

Розендорн Э.Р.

Теория поверхностей



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 514.14
ББК 22.151
Р 64

Розендорн Э. Р. **Теория поверхностей.** — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 304 с. — ISBN 5-9221-0685-6.

Книга предназначена для первоначального знакомства с геометрией поверхностей. Изложение доведено до разделов, имеющих важные приложения в механике, технике, оптике. Особенно наглядно применение полученных результатов в механике: на них опираются методы расчета упругих тонкостенных конструкций. Также в книге обсуждаются некоторые нетрадиционные приложения геометрии и связанные с ними нерешенные вопросы.

Для студентов вузов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников и инженеров.

Ил. 245. Библиогр. 130 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Из предисловия к первому изданию	7

Часть I

Глава 1. Поверхности вида $z = f(x, y)$	8
§ 1. Касательная плоскость	8
§ 2. Нормаль. Гауссово сферическое отображение	15
§ 3. Площадь поверхности	18
§ 4. Кривизна нормальных сечений и классификация точек поверхности	24

Часть II

Глава 2. Поверхности, заданные параметрически. Локальное строение поверхностей	31
§ 5. Вектор-функции двух аргументов	31
§ 6. Параметрическое задание поверхностей	34
§ 7. Преобразование координат на поверхности	43
§ 8. Первая квадратичная форма	50
§ 9. Вычисление углов и площадей. Понятие о внутренней геометрии поверхности	54
§ 10. Кривизна линий на поверхности. Теорема Менье	63
§ 11. Вторая квадратичная форма	71
§ 12. Главные кривизны и главные направления. Теорема Родрига. Линии кривизны	78
§ 13*. Развертывающиеся и минимальные поверхности	92
§ 14. Ортонормированный сопровождающий трехгранник	96
Глава 3. Поверхность в целом. Задание поверхности двумя квадратичными формами	103
§ 15. Общее понятие поверхности	103
§ 16. Теорема единственности	116

§ 17. Внешнее произведение линейных дифференциальных форм и внешний дифференциал	123
§ 18. Уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци	126
Глава 4. Внутренняя геометрия и изгибание поверхностей	129
§ 19. Изометрия и изгибание. Теорема Гаусса	129
§ 20*. Неизгибаемость сферы	140
§ 21. Геодезическая кривизна	146
§ 22. Геодезические линии и полугеодезические координаты	150
§ 23. Поворот кривой на поверхности. Формула Гаусса–Бонне и ее следствия	157
§ 24. Двумерная риманова метрика	161
§ 25*. Доказательство формулы Гаусса–Бонне	165

Часть III

Глава 5. Ортогональные криволинейные координаты в пространстве	172
§ 26. Геометрическое истолкование пространственных криволинейных координат	172
§ 27. Ортогональные координаты. Коэффициенты Ламе	176
§ 28. Теорема Дюлена	184
§ 29. О построении пространственных ортогональных и приближенно ортогональных координат	186
§ 30. Девивационные формулы	194
§ 31*. Дифференциальные параметры Бельтрами	202
Глава 6. Огибающая и дискриминанта семейства поверхностей	205
§ 32. Огибающая	205
§ 33. Дискриминанта	217
Глава 7. Бесконечно-малые изгибания и жесткость поверхностей	230
§ 34. Постановка задачи. Уравнения бесконечно малых изгибаний	230
§ 35. Диаграмма вращений	234
§ 36. Начальное поле скоростей деформации. Связь бесконечно малых изгибаний с изгибаниями поверхности	242
§ 37. Понятие о жесткости поверхностей	247
§ 38*. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения	256
§ 39*. Жесткость овалондов	260

Добавления 269

 § 40*. Деривационные формулы Гаусса. Символы Кристоффеля. Вычисление геодезической кривизны в произвольных криволинейных координатах. Теорема Бура 269

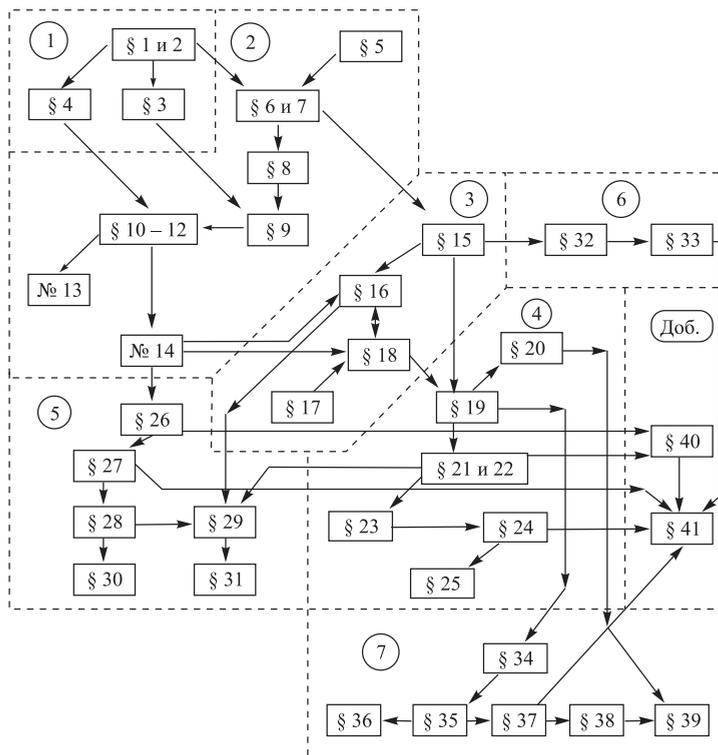
 § 41*. Геометрические подходы в математическом описании цветового зрения 278

Заключение 292

Предметный указатель 293

Список литературы 297

Схема зависимости параграфов



Предисловие

Математика весьма абстрактна, и многие ее разделы находят применения внутри нее самой. А среди тех, что непосредственно «выходят на приложения», есть такие, которые эти «выходы» нашли лишь после сотен лет развития. Например, теория чисел недавно получила важные применения в шифровании, в так называемой защите информации.

Другой пример связан с применением геометрии в технике. Оболочками называют конструкции, толщина которых много меньше их протяженности по двум другим направлениям. Это — корпуса ракет и самолетов, морских и речных судов, емкости для горючего, купола, перекрывающие пространство в десятки метров при толщине в несколько сантиметров, и т. п. Все чаще встречаются ситуации, когда технические требования вынуждают придавать оболочкам сложную геометрическую форму. Примером могут служить самолеты, у которых полые крылья и фюзеляж образуют единую оболочку.

Оказалось, что не только материал оболочки, но и геометрическая форма влияют на ее прочность, устойчивость и другие механические свойства. То же самое относится и к ребрам жесткости и другим конструктивным элементам, предназначенным для повышения прочности оболочки: важно, по каким линиям они расположены. Вот почему для грамотного расчета конструкций, содержащих оболочки, необходимо знание теории поверхностей. Разумеется, это ее приложение — не единственное, однако оно не только актуально и быстро развивается, но и ставит новые задачи перед геометрией.

Тем разделам теории поверхностей, которые наиболее тесно связаны с теорией оболочек, посвящены § 19, 20*, 29, глава 7 и п. 12° в § 40*. Для второго издания написаны § 26–41, частично переработан § 15 и связанные с ним пункты. Исправлены замеченные опечатки, добавлены некоторые примеры и пояснения. Обновлен и расширен список литературы, включены более новые задачки [29, 78]; нумерация библиографических ссылок приведена в соответствии с расширенным списком литературы.

