$. Соответствующее этому уравнению "приближенное" уравнение есть $A_n u_n = \bar{f}_n$, где $\bar{f}_n = \psi_n \bar{f} = \psi_n A\bar{u}$. Поэтому $\gamma_n(u) = \left\| A_n \varphi_n \bar{u} - \bar{f}_n \right\|$ — норма невязки, которая получается при подстановке в "приближенное" уравнение "представителя" точного решения.

***Определение 2***

Будем говорить, что *каркасы приближенных решений сходятся*, если выполняется соотношение $\left\| \varphi_n u^* - u_n^* \right\| \to 0$.

## Теорема 1
## (о сходимости каркасов приближенных решений)

Пусть существует решение $u^*$ уравнения (1) и пусть при некотором $n$ существует ограниченный обратный оператор $A_n^{-1}$. Тогда

$$\left\| \varphi_n u^* - u_n^* \right\| \le \left\| A_n^{-1} \right\| \gamma_n(u^*), \qquad (3)$$

и если ограниченные операторы $A_n^{-1}$ существуют при всех достаточно больших $n$ и

$$\left\|A_n^{-1}\right\| \cdot \gamma_n(u^*) \to 0, \tag{4}$$

то каркасы приближенных решений сходятся.

## Доказательство

Сходимость каркасов при условии (4) сразу же следует из (3), поэтому только это неравенство и требуется доказать. Поскольку

$$u_n^* = A_n^{-1} f_n = A_n^{-1} \psi_n f \;\text{ и }\; f = Au^*,$$

то

$$\varphi_n u^* - u_n^* = A_n^{-1} A_n \varphi_n u^* - A_n^{-1} \psi_n f = A_n^{-1} (A_n \varphi_n u^* - \psi_n A u^*),$$

и потому

$$\left\|\varphi_n u^* - u_n^*\right\| \le \left\|A_n^{-1}\right\| \cdot \left\|A_n \varphi_n u^* - \psi_n A u^*\right\| = \left\|A_n^{-1}\right\| \cdot \gamma_n(u^*). \blacksquare$$

**Следствие.** Если операторы $A_n$ аппроксимируют оператор $A$ на решении $u^*$ и если при достаточно больших $n$ существуют непрерывные обратные операторы $A_n^{-1}$ и они равномерно ограничены $\left(\left\|A_n^{-1}\right\| \le C\right)$, то каркасы приближенных решений сходятся.

- **Замечание 1.** Полезно иметь в виду, что мера аппроксимации на точном решении $\gamma_n(u^*)$ есть, как об этом уже говорилось ранее, $\left\|A_n \varphi_n u^* - f_n\right\|$.

  Оценка (3) в связи с этим приобретает смысл оценки погрешности "приближенного решения" $\varphi_n u^*$ уравнения (2) через норму его невязки и может рассматриваться как частный случай оценки, указанной в *теореме 1 из § 1*.

- **Замечание 2.** Неформальный смысл сходимости каркасов определяется трактовкой решения приближенного уравнения в конкретных методах. Поясним это примером. Обычно искомый элемент $u^* \in U$ есть функция, заданная в некоторой области. Часто (так это будет, например, в методе сеток) каркас приближенного решения можно трактовать как таблицу приближенного решения. Если определить оператор $\varphi_n$ таким образом, чтобы функции $u$ он ставил в соответствие таблицу значений этой функции в тех же узлах, то сходимость каркасов будет означать близость (при достаточно больших $n$) таблиц точного и приближенного решений.

Обратимся теперь непосредственно к вопросу о сходимости приближенных решений $u^{(n)}$.

## Теорема 2
## (о сходимости приближенных решений)

Пусть существует точное решение $u^*$. Пусть при некотором $n$ существует ограниченный обратный оператор $A_n^{-1}$. Тогда

$$\left\| u^{(n)} - u^* \right\| \le \left\| \overline{\varphi}_n \right\| \cdot \left\| A_n^{-1} \right\| \cdot \gamma_n(u^*) + \left\| \overline{\varphi}_n \varphi_n u^* - u^* \right\|. \quad (5)$$

Если ограниченные обратные операторы $A_n^{-1}$ существуют при всех достаточно больших $n$ и выполняются соотношения

$$\left\| \overline{\varphi}_n \right\| \cdot \left\| A_n^{-1} \right\| \cdot \gamma_n(u^*) \to 0, \quad \overline{\varphi}_n \varphi_n u^* \to u^*,$$

то $u^{(n)} = \overline{\varphi}_n u_n{}^* \to u^*$.

