Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс

ТЕОРИЯ ИГР

Л. А. Петросян
Н. А. Зенкевич
Е. В. Шевкопляс

Теория игр

2-е издание

Рекомендовано УМО в области инновационных междисциплинарных образовательных программ в качестве учебника по направлению 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2012

УДК 512.8(075.8)
ББК 22.14+22.19я73
П30

Петросян, Л. А.

П30 Теория игр: учебник / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012 — 432 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0484-3

Учебник предназначен как для первоначального, так и для углубленного изучения теории игр. Проведено систематическое исследование математических моделей принятия решений несколькими сторонами в условиях конфликта. Представлено последовательное изложение единой теории статических и динамических игр. Рассмотрены все основные классы игр: конечные и бесконечные антагонистические игры, бескоалиционные и кооперативные игры, многошаговые и дифференциальные игры. Для закрепления материала в каждой главе содержатся задачи и упражнения разной степени сложности.

Во втором издании расширены разделы, касающиеся статической теории кооперативных решений и динамических кооперативных игр, а также игр с неполной информацией. Уточнены и изменены доказательства отдельных утверждений. Применен новый единый подход к исследованию оптимального поведения игроков в позиционных и дифференциальных играх.

Для студентов и аспирантов математических, экономических, управленческих и технических направлений и специальностей

УДК 512.8(075.8)
ББК 22.14+22.19я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Екатерины Шевкопляс*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:
Н. Н. Петров, д-р физ.-мат. наук, проф., завкафедрой исследования операций СПбГУ;
А. Ю. Гарнаев, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры компьютерного моделирования и микропроцессорных систем СпбГУ.

Подписано в печать 30.09.11.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 34,83.
Тираж 1200 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0484-3

Оглавление

Предисловие

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т. е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. Теорию математических моделей принятия оптимальных решений принято называть исследованием операций, поэтому теорию игр следует рассматривать как прикладную математическую теорию — составную часть исследования операций.

Несмотря на наличие богатой монографической и специальной литературы по теории игр, учебников, покрывающих этот раздел математики, сравнительно немного и в них рассматриваются в основном отдельные разделы теории игр. Настоящий учебник восполняет этот пробел и является существенным развитием книги Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. «Теория игр», М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998, в которой впервые в отечественной литературе было дано систематическое изложение единой теории статических и динамических игр. В новой книге изложение динамических игр распространено на случай кооперативных дифференциальных игр, существенно расширены разделы, касающиеся статической теории кооперативных решений и динамических кооперативных игр, а также игр с неполной информацией. Уточнены и изменены доказательства отдельных утверждений. Здесь впервые в отечественной учебной литературе используется единый подход к исследованию оптимального поведения игроков в позиционных играх, основанный на концепции динамической устойчивости (состоятельности во времени) решений неантагонистических игр, а также свойствах сильной динамической устойчивости, динамической совместимости, согласованности и других динамических характеристиках состоятельности различных оптимальных решений. На базе изложенного подхода приведено систематическое изложение бескоалиционных, коалиционных и кооперативных принципов оптимальности в различных классах позиционных игр.

В учебнике отражено большинство актуальных направлений современной теории игр. Он методически построен так, что понятие модели конфликта (игры) развивается от простой (матричные игры) до наиболее сложной (дифференциальные игры). Большинство университетских учебных программ предполагает чтение отдельных разделов или специальных курсов по теории игр. Данный учебник построен таким образом, чтобы каждая глава могла служить основой такого курса. Для предварительного ознакомления с теорией игр достаточно изучить материал гл. 1. Типовой курс по теории игр может быть построен на основе гл. 1, 3 и 4. В учебнике полно изложены теории антагонистических игр (гл. 1, 2, 4, 5), неантагонистических игр (гл. 3, 4, 6) и кооперативных игр (3, 4, 7, 8). В учебных дисциплинах «Системный анализ» и «Модели принятия решений» целесообразно использовать гл. 3 и 4. При построении курса лекций полезно также воспользоваться приведенным списком специальной литературы.

Во всех главах приводятся многочисленные примеры, иллюстрирующие основные положения теории. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес. В конце каждой главы приведены упражнения для индивидуальной работы, расположенные в порядке изложения материала и возрастания сложности. В ряде случаев они существенно дополняют содержание главы. Систематическое решение этих упражнений является важной формой изучения теории игр. Для усвоения основных понятий и результатов, приведенных в учебнике, достаточно знания курса математики в объеме университетской программы. Наиболее сложными в математическом отношении являются главы 2 и 5, которые предназначены для студентов математических специальностей.