Апрель 2005 г.

Э. Р. Розендорн

Из предисловия к первому изданию

Пособие предназначено для первоначального знакомства с теорией поверхностей. Параграфы 1–13 образуют законченный раздел, которым может ограничиться читатель, интересующийся только локальными вопросами. Законченный раздел образуют также вместе параграфы 1–12, 14 и 15, 17–19 и 21, 22 (см. схему, приведенную после оглавления). Возможны и другие варианты сокращенного изучения пособия. Так, например, можно пропустить параграфы, пункты и задачи, помеченные звездочками. Параграфы 1 и 2, а также 4 и 5, можно использовать при изучении дифференциального исчисления для функций двух переменных. Более подробные сведения о поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве читатель может найти в учебниках [20, 31, 82, 91] и [99], а с многомерным случаем познакомиться по книгам [106] и [123]. Для упражнений на закрепление теоретического материала можно использовать задачки [79] или [104], задачи из учебников [91] и [99].

Март, 1972 г.

Э. Р. Розендорн

Часть I

Первая часть книги служит развернутым введением. Она состоит из одной главы и на простом наглядном материале знакомит с важными для дальнейшего понятиями.

Глава 1

ПОВЕРХНОСТИ ВИДА $Z = F(X, Y)$

§ 1. Касательная плоскость

1°. Изучение поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 мы начнем с частного случая, указанного в названии главы.

Общее определение поверхности будет сформулировано ниже, в начале главы 3 (см. § 15).

2°. Пусть в \mathbb{R}^3 выбрана декартова прямоугольная система координат (x, y, z) и пусть в некоторой области \mathcal{D} на плоскости (x, y) задана функция $f(x, y)$, непрерывная вместе с ее частными производными первого порядка.

Геометрическое место точек пространства \mathbb{R}^3 , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

называют *гладкой поверхностью*; обозначим ее буквой S . Обратим еще раз внимание на то, что мы имеем здесь дело лишь с частным случаем поверхности.

3°. Выберем на S какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ и наряду с функцией f рассмотрим ее дифференциал, взятый при $x = x_0$, $y = y_0$:

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy.$$

Здесь и всюду в дальнейшем производные по какому-либо аргументу обозначены с помощью нижнего буквенного индекса, в частности:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Построим плоскость Π с уравнением

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \quad (2)$$

Считая, что $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, уравнение (2) можно переписать так:

$$z = z_0 + dz \tag{2a}$$

(здесь и выше dz берется при $x = x_0$, $y = y_0$).

Определение 1. Плоскость (2) называется *касательной плоскостью к поверхности (1) в точке M_0* .

Посмотрим, чем характеризуется расположение касательной плоскости по отношению к поверхности.

Положим $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Вследствие дифференцируемости функции $f(x, y)$ имеем при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$

$$f(x, y) = z_0 + dz + o(\rho). \tag{3}$$

Величина $o(\rho)$ в формуле (3) представляет собой расстояние от поверхности до касательной плоскости, измеренное в направлении оси z (рис. 1). Пользуясь обозначениями рис. 1, мы можем написать, что

$$MN = o(\rho), \text{ то есть } \lim_{M' \rightarrow M'_0} \frac{MN}{M'_0 M'} = 0. \tag{4}$$

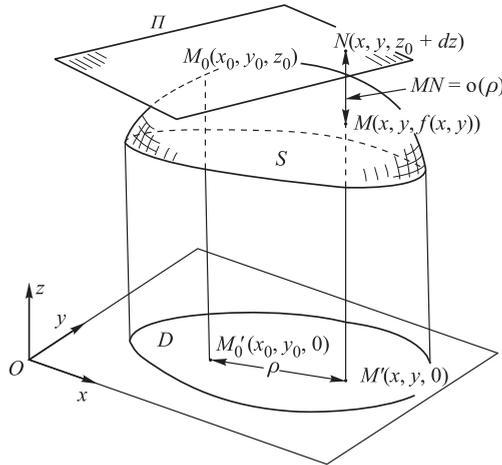


Рис. 1

Таким образом, уклонение MN точки поверхности от касательной плоскости имеет *более высокий порядок малости*, чем смещение ρ . С наглядной точки зрения это означает, что вблизи точки M_0 поверхность S почти совпадает с плоскостью Π . Поэтому во многих

локальных вопросах можно заменить поверхность S ее касательной плоскостью.

4°. Сформулированное выше определение касательной плоскости связано с выбранной в \mathbb{R}^3 координатной системой. Однако сама плоскость Π от выбора координат не зависит. Прежде, чем убедиться в этом, сделаем некоторые вспомогательные построения и рассмотрим их.

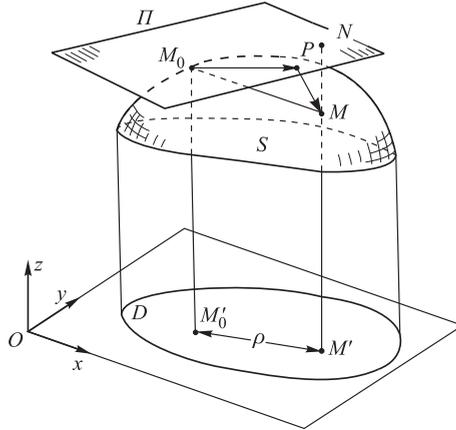


Рис. 2

5°. Из точки M опустим перпендикуляр MP на плоскость Π (рис. 2). Его длина тоже характеризует уклонение поверхности от касательной плоскости, но в отличие от длин MN и M'_0M' она не зависит от направлений координатных осей в \mathbb{R}^3 .

Из (4) сразу следует, что

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{MP}{M_0M} = 0. \quad (5)$$

В самом деле, $MP \leq MN$, $M_0M \geq M'_0M'$, и мы имеем

$$0 \leq \frac{MP}{M_0M} \leq \frac{MN}{M'_0M'} \quad \text{при } M \rightarrow M_0.$$

З а м е ч а н и е. Запись $M \rightarrow M_0$ означает, что пространственное расстояние M_0M стремится к нулю. Подробнее, пусть $r > 0$ — некоторое число; построим шар с центром M_0 и радиусом r ; точку M будем брать в той части поверхности S , которая содержится внутри этого шара; равенство (5) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left| \frac{MP}{M_0M} \right| < \varepsilon$, если только $r < \delta(\varepsilon)$.

Аналогичный смысл имеют пределы других величин при $M \rightarrow M_0$, встречающиеся ниже.

Заметим, что $M_0P \leq M_0M \leq M_0P + MP$. Поэтому наряду с равенством (5) справедливы соотношения

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{M_0P}{M_0M} = 1, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{MP}{M_0P} = 0. \quad (6)$$

Из точки M_0 в точку M проведем вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и представим его в виде следующей суммы:

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0P} + \overrightarrow{PM}. \quad (7)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0P}$, входящий в (7), расположен в касательной плоскости Π . При $M \rightarrow M_0$ он представляет собой главную часть вектора $\overrightarrow{M_0M}$. Вектор \overrightarrow{PM} ортогонален плоскости Π ; вследствие (5) и (6) его длина является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем длины векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0P}$.