## Доказательство

Доказательство этой теоремы сразу же сводится к доказательству неравенства (5). Очевидно, что

$$u^{(n)} - u^* = \overline{\varphi}_n u_n^* - u^* = \overline{\varphi}_n (u_n^* - \varphi_n u^*) + \overline{\varphi}_n \varphi_n u^* - u^*.$$

Отсюда

$$\left\| u^{(n)} - u^* \right\| \le \left\| \overline{\varphi}_n \right\| \cdot \left\| u_n^* - \varphi_n u^* \right\| + \left\| \overline{\varphi}_n \varphi_n u^* - u^* \right\|.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться для оценки величины $\left\| u_n^* - \varphi_n u^* \right\|$ неравенством (3). ■

# § 3. Устойчивость

При решении "точного" уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

построение "приближенных" уравнений

$$A_n u_n = f_n \quad (f_n = \varphi_n f), \tag{2}$$

предписываемое алгоритмом решения задачи, обычно не удается осуществить точно. Поэтому реально вместо этих уравнений мы строим и решаем некоторые другие:

$$(A_n + \Delta A_n)u_n = f_n + \Delta f_n. \tag{3}$$

Возникает вопрос, насколько сильные искажения в каркасах приближенных решений $u_n^*$ и в самих приближенных решениях $u^{(n)}$ вызовут ошибки, допущенные при составлении приближенных уравнений. Кроме того, сами приближенные уравнения (3) также обычно не удается решить точно. Вопрос о том, какая невязка приближенного решения является допустимой, как это было показано в *§ 1*, также сводится к вопросу о допустимых возмущениях $\Delta f_n$ правых частей. Поставленная задача о влиянии допущенных погрешностей на приближенное решение в действительности чрезвычайно существенна. Известны приближенные методы, которые теоретически обладают очень быстрой сходимостью, но практически непригодны, поскольку малейшие искажения в той системе линейных алгебраических уравнений, которую попутно приходится решать, приводят к большим ошибкам в приближенном решении[1].

При каждом фиксированном $n$ сопоставление решений уравнений (2) и (3) осуществляется теоремами, доказанными в *§ 1*. Нас будет интересовать сейчас качественная характеристика метода, сводящего уравнение (1) к последовательности уравнений (2). При этом решения уравнений (3) будем обозначать через $u_n^* + \Delta u_n$, где $u_n^*$ — решения уравнений (2).

[1] Например, метод Ритца с неудачно выбранной координатной системой.

***Определение 1***

Пусть при достаточно больших $n$ операторы $A_n$ ограничены вместе с обратными $A_n^{-1}$. Процесс отыскания каркасов приближенных решений называется *устойчивым*, если, каковы бы ни были возмущения $\Delta A_n$ операторов $A_n$ и $\Delta f_n$ правых частей $f_n$, соотношения

$$\delta A_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0 \quad \text{и} \quad \delta f_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$$

влекут за собой существование при достаточно больших $n$ обратных операторов $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$ и соотношение $\delta u_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0.$

Другими словами, устойчивость процесса отыскания каркасов означает, что если приближенные уравнения мы будем строить с относительными погрешностями в операторах и в правых частях, стремящимися к нулю, то и относительные погрешности в каркасах также будут стремиться к нулю.

Теореме о признаке устойчивости процесса отыскания каркасов предпошлем лемму.

## Лемма

Пусть $A \in L(U,F)$ — линейный ограниченный оператор, имеющий ограниченный же обратный $A^{-1} \in L(F,U)$. Тогда существует такой линейный ограниченный оператор $B \in L(U,F)$, что $\|B\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| < 2$ и оператор $A + B$ не имеет обратного.