В списке рекомендованной литературы приведены основная (основные учебники и задачники), дополнительная (монографии и учебные пособия) и специальная (статьи, справочники, обзоры, сборники статей) литература. В список дополнительной литературы включены также статьи, которые цитируются в основном тексте. Вместе с тем библиография не претендует на полноту.

Учебник может быть использован как для первоначального, так и для углубленного изучения теории игр. Он предназначен для студентов и аспирантов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» и специализирующихся в области исследования операций, системного анализа, методов оптимизации, математической кибернетики, математического моделирования, будет также полезен студентам и аспирантам экономических, управленческих и технических направлений, изучающим математические методы принятия решений в сложных системах управления. Книга заинтересует специалистов, развивающих теорию игр, исследование операций, теорию управления, математическую экономику, теорию менеджмента и их приложения.

Учебник написан на основе курсов «Теория игр и исследование операций», «Системный анализ», «Математические модели принятия решений в экономике и управлении», «Исследование систем управления», а также ряда специальных курсов по разделам и приложениям теории игр, прочитанных Л. А. Петросяном, Н. А. Зенкевичем и Е. В. Шевкопляс студентам старших курсов и аспирантам на факультете прикладной математики — процессов управления (ПМ-ПУ) и в Высшей школе менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета.

Благодарности. Параграфы 7, 9 гл. 1, § 5, 10 гл. 3, § 4–6, 8 и 9 гл. 4, § 2–6, 8 гл. 5 написаны совместно с Е. А. Семиной, за что авторы выражают Елене Александровне искреннюю признательность.

Мы благодарим Е. М. Парилину, А. А. Седакова, С. Ю. Костюнина и В. А. Клемешева, а также студентов и аспирантов кафедры математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета за помощь при подготовке рукописи.

Выражаем особую благодарность Н. Н. Петрову и Н. И. Наумовой за ценные замечания и предложения.

Авторы

Введение

В.1. Математическая теория игр является составной частью исследования операций. Она находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких, как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т. д. В настоящем учебнике изложены основные понятия и результаты теории игр.

В.2. Задачи исследования операций можно классифицировать по уровню информации о ситуации, которой располагает субъект, принимающий решение. Наиболее простыми уровнями информации о ситуации являются детерминированный (когда условия, в которых принимаются решения, известны полностью) и стохастический (когда известно множество возможных вариантов условий и их вероятностное распределение). В этих случаях задача сводится к нахождению экстремума функции (или ее математического ожидания) при заданных ограничениях. Методы решения таких задач изучаются в курсах математического программирования или методов оптимизации.

Наконец, третий уровень — неопределенный, когда известно множество возможных вариантов, но без какой-либо информации об их вероятностях. Такой уровень информации о ситуации является наиболее сложным. Эта сложность оказывается принципиальной, так как могут быть не ясны сами принципы оптимального поведения. Следуя определению Н.Н. Воробьева, теория игр — это теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект («игрок») располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений («стратегий»), которые он может принять, и о количественной мере того «выигрыша», который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений и составляют содержание теории игр.

В.3. Неопределенность, с которой мы встречаемся в теории игр, может иметь различное происхождение. Однако, как правило, она является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы. В связи с этим под теорией игр часто понимают теорию математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Таким образом, моделями теории игр можно в принципе содержательно описывать весьма разнообразные явления: экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическую борьбу за существование и т. д. Все такие модели в теории игр принято называть играми.

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.

В.4. Игры можно классифицировать по различным признакам. Во-первых, бескоалиционные игры, в которых каждая коалиция (множество игроков, действующих совместно) состоит лишь из одного игрока. Так называемая кооперативная теория бескоалиционных игр допускает временные объединения игроков в коалиции в процессе игры с последующим разделением полученного выигрыша или принятия совместных решений. Во-вторых, коалиционные игры, в которых принимающие решения игроки согласно правилам игры объединены в фиксированные коалиции. Члены одной коалиции могут свободно обмениваться информацией и принимать полностью согласованные решения.

По выигрышу игры можно разделить на антагонистические и игры с ненулевой суммой.