6°. Покажем теперь, что никакая другая плоскость не может так тесно, как касательная, прилегать к поверхности S в окрестности точки M_0 . Пусть $\tilde{\Pi}$ — какая-нибудь плоскость, \tilde{P} — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость $\tilde{\Pi}$. Если $\tilde{\Pi}$ не проходит через M_0 , то длина $M\tilde{P}$ вообще не является бесконечно малой при $M \rightarrow M_0$. Предположим, что плоскость $\tilde{\Pi}$ проходит через точку M_0 . Двугранный угол между плоскостями Π и $\tilde{\Pi}$ обозначим через α . Проведем через M_0 вспомогательную плоскость Π_1 , ортогональную Π и $\tilde{\Pi}$ (рис. 3).

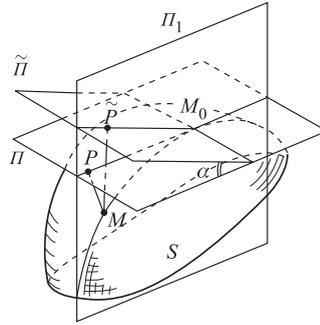


Рис. 3

Выберем точку M на линии пересечения плоскости Π_1 и поверхности S . Тогда точки M , M_0 , P и \tilde{P} расположены в одной плоскости Π_1 (см. рис. 3–5).

Сравним порядки малости длин $M\tilde{P}$ и M_0M . Имеем

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{M\tilde{P}}{M_0M} = \lim_{M \rightarrow M_0} \sin \angle MM_0\tilde{P} = \sin \alpha, \quad (8)$$

поскольку

$$\angle M_0M\tilde{P} = \alpha \pm \angle MM_0P, \quad (9)$$

а $\angle M_0MP \rightarrow 0$ вследствие (5). Знак « \pm » в (9) зависит от взаимного расположения плоскостей Π и $\tilde{\Pi}$ и поверхности S : плюс имеет место в случае, показанном на рис. 4, минус — в случае, показанном на рис. 5.

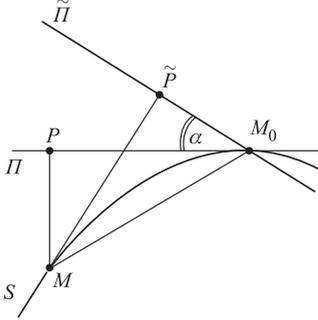


Рис. 4

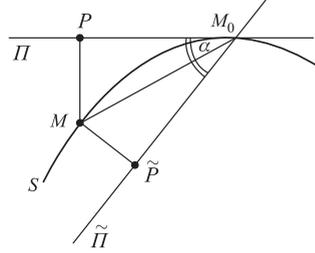


Рис. 5

Замечание. В равенствах (8) нужно считать, что точка M приближается к M_0 , оставаясь на линии пересечения поверхности S и плоскости Π_1 .

Если $\tilde{\Pi} \neq \Pi$, то $\sin \alpha \neq 0$, и тогда (8) показывает, что существует по крайней мере одна линия, на которой расстояние $M\tilde{P}$ имеет такой же порядок малости, как M_0M (но не более высокий!).

Если же $M\tilde{P} = o(M_0M)$, то $\sin \alpha = 0$, а это значит, что плоскость $\tilde{\Pi}$ совпадает с плоскостью Π .

Поэтому можно дать другое определение касательной плоскости, эквивалентное первоначальному.

Определение 2. Плоскость Π называется *касательной плоскостью к поверхности S* в точке M_0 , если для текущей точки M поверхности S длина перпендикуляра MP , опущенного на плоскость Π , является бесконечно малой более высокого порядка, чем расстояние M_0M (при $M \rightarrow M_0$).

Второе определение никак не связано с выбором системы координат в \mathbb{R}^3 . Отсюда видно, что если мы от координат (x, y, z) перейдем к новым декартовым координатам (x', y', z') и будем искать касательную плоскость в точке M_0 согласно определению 1, то мы получим ту же самую плоскость Π .

7*. При определении касательной плоскости можно было бы не требовать непрерывности частных производных f_x и f_y в области \mathcal{D} . Достаточно предположить, что функция $f(x, y)$ дифференцируема при $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда по формуле (2а) определится плоскость Π , для которой справедливы проведенные выше рассуждения и удовлетворяется определение 2.

Верно и обратное: из существования касательной плоскости в смысле определения 2 вытекает дифференцируемость функции $f(x, y)$. Точнее, справедлива

Теорема. Пусть поверхность S задана уравнением (1), где $f(x, y)$ — непрерывная функция. Пусть в точке M_0 поверхность S имеет касательную плоскость Π в смысле определения 2, не параллельную оси z . Тогда функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) .

Замечание. Непрерывность функции $f(x, y)$ естественно потребовать, исходя из геометрической постановки задачи. Если функция f разрывна, то геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (1), поверхностью обычно не называют.

Доказательство теоремы. Воспользуемся обозначениями, показанными на рис. 1 и рис. 2. Кроме того, положим $\theta = \angle PMN$, а через θ_1 обозначим острый угол между отрезками M_0N и M'_0M' (рис. 6). Угол θ равен углу между плоскостью Π и плоскостью (x, y) , а угол θ_1 не превышает этого угла:

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

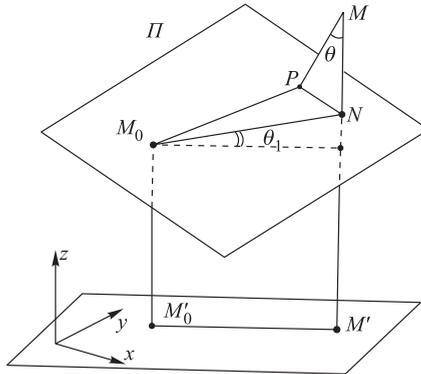


Рис. 6

Неравенство (10) вытекает из следующего свойства: если даны две плоскости и прямая в одной из них, то угол θ_1 между этой прямой и второй плоскостью не превышает угла θ между плоскостями (рис. 7).

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что из равенства (5) вытекает (4). Тем самым будет установлено, что для функции f справедливо разложение (3), причем уравнение (2 а) будет задавать именно плоскость Π .

Заметим, что условия $M \rightarrow M_0$ и $M' \rightarrow M'_0$ эквивалентны вследствие непрерывности функции $f(x, y)$.