## Доказательство

Выберем элемент $\bar{f} \in F$ так, чтобы для элемента $\bar{u} = A^{-1}\bar{f}$ выполнялась оценка $\|\bar{u}\| = \left\|A^{-1}\bar{f}\right\| > \frac{1}{2}\left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\bar{f}\right\|$. Выберем функционал $\Psi \in U^*$ из условий: $\|\Psi\| = 1,\ \Psi(\bar{u}) = \|\bar{u}\|$. Положим теперь $Bu = -(\Psi(u)/\|\bar{u}\|)\bar{f}$. Тогда

$$B\bar{u} = -(\Psi(u)/\|\bar{u}\|)\bar{f} = -\bar{f},\ \ (A+B)\bar{u} = \bar{f} - \bar{f} = 0,$$

так что оператор $A + B$ необратим, и в то же время $\|B\| = \left\|\bar{f}\right\| / \|\bar{u}\| < 2 / \left\|A^{-1}\right\|$ и $\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|B\| < 2.$ ■

**Теорема 1**
**(об устойчивости процесса отыскания каркасов)**

Пусть при всех достаточно больших $n$ существуют непрерывные обратные операторы $A_n^{-1}$. Тогда для того чтобы процесс отыскания каркасов приближенных решений был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы числа обусловленности операторов $A_n$ были равномерно ограничены: $\mu(A_n) \le C$.

**Доказательство**

1. *Достаточность.*

Пусть $\mu(A_n) \le C$ и возмущения $\Delta A_n$ и $\Delta f_n$ таковы, что $\delta A_n \to 0$ и $\delta f_n \to 0$. Тогда

$$\left\|A_n^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A_n\right\| = \mu(A_n)\delta A_n \to 0,$$

и поэтому по *теореме 1 из § 1* при достаточно больших $n$ существуют операторы $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$. Воспользовавшись оценкой из *теоремы 2 (§ 1)*

$$\delta u_n \le \frac{\mu(A_n)}{1 - \mu(A_n) \cdot \delta A_n}\left(\delta A_n + \delta f_n\right),$$

видим, что при наших условиях $\delta u_n \to 0$. Таким образом, процесс отыскания каркасов устойчив. Достаточность доказана.

2. *Необходимость.*

Необходимость будем доказывать от противного. Допустим, что последовательность $\mu(A_n)$ неограничена. Не умаляя общности, можно считать, что $\mu(A_n) \to \infty$ (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности индексов $n_m$, для которой $\mu(A_{n_m}) \to \infty$). Применяя лемму, построим последовательность операторов $B_n = \Delta A_n$, так что операторы $A_n + \Delta A_n$ не имеют обратных, и в то же время $\left\|\Delta A_n\right\| \cdot \left\|A_n^{-1}\right\| < 2$. Это последнее неравенство означает, что $\left\|\Delta A_n\right\| \mu(A_n) < 2\left\|A_n\right\|$ или $\delta A_n < 2/\mu(A_n) \to 0$. Таким образом, нашлись такие возмущающие операторы $\Delta A_n$, что, несмотря на соотношение $\delta A_n \to 0$, обратные операторы $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$ не существуют, так что процесс отыскания каркасов неустойчив. ■

- **Замечание 1.** Как видно из доказанной теоремы, будет ли процесс отыскания каркасов устойчив, не зависит от правой части уравнения.

- **Замечание 2.** Как видно из доказательства теоремы, ограниченность чисел обусловленности $\mu(A_n)$ необходима уже только для выполнения первого из условий устойчивости — существования операторов $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$ при всех достаточно больших *n*. Если последовательность операторов $A_n$ такова, что для любой возмущающей последовательности $\Delta A_n$ из соотношения $\delta A_n \to 0$ следует существование (при достаточно больших *n*) операторов $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$, то числа обусловленности $\mu(A_n)$ операторов $A_n$ равномерно ограничены и процесс отыскания каркасов устойчив.

- **Замечание 3.** В реально применяемых методах условие ограниченности чисел обусловленности $\mu(A_n)$ не всегда бывает выполнено. Из доказательства достаточности в теореме 1 легко усмотреть, что существование операторов $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$ и соотношение $\delta u_n \to 0$ являются следствиями условий
$$\mu(A_n)\delta A_n \to 0, \quad \mu(A_n)\delta f_n \to 0. \tag{4}$$
Поэтому применение методов с неограниченными числами обусловленности $\mu(A_n)$ возможно, если заботиться о достаточно быстром убывании ошибок $\Delta A_n$ и $\Delta f_n$ так, чтобы выполнялись соотношения (4). Выполнение последних реально осуществимо, если числа обусловленности $\mu(A_n)$ растут не слишком быстро. В связи с этим принято различать степенную и показательную неустойчивость. Первая означает, что для $\mu(A_n)$ выполняется оценка вида $\mu(A_n) \le Cn^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Это — медленный рост чисел обусловленности. Счет по таким методам обычно возможен, хотя и требует ведения вычислений с дополнительными знаками. Показательная неустойчивость означает, что $\mu(A_n) \ge Cq^n$ $(q > 1)$. Это очень быстрый рост $\mu(A_n)$. Удовлетворить при этом соотношениям (4) обычно не удается, и такие методы для счета практически непригодны. Стоит обратить внимание на то, что при определении степенной и показательной неустойчивости знак неравенства направлен в разные стороны. Этому соответствует разная эмоциональная окраска терминов. Степенная неустойчивость — "хорошо", "почти хорошо", "допустимо", а показательная — "плохо", "недопустимо".