По характеру получения информации — на игры в нормальной форме (игроки получают всю предназначенную им информацию до начала игры) и динамические игры (информация поступает игрокам в процессе развития игры).

По количеству стратегий — на конечные и бесконечные игры.

В.5. Учебник состоит из восьми глав. Первая глава содержит основные сведения из теории конечных антагонистических (матричных) игр. Здесь доказывается теорема существования ситуации равновесия в классе смешанных стратегий, выводятся свойства оптимальных смешанных стратегий, приведены методы решения матричных игр. Хотя антагонистический конфликт является очень специальным случаем конфликта, возникающего в конкретных сферах приложений, тем не менее, в первой главе приводятся многочисленные примеры задач поиска и преследования, которые моделируются матричными играми.

Во второй главе рассматриваются бесконечные антагонистические игры или игры с бесконечным числом стратегий у каждого из игроков. Здесь теоремы существования ситуаций равновесия справедливы далеко не во всех случаях. К важным условиям существования относятся свойства функции выигрыша. В главе приводится доказательство существования ситуации равновесия в смешанных стратегиях, когда функция выигрыша является непрерывной. Однако существует достаточно большое число классов игр, для которых это обстоятельство не имеет места, но равновесие, тем не менее, существует. К играм такого типа относятся дуэли и покер. Рассмотрение игр типа покера интересно еще и тем, что позволяет обосновать стратегию «блефа», часто встречающуюся на практике. В главе рассмотрены также приложения к задачам поиска и преследования.

Третья глава посвящена статическим неантагонистическим играм. В качестве принципа оптимальности в таких моделях обычно используется равновесие по Нэшу. Приводится доказательство существования равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в играх с конечным числом стратегий, исследуются свойства равновесий и приводятся некоторые модификации равновесия по Нэшу. Исследуются и другие принципы оптимальности, такие, как решения оптимальные по Парето и арбитражные схемы. В связи с серьезными приложениями в биологии и экономике, даются определение и свойства эволюционно-устойчивых стратегий. В последнее время возродился интерес к использованию коррелированных действий в неантагонистических играх. В этой связи в главу включен материал о равновесиях в совместных смешанных стратегиях. Вторая половина главы посвящена кооперативной теории игр. Здесь мы ограничиваемся изложением случая, когда выигрыши игроков трансферабельны и игра задается характеристической функцией. Предполагается, что при кооперации игроки максимизируют свой суммарный выигрыш. Поэтому задача заключается в дележе полученного максимального выигрыша, который устраивал бы всех игроков. Исходя из такого понимания кооперации, в главе приводится классическое понятие характеристической функции и основные принципы оптимальности (C-ядро, NM-решение и вектор Шепли). Доказаны теоремы существования непустого ядра. Отдельно исследованы выпуклые и простые игры, доказано существование C-ядра. Теоретические результаты иллюстрируются примерами из социально–экономической сферы.

В четвертой главе исследуются позиционные многошаговые игры (игры в развернутой форме). Эта глава имеет особое значение, поскольку она служит базой для понимания следующих глав, в которых описываются дифференциальные игры. Наиболее изученным классом игр являются игры с полной информацией. Для них доказывается существование абсолютного равновесия по Нэшу, т. е. такого равновесия, сужение которого в каждой подыгре, является равновесием в этой подыгре. Однако, кроме абсолютных равновесий, существует достаточно представительный класс равновесий в стратегиях наказания. Приводится характеристика этого класса равновесий и приводятся теоремы, характеризующие этот класс равновесий. Особенностью равновесий по Нэшу является их неединственность и неэквивалентность в том смысле, что выигрыши игроков в разных ситуациях равновесия могут серьезно различаться. Поэтому нетривиальным вопросом является выбор конкретного равновесия по Нэшу. В главе предлагается в качестве представителя равновесий по Нэшу выбрать индифферентное равновесие, существование и единственность которого доказывается. Особое место занимают иерархические игры. В главе приводится решение иерархических игр с древовидной и ромбовидной структурой. Отдельно исследованы кооперативные позиционные игры. Здесь возникает новая проблема — построение динамически устойчивых (состоятельных во времени) принципов оптимальности. Эта проблема решается с помощью введения процедур распределения дележа и основанной на них регуляризации игры. Отдельный параграф посвящен построению принципов оптимальности в играх с переменным коалиционным разбиением.