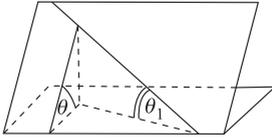


Рис. 7

Пусть $M \rightarrow M_0$. Мы уже знаем, что из (5) следует (6), поэтому имеем

$$MP = o(M_0M) = o(M_0P). \quad (11)$$

Далее, учитывая (10) и (11), находим

$$MN = \frac{MP}{\cos \theta} = o(M_0P). \quad (12)$$

Теперь, пользуясь геометрически очевидными неравенствами

$$M_0P - (MP + MN) \leq M_0N \leq M_0P + (MP + MN)$$

и соотношениями (11)–(12), получаем:

$$M'M'_0 = M_0N \cdot \cos \theta_1 = M_0P \cdot \cos \theta_1 + o(M_0P). \quad (13)$$

Наконец, используя (10), (12) и (13), вычисляем искомый предел:

$$\lim_{M' \rightarrow M'_0} \frac{MN}{M'M'_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{o(M_0P)}{M_0P \cdot \cos \theta_1 + o(M_0P)} = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

8°. К определению касательной плоскости можно подойти *еще одним способом*. Снова предположим, что f , f_x и f_y непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую, расположенную на S и проходящую через M_0 :

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= f[x(t), y(t)]; \\ x_t^2 + y_t^2 &\neq 0, & x(t_0) &= x_0, & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Вектор с компонентами

$$\begin{aligned} ds &= x_t dt, & dy &= y_t dt, \\ dz &= (f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t) dt = f_x dx + f_y dy \end{aligned} \quad (15)$$

(где $dt \neq 0$) направлен по касательной к линии (14). Очевидно, что при $t = t_0$ вектор (15) компланарен плоскости (2). Это значит, что касательная прямая, проведенная в точке M_0 к линии (14), содержится в касательной плоскости Π , проведенной в этой точке к поверхности S (рис. 8).

Ясно вместе с тем, что любая прямая в плоскости Π , проходящая через M_0 , является касательной к некоторой линии вида (14). Именно, в качестве (14) можно взять линию пересечения поверхности S с плоскостью, которая проходит через выбранную прямую параллельно оси z (рис. 9).

Теперь мы можем сформулировать

Определение 3. *Касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0* называется плоскость, состоящая из касательных прямых, проведенных в этой точке ко всевозможным гладким кривым на S .

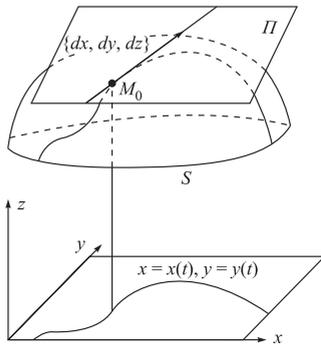


Рис. 8

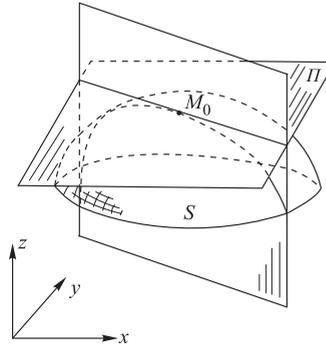


Рис. 9

Непосредственно из определения 3 вытекает следующий способ построения касательной плоскости: на поверхности S через точку M_0 нужно провести какие-нибудь две гладкие кривые с различными касательными и взять плоскость, проходящую через эти касательные.

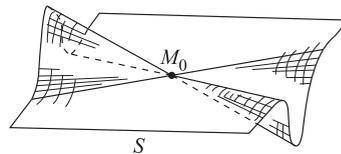


Рис. 10

9°. Замечание. В определении 3 существенна дифференцируемость функции $f(x, y)$. Если функция $z = f(x, y)$ не дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то может случиться, что множество касательных прямых к линиям, проведенным на S через M_0 , не пусто, но объединение этих прямых вовсе не является плоскостью. Так, например, на рис. 10 показана коническая поверхность S с вершиной M_0 , обладающая следующим свойством: совокупность касательных к гладким кривым, проходящим на S через M_0 , совпадает с самой поверхностью S .

Для читателя, незнакомого с общим понятием конической поверхности, отметим, что понятие это изложено ниже в виде примера 8 в п. 3° § 6.

§ 2. Нормаль. Гауссово сферическое отображение

1°. Определение. *Нормалью к поверхности S в точке M* называется прямая, проходящая через точку M перпендикулярно касательной плоскости.

Единичный вектор нормали будем в дальнейшем обозначать через \vec{n} . Из уравнения (2) § 1 находим

$$\vec{n} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \{-z_x, -z_y, 1\}. \quad (1)$$

Если перед радикалом в формуле (1) взять плюс, то получится орт нормали, направленный в сторону возрастающих значений z (рис. 11).

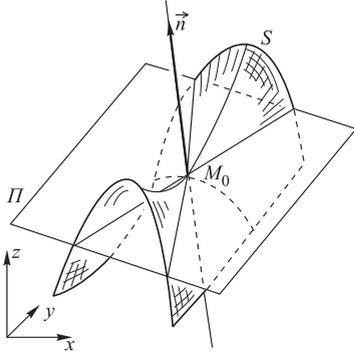


Рис. 11

При этом сферу \mathcal{G} часто называют *гауссовой сферой*, а множество S^* , состоящее из образов всех точек поверхности S , называют *сферическим образом* рассматриваемой поверхности.

Нужно иметь в виду, что разным точкам поверхности S может соответствовать одна и та же точка на \mathcal{G} . В такой ситуации иногда считают, что сферический образ S^* в несколько слоев покрывает некоторые части гауссовой сферы.

3*. Хорошо видно, что чем больше искривленность поверхности (или какой-либо ее части), тем сильнее при смещении по поверхности

2*. Для каждой точки M поверхности S построим орт нормали \vec{n} . Зафиксируем в пространстве какую-нибудь точку O и построим вектор $\vec{OM}^* = \vec{n}$. Его конец M^* окажется на поверхности сферы \mathcal{G} с центром O и единичным радиусом (рис. 12).

Таким образом получается отображение, которое каждой точке M поверхности S ставит в соответствие точку M^* на единичной сфере \mathcal{G} . Оно называется *гауссовым сферическим отображением* данной поверхности.

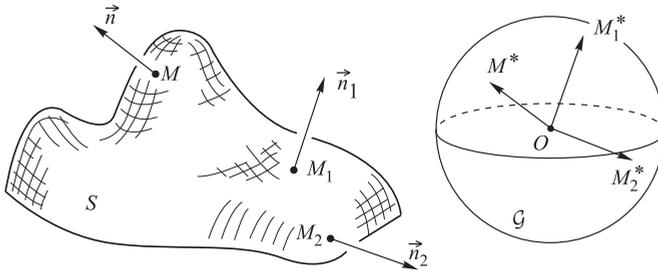


Рис. 12

меняется направление ее нормалей. Поэтому сферическое отображение помогает изучать искривленность поверхности.

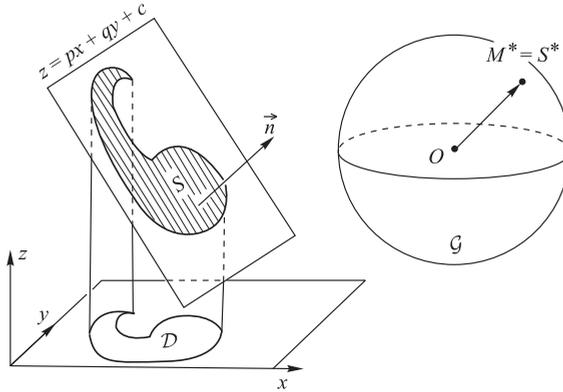


Рис. 13

В качестве примера рассмотрим частный случай. Будем называть поверхность S *плоской*, если она целиком расположена на какой-либо плоскости (рис. 13). Докажем, что справедлива

Теорема. Для того чтобы поверхность была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее сферический образ состоял из одной точки.

Замечание. Здесь, как и выше, мы считаем, что поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, причем функции f , f_x и f_y определены и непрерывны в некоторой области \mathcal{D} плоскости (x, y) .