Перейдем к изучению тех ошибок, которые возникают в приближенном решении $u^{(n)}$ из-за неточного проведения алгоритма. Источников ошибок здесь два. Во-первых, это неточное построение каркаса приближенного решения — $u_n^* + \Delta u^n$ вместо $u_n^*$ в результате замены уравнения (2) уравнением (3). Во-вторых, возможны ошибки при применении к полученному каркасу оператора $\overline{\varphi}_n$. Последние мы будем рассматривать как результат возмущения оператора $\overline{\varphi}_n$ некоторым линейным оператором $\Delta\overline{\varphi}_n \in L(U_n, U)$. Таким образом, вместо приближенного решения $u^{(n)} = \overline{\varphi}_n u_n^*$ мы получаем $u^{(n)} + \Delta u^{(n)} = $ $= (\overline{\varphi}_n + \Delta\overline{\varphi}_n)(u_n^* + \Delta u_n)$.

***Определение 2***

Процесс построения приближенных решений называется устойчивым, если:

1) из соотношения $\delta A_n \to 0$ следует существование при всех достаточно больших $n$ обратных операторов $(A_n + \Delta A_n)^{-1}$;

2) из соотношений

$$\delta A_n \to 0, \quad \delta f_n \to 0, \quad \delta\overline{\varphi}_n = \frac{\|\Delta\overline{\varphi}_n\|}{\|\overline{\varphi}_n\|} \to 0 \tag{5}$$

вытекает соотношение $\delta u^{(n)} = \dfrac{\|\Delta u^{(n)}\|}{\|u^{(n)}\|} \to 0.$

Теорему об устойчивости процесса построения приближенных решений будем доказывать для сходящихся методов. При этом естественно считать, что само точное решение $u^*$ — ненулевое.

## Теорема 2
## (об устойчивости процесса построения приближенных решений)

Пусть выполнены условия: 1) существует решение $u^*$ уравнения (1), причем $f \neq 0$; 2) при достаточно больших $n$ существуют непрерывные обратные операторы $A_n^{-1}$; 3) приближенные решения $u^{(n)}$ сходятся к точному: $u^{(n)} \to u^*$.

Тогда для устойчивости процесса построения приближенных решений необходимо и достаточно выполнение двух условий: а) процесс отыскания каркасов приближенных решений устойчив; б) числа $\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u*^*_n\|$ равномерно ограничены: $\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u^*_n\|\le C$.

## Доказательство

1. *Достаточность.*

Пусть выполнены условия а) и б). Требуется проверить условия 1) и 2) определения 2. Первое из них есть следствие устойчивости процесса отыскания каркасов. При проверке второго достаточно показать, что соотношения (5) влекут сходимость к нулю самих погрешностей $\Delta u^{(n)}$, поскольку, как было предположено в условиях теоремы, приближенные решения сходятся к ненулевому элементу $u^*$, и потому их нормы ограничены снизу положительным числом. Ясно, что

$$\Delta u^{(n)} = (\overline{\varphi}_n + \Delta\overline{\varphi}_n)\Delta u_n + \Delta\overline{\varphi}_n u^*_n.$$

Отсюда

$$\left\|\Delta u^{(n)}\right\| \le \left(\|\overline{\varphi}_n\| + \|\Delta\overline{\varphi}_n\|\right)\|\Delta u_n\| + \|\Delta\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u^*_n\| = \{(1+\delta\varphi_n)\delta u_n + \delta\varphi_n\}\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u^*_n\|.$$

Ввиду устойчивости процесса отыскания каркасов и соотношений (5)

$$\delta u_n \to 0, \quad \delta\overline{\varphi}_n \to 0.$$

Кроме того, $\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u^*_n\|\le C$. Поэтому из построенной оценки сразу же следует, что $\Delta u^{(n)} \to 0$. Достаточность доказана.