В пятой главе рассматриваются антагонистические дифференциальные игры. Изложение материала ведется на примере дифференциальных игр преследования. Однако полученные результаты могут быть легко использованы и в более общем случае. Доказывается основополагающая теорема о существовании ситуации ε-равновесия в классе кусочно–программных стратегий, выводится уравнение Айзекса–Беллмана для функции значения игры, приводятся итеративные методы решения этого уравнения. Результаты теории иллюстрируются на модельных примерах простого преследования и преследования при наличии сил трения. В указанных случаях находится решение уравнение Айзексаа–Беллмана в явной форме. Исследуется задача преследования на быстродействие, и приводятся теоремы, указывающие на связь между задачами преследования на быстродействие и с предписанной продолжительностью. Отдельный параграф посвящен задаче преследования с задержкой информации у преследователя специального вида. Обоснован вид оптимальной стратегии убегающего, которая в этом случае включает в себя случайный выбор управляющего воздействия.

Здесь следует заметить, что уровень строгости решений дифференциальных игр и, в частности, игр преследования, базирующихся на решении уравнения Айзекса–Беллмана, ограничивается областью фазовых переменных, для которых указанное уравнение имеет смысл. Строгое обоснование решений может быть получено с использованием фундаментальных результатов Н. Н. Красовского и его учеников. Именно на основе формализации дифференциальной игры, предложенной Н. Н. Красовским, оказывается возможным связать дескриптивную теорему о значении игры и ситуации равновесия с обобщенным минимаксным решением уравнения Айзекса–Беллмана (см. [Красовский, Котельникова, 2010]). Это же замечание относится и к неантагонистическим дифференциальным играм, рассмотренным в следующей главе, для которых подобные результаты еще не получены, но их получение является лишь делом времени.

Неантагонистическим некооперативным дифференциальным играм посвящена шестая глава. В некооперативном случае в качестве принципа оптимальности берется равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях. Для определения абсолютных равновесий в регулярном случае обосновывается техника использования систем дифференциальных уравнений в частных производных Гамильтона–Якоби–Беллмана. И хотя эта техника трудно применима для решения сложных задач, в ряде конкретных случаев удается найти явное решение. Это касается, прежде всего, приведенных в главе задач управления совместным предприятием, ограничения вредных выбросов в атмосферу и совместной добычи ограниченного природного ресурса. Во всех указанных задачах равновесия находятся в явной форме.

В седьмой и восьмой главах рассматриваются дифференциальные кооперативные игры. При формировании кооперативного соглашения используется принцип оптимальности классической кооперативной теории. Однако в динамике, так же как и в дискретных игровых задачах, здесь имеет место нарушение динамической устойчивости (состоятельности во времени) основных принципов оптимальности. Поэтому проводится регуляризация игры путем введения нового управляющего воздействия — процедуры распределения дележа, что обеспечивает динамическую устойчивость принципа оптимальности. Кооперативное решение находится для прикладных задач, рассмотренных также в некооперативном случае.

В учебнике принята тройная нумерация подразделов (пунктов) и формул: номер главы, номер параграфа, номер подраздела. Для рисунков и таблиц в рамках главы используется сквозная (двойная) нумерация. Основным структурным элементом учебника является подраздел (пункт), на который и делаются ссылки в тексте. Например, пример 1 п. 2.1.3 или теорема п. 4.2.5.

Глава 1

Матричные игры

§ 1.1. Определение антагонистической игры в нормальной форме

1.1.1. Начнем изучение теории игр с простейшей статической модели — матричной игры, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого из игроков конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Определение. *Система*

$$\Gamma = (X, Y, K), \tag{1.1.1}$$

где X и Y — непустые множества, и функция $K : X \times Y \to R^1$, называется антагонистической игрой в нормальной форме.

Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются *стратегиями* игроков 1 и 2 соответственно в игре Γ, элементы декартового произведения $X \times Y$ (т. е. пары стратегий (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$) — *ситуациями*, а функция K — функцией выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) полагается равным $[-K(x, y)]$; поэтому функция K также называется *функцией выигрыша* самой игры Γ, а игра Γ — *игрой с нулевой суммой.* Таким образом, используя принятую терминологию, для задания игры Γ необходимо определить множества стратегий X, Y игроков 1 и 2, а также функцию выигрыша K, заданную на множестве всех ситуаций $X \times Y$.