Доказательство теоремы. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Сначала предположим, что \mathcal{D} — выпуклая область. Пусть $S^* = M^*$. Это значит, что

$$f_x = p = \text{const}, \quad f_y = q = \text{const}. \quad (2)$$

Интегрируя (2), находим

$$f(x, y) = px + \varphi_1(y) = qy + \varphi_2(x), \quad (3)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ — некоторые функции одного аргумента. Из (3) следует, что всюду в \mathcal{D}

$$\varphi_1(y) - qy = \varphi_2(x) - px. \quad (4)$$

По лемме Фурье (см., напр., [113]) это возможно лишь тогда, когда правая и левая части равенства (4) являются постоянными, т. е.

$$\varphi_1(y) - qy = \varphi_2(x) - px = c = \text{const.}$$

Следовательно,

$$f(x, y) = px + qy + c. \quad (5)$$

Пусть теперь \mathcal{D} — произвольная область. Тогда у каждой точки из \mathcal{D} найдется круговая окрестность, в которой соблюдается равенство вида (5). При этом коэффициенты p и q однозначно определяются из (1) и (2), а свободный член c не может быть различным для разных точек области \mathcal{D} вследствие непрерывности $f(x, y)$. Поверхность (5) представляет собой кусок некоторой плоскости, проекция которого совпадает с областью \mathcal{D} (см. рис. 13). Геометрически очевидно, что эта плоскость перпендикулярна вектору \vec{OM}^* . Теорема доказана.

§ 3. Площадь поверхности

1°. Напомним, что на плоскости в основу измерения площадей кладется понятие площади прямоугольника, исходя из которого при помощи предельного перехода определяется площадь любой квадратируемой фигуры.

Понятие площади поверхности также определяется при помощи предельного перехода. Мы будем считать известным понятие площади для плоских фигур и будем на него опираться, определяя площадь поверхности.

Сначала мы обсудим способ приближенного нахождения площади поверхности, не определяя точно это понятие, а руководствуясь лишь наглядными соображениями. Затем сформулируем определение и выведем формулу для вычисления.

Площадь будем обозначать буквой σ (например, $\sigma(A)$ — площадь некоторой геометрической фигуры A).

2°. Пусть дана область \mathcal{D} на плоскости (x, y) , имеющая кусочно-гладкую границу Γ , и пусть задана функция $f(x, y)$, непрерывная вместе с частными производными f_x и f_y в замкнутой области $\mathcal{D} \cup \Gamma$.

Замечание. Здесь и в дальнейшем гладкие линии считаются частным случаем кусочно-гладких.

Рассмотрим поверхность S , заданную уравнением

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

Определим, что такое ее площадь, и вычислим $\sigma(S)$.

3°. **Предварительные соображения.** Пусть U — кусок поверхности S , содержащий некоторую зафиксированную точку M и ограниченный кусочно-гладкой кривой. Символом $\text{diam } U$ обозначим диаметр U (как множества точек в \mathbb{R}^3), т. е. верхнюю грань (\sup) расстояний между

точками множества U . Пусть далее U' — проекция в направлении оси z области U на касательную плоскость Π , проведенную в точке M (рис. 14).

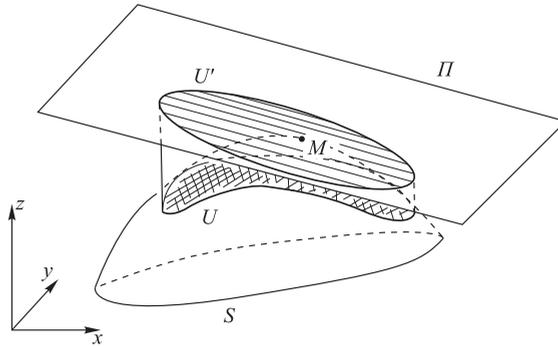


Рис. 14

Будем считать, что область U — переменная и что она стягивается к точке M ($\text{diam } U \rightarrow 0$). Тогда уклонение точек области U от плоскости Π является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\text{diam } U$; кроме того, касательные плоскости к S в точках области U стремятся к плоскости Π . Таким образом, стягиваясь к точке M , область U «уплощается», различие между ней и ее проекцией U' становится все меньше и меньше (как в смысле расположения в пространстве, так и с точки зрения направлений касательных плоскостей).

Естественно считать поэтому, что

$$\sigma(U) \approx \sigma(U'), \quad (2)$$

причем точность равенства (2) возрастает, когда $U \rightarrow M$. Иначе говоря,

$$\sigma(U) = \sigma(U') \cdot (1 + \xi), \quad (3)$$

где ξ — относительная погрешность приближенного равенства (2),

$$\xi \rightarrow 0, \quad \text{если } \text{diam } U \rightarrow 0. \quad (4)$$

Любое конкретное измерение площади является приближенным. Если область U достаточно мала, то погрешностью ξ можно пренебречь и считать, что $\sigma(U) = \sigma(U')$.

На практике так и поступают. Например, измеряя площади небольших земельных участков на равнинной местности, считают, что поверхность Земли — плоская, а шарообразность Земли пренебрегают. По существу это означает, что измерения ведутся в касательной плоскости к поверхности земного шара и что малая часть этой поверхности совпадает (в пределах точности измерений) с куском касательной плоскости.

Далее естественно предположить, что площадь поверхности аддитивна, и для приближенного измерения площадей больших областей на искривленных поверхностях можно разбить их на мелкие части, в каждой из которых поверхность можно заменить касательной плоскостью, а затем суммировать площади кусков. Для получения точной математической формулировки нужно использовать операцию предельного перехода.

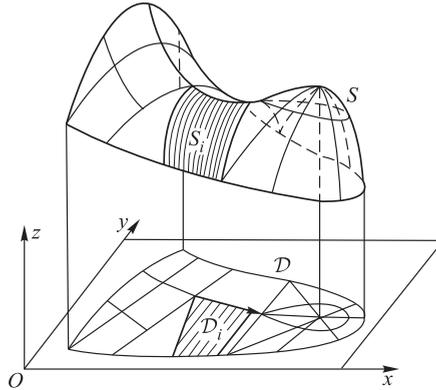


Рис. 15

Пусть область \mathcal{D} на плоскости (x, y) разбита кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$. Тогда поверхность S тоже разобьется на части, которые мы обозначим S_1, \dots, S_m , считая, что S_i проектируется на \mathcal{D}_i (рис. 15). Аддитивность площади, о которой речь шла выше, выражается равенством

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^m \sigma(S_i). \quad (5)$$

Подчеркнем еще раз, что обе части равенства (5) написаны нами условно, поскольку еще не определено, что такое площадь поверхности или ее части.

В каждом из участков S_i выберем какую-нибудь точку M_i , проведем в ней касательную плоскость Π_i и построим проекцию S'_i области S_i на плоскость Π_i в направлении оси z (рис. 16).