2. *Необходимость.*

Согласно замечанию 2 к теореме 1 уже первое требование определения 2 влечет ограниченность чисел обусловленности $\mu(A_n)$ операторов $A_n$, а значит, и устойчивость процесса отыскания каркасов. Осталось доказать необходимость условия б). Докажем это от противного. Пусть числа $\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u^*_n\|$ не ограничены. Не умаляя общности, будем считать, что $\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|u^*_n\|\to\infty$. Построим такие возмущения $\Delta A_n$, $\Delta f_n$ и $\Delta\overline{\varphi}_n$, чтобы, несмотря на выполнение соотношений (5), не выполнялось требование $\Delta u^{(n)} \to 0$. Именно положим $\Delta A_n = 0$, $\Delta f_n = 0$, так что $\Delta u_n = 0$ и $\Delta u^{(n)} = \Delta\overline{\varphi}_n u_n^*$. Оператор $\Delta\overline{\varphi}_n$ построим следующим образом. Положим $a_n = \sqrt{\|\overline{\varphi}_n\| / \|u_n^*\|}$ и выберем функционал $\Psi_n \in U_n^*$, так что $\|\Psi_n\| = 1$ и $\Psi_n(u_n^*) = \|u_n^*\|$, и произвольный элемент $\overline{u} \in U$, $\|\overline{u}\| = 1$. Теперь операторы $\Delta\overline{\varphi}_n \in L(U_n, U)$ определим формулой $\Delta\overline{\varphi}_n u_n = a_n \Psi_n(u_n)\overline{u}$.

Тогда

$$\|\Delta\overline{\varphi}_n\| = a_n, \qquad \delta\overline{\varphi}_n = 1 \Big/ \sqrt{\|\overline{\varphi}_n\| \cdot \|u_n^*\|} \to 0,$$

но

$$\left\|\Delta u^{(n)}\right\| = \left\|\Delta\overline{\varphi}_n u_n^*\right\| = a_n \left\| u_n^* \right\| = \sqrt{\|\overline{\varphi}_n\| \cdot \left\| u_n^* \right\|} \to \infty.$$

Этим необходимость условия б) доказана. ■

❑ **Замечание.** Будет ли процесс построения приближенных решений устойчив, зависит от правой части $f$, поскольку от нее зависит $u_n^*$.

По поводу доказанной теоремы можно сделать замечание, вполне аналогичное замечанию 3 к теореме 1. Если процесс построения приближенных решений неустойчив, но числа обусловленности $\mu(A_n)$ и последовательность $\|\overline{\varphi}_n\| \cdot \|u_n^*\|$ стремятся к бесконечности не слишком быстро, то за счет быстрого убывания относительных погрешностей $\delta A_n$, $\delta f_n$ и $\delta\overline{\varphi}_n$ обычно удается достичь стремления к нулю погрешности $\Delta u^{(n)}$. Как и ранее, можно было бы ввести понятие степенной и показательной неустойчивости процесса построения приближенных решений, но останавливаться на этом мы не будем.

Понятие устойчивости, как оно дается определениями 1 и 2[1], не является общепринятым. Сопоставление этого определения с другим, более распространенным, мы приведем в *§ 4 главы 4*, где такое сравнение можно будет сделать на более содержательном уровне.

[1] Это определение принадлежит М. К. Гавурину.