Аналогично (3) напомним:

$$\sigma(S_i) = \sigma(S'_i) \cdot (1 + \xi_i). \quad (6)$$

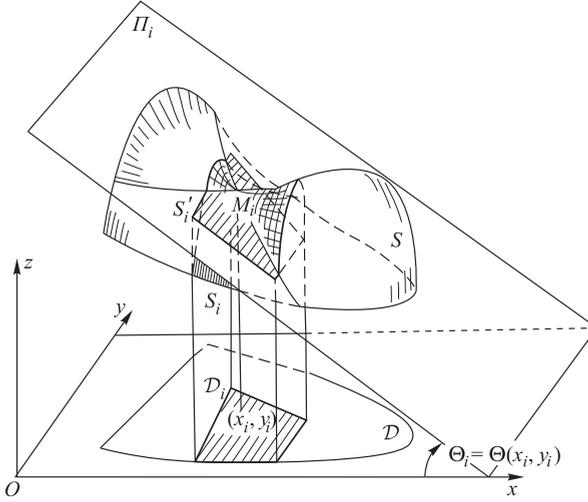


Рис. 16

Подставив выражение (6) в правую часть равенства (5), получим

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) \cdot (1 + \xi_i) = \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) + \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \sigma(S'_i). \quad (7)$$

Пусть теперь

$$\delta = \max(\text{diam } \mathcal{D}_i) \rightarrow 0$$

(разбиение измельчается, число частей неограниченно растет, $m \rightarrow \infty$). Тогда $\max(\text{diam } S_i) \rightarrow 0$. Предположим, что величины ξ_i в равенствах вида (6) стремятся к нулю равномерно, т. е.

$$\max |\xi_i| \rightarrow 0, \quad \text{если } \delta \rightarrow 0. \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что требование (8) сильнее, чем требование (4). Из (7) и (8) следует, что

$$\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \sigma(S'_i) \rightarrow 0 \quad (9)$$

и что

$$\sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) \rightarrow \sigma(S). \quad (10)$$

Поясним подробнее, как получают соотношения (9) и (10). Обозначим через $\theta(x, y)$ двугранный угол между плоскостью (x, y) и

касательной плоскостью к поверхности S в точке $(x, y, z(x, y))$. Из формулы (1) §2 находим

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}. \quad (11)$$

В замкнутой области $\mathcal{D} \cup \Gamma$ производные z_x и z_y непрерывны, поэтому существует число $c \geq 1$ такое, что

$$1 \leq \frac{1}{\cos \theta(x, y)} \leq c \quad (12)$$

в $\mathcal{D} \cup \Gamma$. Заметим, что

$$\sigma(S'_i) = \frac{\sigma(\mathcal{D}_i)}{\cos \theta(x_i, y_i)} = \frac{\sigma(\mathcal{D}_i)}{\cos \theta_i}, \quad (13)$$

где x_i и y_i — абсцисса и ордината точки M_i , $\theta_i = \theta(x_i, y_i)$ (см. рис. 16). Используя (12), (13) и (8), проводим оценку:

$$\left| \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \sigma(S'_i) \right| \leq c \cdot \max |\xi_i| \cdot \sum_{i=1}^m \sigma(\mathcal{D}_i) = c \cdot \max |\xi_i| \cdot \sigma(\mathcal{D}) \rightarrow 0.$$

Итак, (9) установлено. Если заранее предполагается, что $\sigma(S)$ — некоторое число, то из (7) и (9) следует (10).

Подведем итог. Мы предполагали, что:

- 1) площадь поверхности существует и аддитивна (см. (5));
- 2) локально можно заменить поверхность ее касательной плоскостью (см. (2)–(4));
- 3) погрешность такой замены мала, если мал измеряемый участок, причем зависит она от диаметра измеряемого участка поверхности, но не зависит от его расположения на поверхности (см. (8)).

Из этих гипотез *вытекает* соотношение (10), которое выражает искомую площадь $\sigma(S)$ через площади вспомогательных плоских фигур.

4°. Учитывая изложенные выше соображения и используя обозначения предыдущего пункта, сформулируем

Определение. *Площадью поверхности S* называется предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) = \sigma(S). \quad (14)$$

5°. Теперь нужно доказать, что предел (14) действительно существует. Попутно мы получим формулу для вычисления площади поверхности, заданной уравнением вида (1).

Используя (11) и (13) и учитывая непрерывность функций z_x и z_y , находим

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma(\mathcal{D}_i)}{\cos \theta_i} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sqrt{1 + z_x^2(x_i, y_i) + z_y^2(x_i, y_i)} \cdot \sigma(\mathcal{D}_i) = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy. \quad (15) \end{aligned}$$

Итак, площадь поверхности S существует и выражается формулой

$$\sigma(S) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy. \quad (16)$$

Выкладки (15) показывают, что предел (14) не зависит от выбора последовательности измельчающихся разбиений области \mathcal{D} и от выбора точек M_i ($M_i \in S_i$).

6°. Замечания. 1). Нужно доказать еще, что $\sigma(S)$ не зависит от выбора координат (x, y, z) в \mathbb{R}^3 . Это будет сделано ниже, в § 9.

2). Иногда формулу (16) принимают за определение площади поверхности, заданной уравнением вида (1).

3). Можно дать другие эквивалентные определения площади поверхности. Прежде всего, в выражении (14) вместо S'_i можно брать *ортогональные* проекции областей S_i на плоскости Π_i . Кроме того, можно определить $\sigma(S)$ как предел последовательности площадей *многогранников*, равномерно сходящихся к S при условии, что направления граней этих многогранников равномерно стремятся к направлениям касательных плоскостей поверхности S (см. [119], гл. 17). Наконец, имеется способ определения площади, основанный на измерении *длин линий* на поверхности. Он опирается на аналогию с геодезическими измерениями и основан на построении *триангуляций*, т. е. разбиений на треугольники. Их стороны (вообще говоря, криволинейные) должны быть кратчайшими — как бы туго натянутыми по поверхности «ниточками». Для каждого из треугольников триангуляции по длинам трех его сторон строится «обычный» треугольник на евклидовой плоскости. Их площади складываются. Затем берется предел суммы при неограниченном измельчении триангуляции. В геодезии так и поступают, с той лишь разницей, что вместо предела берут сумму площадей конечного числа «достаточно мелких» треугольников. Несмотря на наглядную простоту этого подхода, на пути его обоснования пришлось преодолеть серьезные математические трудности. Это было сделано начиная с середины XX столетия в работах академика А. Д. Александрова [2, 4] и математиков его научной школы [5, 101, 102, 122]).

4). Обсуждением эквивалентности упомянутых здесь определений мы заниматься не будем.

§ 4. Кривизна нормальных сечений и классификация точек поверхности

1°. Займемся теперь локальным строением поверхности. Один из путей изучения формы поверхности состоит в исследовании линий ее пересечения с различными плоскостями.

Определение. *Нормальным сечением поверхности S в некоторой точке M называется линия пересечения поверхности с произвольной плоскостью, проходящей через нормаль в точке M .*

Для того чтобы составить себе наглядное представление о форме поверхности вблизи выбранной точки, рассмотрим в этой точке всевозможные нормальные сечения. При этом на поверхность S будут наложены дополнительные ограничения. Прежде всего, потребуем более высокой регулярности функции $z(x, y)$. Кроме того, мы будем предполагать, что поверхность специальным образом расположена относительно системы координат в \mathbb{R}^3 .

2°. Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, причем функция $z(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ и удовлетворяет условиям:

$$z(0, 0) = z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = z_{xy}(0, 0) = 0. \quad (1)$$

Таким образом, мы предполагаем, что точка $O(0, 0, 0)$ принадлежит поверхности, плоскость $z = 0$ является касательной плоскостью в точке O . Равенство $z_{xy}(0, 0) = 0$ обеспечивается поворотом системы координат (x, y, z) вокруг оси z (в связи с этим см. ниже § 10, пп. 9°, 10*).

Введем обозначения:

$$z_{xx}(0, 0) = k_1, \quad z_{yy}(0, 0) = k_2. \quad (2)$$

Через ось z проведем плоскость

$$x = t \cos \varphi, \quad y = t \sin \varphi, \quad (3)$$

где t — параметр, $-\infty < t < +\infty$, φ — угол между плоскостью (3) и осью x (рис. 17). В результате получим нормальное сечение поверхности S , которое в плоскости (t, z) имеет уравнение

$$z = z(t \cos \varphi, t \sin \varphi), \quad (4)$$

причем $t = 0$ в точке O .

Пусть k — кривизна нормального сечения (4) в точке O , взятая со знаком «плюс», если линия (4) обращена выпуклостью в сторону

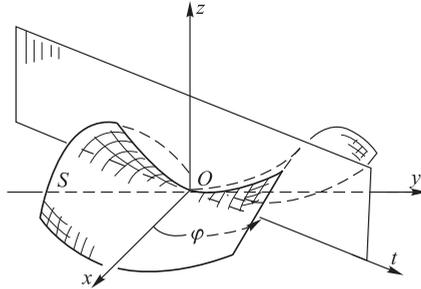


Рис. 17

отрицательных значений z (как на рис. 17), и со знаком «минус», если выпуклость обращена в сторону положительных значений z . Тогда

$$k = \frac{z_{tt}}{(1 + z_t^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Используя (1)–(4), находим для точки O

$$\begin{aligned} z_t &= z_x \cos \varphi + z_y \sin \varphi = 0, \\ z_{tt} &= z_{xx} \cos^2 \varphi + 2z_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + z_{yy} \sin^2 \varphi = \\ &= k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (6)$$

Равенство (6) называется *формулой Эйлера*.

3°. Будем теперь считать угол φ переменным, $k = k(\varphi)$. Рассмотрим следствия из формулы Эйлера.

1). $k(\varphi + \pi) = k(\varphi)$ (это ясно и из геометрических соображений, поскольку углам φ и $\varphi + \pi$ соответствует одно и то же нормальное сечение).

2). $k_1 = k(0)$, $k_2 = k(\frac{\pi}{2})$.

3). Если $k_1 = k_2$, то $k(\varphi) = \text{const} = k_1$.

4). Если $k_1 \neq k_2$, то k_1 и k_2 представляют собой экстремальные значения $k(\varphi)$; их называют *главными кривизнами поверхности* (1) *в точке O*. Так, например,

$$\text{если } k_1 < k_2, \text{ то } k_1 < k(\varphi) < k_2 \text{ при } \varphi \neq \frac{m\pi}{2}, \quad (7)$$

где m — любое целое число. В самом деле,

$$k(\varphi) = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \varphi,$$

откуда следует (7).

5). При $k_1 \neq k_2$ направления, дающие минимум и максимум $k(\varphi)$, взаимно ортогональны.

4°. Те направления, в которых кривизна нормального сечения $k(\varphi)$ имеет экстремальные значения, называют *главными направлениями* в точке O .

При соблюдении условий (1) главными являются направления координатных осей Ox и Oy . Если при этом $k_1 = k_2$, то любое направление в точке O считается главным.

5°. Поверхность

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \quad (8)$$

называется *соприкасающимся параболоидом* поверхности S в точке O . Поверхность (8) фактически может быть параболоидом (эллиптическим или гиперболическим), параболическим цилиндром или плоскостью.

Нетрудно проверить, что для каждого фиксированного φ кривизна нормального сечения соприкасающегося параболоида в точке O равна $k(\varphi)$.

Далее, разложив функцию $z(x, y)$ по формуле Тейлора и учитывая (1) и (2), получим

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + o(x^2 + y^2). \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), мы видим, что уклонение произвольной точки $M \in S$ от соприкасающегося параболоида (измеренное в направлении оси z) является при $M \rightarrow O$ бесконечно малой более высокого порядка, чем *квадрат* расстояния OM (рис. 18).

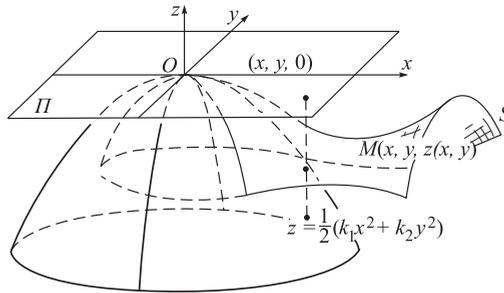


Рис. 18

6°. Проведем плоскости $z = \pm \frac{1}{2}$. Рассмотрим проекцию на плоскость $z = 0$ линий пересечения плоскостей $z = \pm \frac{1}{2}$ с соприкасающимся параболоидом. Получим линию (точнее, некоторую совокупность линий)

$$k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1. \quad (10)$$

Совокупность линий, задаваемых уравнениями (10), называется *индикатрисой Дюпена* поверхности S в точке O .

Если на плоскости $z = 0$ ввести полярные координаты (ρ, φ) по обычным формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (10a)$$

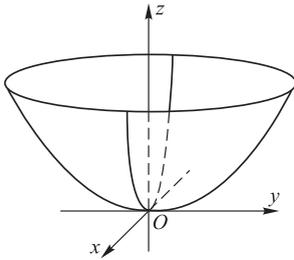
то уравнение индикатрисы Дюпена примет вид

$$\rho^2 k(\varphi) = \pm 1, \quad (11)$$

так что на ней $\rho = \frac{1}{\sqrt{|k(\varphi)|}}$ (см. ниже рис. 21, 24 и 26).

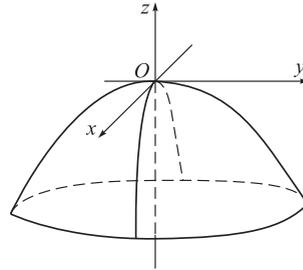
7°. **Типы точек поверхности.** В зависимости от знаков k_1 и k_2 могут появиться следующие случаи.

1). $k_1 k_2 > 0$. Точка O называется *эллиптической*. Соприкасающийся параболоид является эллиптическим параболоидом (рисунки 19, 20), а индикатриса Дюпена — эллипсом (рис. 21).



$$k_1 > 0, k_2 > 0$$

Рис. 19



$$k_1 < 0, k_2 < 0$$

Рис. 20

1 а). $k_1 k_2 > 0, k_1 = k_2 = k$. Точка O называется *шаровой*. Соприкасающийся параболоид является параболоидом вращения, индикатриса Дюпена — окружностью. В шаровой точке кривизна всех нормальных сечений одинакова и совпадает с кривизной нормальных сечений сферы

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (12)$$

(см. рис. 22). Нетрудно проверить, что в этом частном случае уклонение текущей точки M поверхности S от сферы (12) (измеренное в направлении оси z или в направлении радиуса этой сферы) имеет порядок $o(OM^2)$, когда $OM \rightarrow 0$. Сферу (12) называют *соприкасающейся сферой поверхности S* в шаровой точке O .