В заключение главы еще раз обратимся к нашей общей схеме, основная идея которой — рассматривать приближенное решение, построенное по предписанному алгоритму, как точное решение некоторого другого уравнения. Схема эта является весьма гибкой и оставляет для того, кто исследует приближенный метод, достаточно широкий произвол. Реально задано уравнение (1) (точнее, видимо, говорить — класс уравнений; исследование того или иного приближенного метода проводится обычно не для одного отдельного уравнения, а для некоторого класса уравнений). Выбор той пары пространств ($U$, $F$), в которых рассматривается оператор $A$, обычно находится в распоряжении исследователя. Произвол в выборе $U$ ограничен лишь тем, что те функционалы, значение которых на решении нас в действительности интересует, должны быть непрерывны в этом пространстве. Тогда из сходимости приближенных решений в пространстве $U$ будет следовать и сходимость этих функционалов, вычисленных на приближенных решениях. Это требование, как правило, не бывает обременительным, и часто выбор пространств $U$ и $F$ осуществляется из тех соображений, чтобы по возможности облегчить исследование метода. Этим будет в основном диктоваться выбор пространств $U$ и $F$ ниже, при исследовании конкретных методов. Впрочем математический анализ располагает рядом теорем, которые позволяют утверждать, что если некоторая последовательность функций сходится в некотором функциональном пространстве достаточно быстро, то она будет сходиться и в другом функциональном пространстве с более сильной нормой. Поэтому и в тех случаях, когда нас интересует сходимость метода не в той "естественной" метрике, которая наиболее удобна для применения общей схемы, а в другой, более сильной, часто предпочтительным оказывается такой путь. Сначала сходимость исследуется на основе общей схемы все же в "естественной" метрике, а затем используется какая-либо из упомянутых выше теорем о последовательностях функций. Простейший пример такого рода соображений читатель найдет в *§ 7 главы 4*.

В распоряжении исследователя всегда находится выбор пространств $U_n$ и $F_n$. Что касается самих уравнений (2), то произвол в их выборе связан с тем, что требования алгоритма, которые определяют приближенное решение, могут быть записаны в виде разных эквивалентных уравнений. При исследовании сходимости из множества таких уравнений естественно выбрать то, которое наиболее просто приводит к интересующему нас результату. Устойчивость же метода самым тесным образом связана с тем, которое из этих эквивалентных уравнений мы выбрали для реального счета, так что вопросы устойчивости требуют обычно более детального описания алгоритма[1]. При этом конкретный вид уравнений (2) оказывается определенным. Тем самым определены операторы $\psi_n$ и $\overline{\varphi}_n$ — первый из них по правой части $f$ уравнения (1) строит правую часть $f_n$ уравнения (2), а второй по каркасу восстанавливает само приближенное решение. Оператор же $\varphi_n$ всегда находится в распоряжении исследователя.

Вернемся еще к вопросу о выборе норм в пространствах $U_n$ и $F_n$. Если уравнения (2) однозначно разрешимы при всех достаточно больших $n$, то нетрудно выбрать эти нормы так, чтобы процесс отыскания каркасов формально оказался устойчивым. Для этого достаточно, например, произвольно выбрав норму в $U_n$, положить по определению $\|f_n\|_{F_n} = \|A_n^{-1} f_n\|_{U_n}$, или же, наоборот, положить $\|u_n\|_{U_n} = \|A_n u_n\|_{F_n}$, и тогда при всех $n$ будет $\mu(A_n) = 1$. Если нас интересуют вопросы сходимости, то, как легко видеть, такой выбор норм просто означает перенесение трудностей из одного места в другое. Те трудности, которые могли бы возникнуть в оценке нормы $\|A_n^{-1}\|$ при другом выборе норм в пространствах $U_n$ и $F_n$, переносятся в задачу оценки меры аппроксимации $\gamma_n(u^*)$ или в задачу оценки $\|\overline{\varphi}_n\|$. Если же нас интересуют вопросы устойчивости счета, то при таком определении норм мы вряд ли сможем на основании результатов общей теории дать какие-либо полезные рекомендации, например, относительно допустимых в правой части уравнений (2) ошибок округления. Таким образом, при изучении устойчивости выбор норм в $U_n$ и $F_n$ в значительной мере определяется ценностью тех рекомендаций относительно проведения счета, которые мы сможем дать на основании общих результатов. Утверждение, что такой-то метод устойчив (устойчив процесс отыскания каркасов), всегда должно сопровождаться указанием выбора норм в пространствах $U_n$ и $F_n$, при котором эта устойчивость имеет место. Уравнения (2) чаще всего суть системы линейных алгебраических уравнений. В этом случае в пространствах $U_n$ и $F_n$, которые суть ко-

---

[1] Например, при изучении метода Ритца вопросы сходимости можно решать в предположении, что нам задана последовательность подпространств, в которых мы ищем приближенные решения. Устойчивость же решающим образом зависит от конкретного выбора координатной системы. т. е. выбора базисов этих подпространств.