2). $k_1 k_2 < 0$. Точка O называется *гиперболической*. Соприкасающийся параболоид является гиперболическим (рис. 23), индикатриса Дюпена состоит из двух сопряженных гипербол (рис. 24).

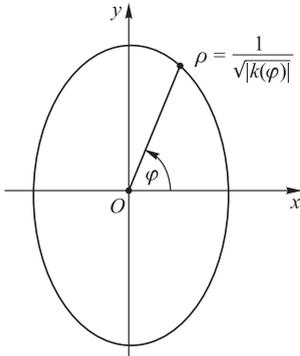


Рис. 21

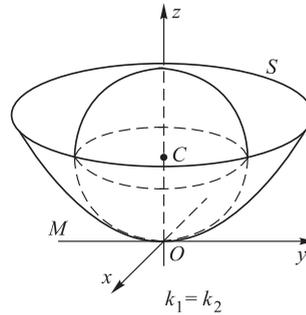


Рис. 22

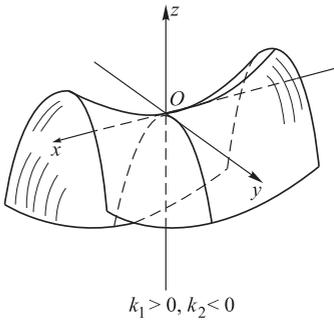


Рис. 23

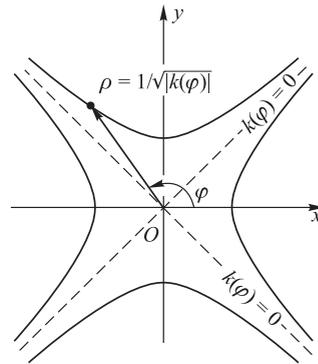


Рис. 24

3). $k_1 k_2 = 0$, но $k_1 \neq 0$ или $k_2 \neq 0$. Точка O называется *параболической*. Соприкасающийся параболоид является параболическим цилиндром (см. рис. 25, на котором $k_1 = 0$, $k_2 < 0$). Индикатриса Дюпена состоит из двух параллельных прямых (рис. 26).

4). $k_1 = k_2 = 0$. Точка O называется *точкой уплощения*. Индикатриса Дюпена не определена, соприкасающийся параболоид совпадает с касательной плоскостью $z = 0$. В случае точки уплощения разложение (9) принимает вид $z = o(x^2 + y^2)$.

Замечание. Точки уплощения часто относят к параболическим точкам, считая параболическими все те точки, где $K = 0$. Расположение поверхности относительно касательной плоскости в окрестности точки уплощения может быть весьма разнообразным. Два частных случая изображены на рисунках 27–28.

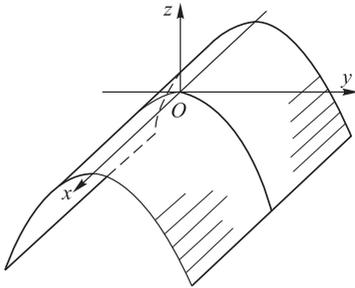


Рис. 25

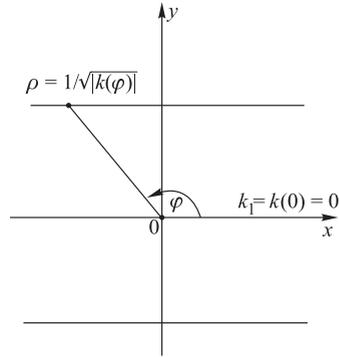


Рис. 26

8°. Величина $K = k_1 k_2$ называется *гауссовой кривизной*, а величина $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ называется *средней кривизной* поверхности S в точке O .

Название «средняя кривизна» связано с тем, что H представляет собой среднее значение кривизны нормальных сечений:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi. \quad (13)$$

Равенство (13) следует из формулы Эйлера.

9°. Эллиптическая точка характеризуется тем, что $K > 0$, гиперболическая — тем, что $K < 0$. Параболическая точка характеризуется условиями $K = 0$, $H \neq 0$; точка уплощения — условиями $K = 0$, $H = 0$; шаровая точка — условиями $K > 0$, $H^2 = K$.

Шаровые точки и точки уплощения иногда объединяются под названием *омбилических точек* ($K = H^2$, $k(\varphi) = \text{const}$).

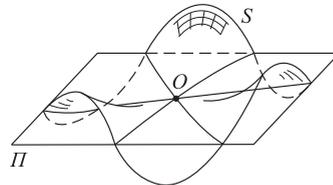


Рис. 27

10°. Направления, по которым $k(\varphi) = 0$, называют *асимптотическими направлениями*. Прямая, проходящая на плоскости (x, y) в асимптотическом направлении, не пересекает индикатрису Дюпена. В эллиптической точке нет асимптотических направлений; в параболической точке имеется одно асимптотическое направление (см. рис. 26); в гиперболической точке их два (рис. 24) и они совпадают с направлениями асимптот индикатрису Дюпена. В точке уплощения любое направление является асимптотическим.

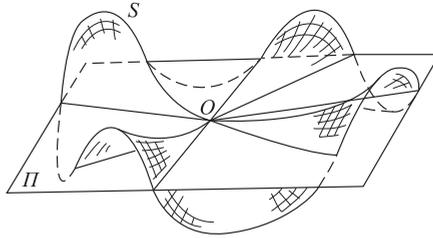


Рис. 28

11*. По знаку гауссовой кривизны K естественно выделяются три класса поверхностей, каждый из которых был предметом специальных исследований геометров:

1) $K > 0$. Теория поверхностей положительной кривизны активно разрабатывалась в XX в. [2, 61, 92] и нашла важные приложения в механике — в теории тонких оболочек [26, 36, 93, 94], а также в теории уравнений с частными производными [14, 80] и [92, гл. VIII].

2) $K = 0$. О поверхностях нулевой кривизны подробнее см. ниже, § 13*, а также [31, 56, 99] и [64].

3) $K < 0$. Локальное строение поверхностей отрицательной кривизны и отдельные классы таких поверхностей давно начали изучаться геометрами, см. например, [56, 118, 126]. Принципиально важный шаг в исследовании поверхностей постоянной отрицательной кривизны в целом в самом начале XX в. был сделан Д. Гильбертом [34]: он доказал, что если $K = -a^2$ с постоянным $a \neq 0$ на всей C^n -гладкой поверхности (см. ниже, § 6, п. 1° и § 15) при достаточно большом n (в его рассуждениях фактически использовалось $n \geq 5$), то у поверхности обязательно есть край (определение края см. п. 11* в § 15).

Н. В. Ефимов обобщил результаты Д. Гильберта на поверхности переменной кривизны $K < 0$ [48, 49]. Для этого потребовалась разработка новых подходов, так как поверхность отрицательной кривизны, рассматриваемая в целом, может быть устроена гораздо сложнее, чем поверхности нулевой или положительной кривизны. С дальнейшим развитием этой проблематики можно познакомиться в обзорах [25] и [105] и в указанной там литературе. Результаты, полученные при изучении поверхностей отрицательной кривизны, и развитие при этом методы тоже нашли приложения в теории нелинейных уравнений с частными производными (подробнее см. [95]), однако в этом направлении, по-видимому, сделаны лишь первые шаги.