Игра Γ интерпретируется следующим образом . Игроки одновременно и независимо выбирают стратегии $x \in X, y \in Y$. После этого игрок 1 получает выигрыш, равный $K(x, y)$, а игрок 2 — $(-K(x, y))$.

1.1.2. Определение. *Игра $\Gamma' = (X', Y', K')$ называется подыгрой игры $\Gamma = (X, Y, K)$, где $X' \subset X, Y' \subset Y$, а функция $K' : X' \times Y' \to R^1$ является сужением функции K на $X' \times Y'$.*

В данной главе будут рассматриваться главным образом антагонистические игры, в которых множества стратегий игроков конечны.

Определение. *Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются матричными.*

Пусть игрок 1 в матричной игре (1.1.1) имеет всего m стратегий. Упорядочим множество X стратегий первого игрока, т. е. установим взаимно однозначное соответствие между множествами $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ и X. Аналогично, если игрок 2 имеет n стратегий, то можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и Y. Тогда игра Γ полностью определяется заданием матрицы $A = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = K(x_i, y_i),\ (i, j) \in M \times N,\ (x_i, y_j) \in X \times Y, i \in M, j \in N$ (отсюда и название игры — матричная). При этом игра Γ реализуется следующим образом. Игрок 1 выбирает строку $i \in M$, а игрок 2 (одновременно с игроком 1 и независимо от него) выбирает столбец $j \in N$. После этого игрок 1 получает выигрыш (a_{ij}), а игрок 2 получает $(-a_{ij})$. Если выигрыш равен отрицательному числу, то речь идет о фактическом проигрыше игрока.

Игру Γ с матрицей выигрышей A обозначим Γ_A и назовем $(m \times n)$-игрой согласно размерности матрицы A. Если из изложения понятно, об игре с какой матрицей идет речь, то индекс A будем опускать.

Нумерация стратегий в матричной игре может производиться различными способами, поэтому каждому отношению порядка, строго говоря, соответствует своя матрица. Таким образом, конечная антагонистическая игра может быть описана различными матрицами, отличающимися друг от друга лишь порядком строк и столбцов.

1.1.3. *Пример 1 (Оборона города).* Этот пример известен в литературе под названием «игра полковника Блотто» [Дрешер, 1964]. Полковник Блотто имеет m полков, а его противник –– n полков. Противник защищает две позиции. Позиция будет занята полковником Блотто, если на ней наступающие полки окажутся в численном превосходстве. Противоборствующим сторонам требуется распределить полки между двумя позициями.

Определим выигрыш полковника Блотто (игрока 1) на каждой позиции. Если у него на позиции полков больше, чем у противника (игрока 2), то его выигрыш на этой позиции равен числу полков противника плюс один (занятие позиции равносильно захвату одного полка). Если у игрока 2 полков на позиции больше, чем у игрока 1, то игрок 1 теряет все свои полки на этой позиции и еще единицу (за потерю позиции). Если обе стороны имеют одинаковое число полков на позиции, то имеет место ничья и каждая из сторон ничего не получит. Общий выигрыш игрока 1 равен сумме выигрышей на обеих позициях.

Игра, очевидно, антагонистическая. Опишем стратегии игроков. Пусть, для определенности, $m > n$. Игрок 1 имеет следующие стратегии: $x_0 = (m, 0)$ – послать все полки на первую позицию; $x_1 = (m - 1, 1)$ – послать $(m - 1)$ полков на первую позицию, а один – на вторую; $x_2 = (m - 2, 2), \ldots, x_{m-1} = (1, m - 1), x_m = (0, m)$. Противник (игрок 2) имеет следующие стратегии: $y_0 = (n, 0),\ y_1 = (n - 1, 1), \ldots, y_n = (0, n)$.

Пусть игрок 1 выбрал стратегию x_0, а игрок 2 — стратегию y_0. Вычислим выигрыш a_{00} игрока 1 в этой ситуации. Поскольку $m > n$, на первой позиции выигрывает игрок 1. Его выигрыш равен $n + 1$ Следовательно, $a_{00} = n + 1$.

Теперь вычислим a_{01}. Поскольку $m > n - 1$, то на первой позиции выигрыш игрока 1 равен $n - 1 + 1 = n$. На второй позиции выигрывает игрок 2. Следовательно, проигрыш игрока 1 на этой позиции равен единице. Таким образом, $a_{01} = n - 1$. Рассуждая аналогично, получаем $a_{0j} = n - j + 1 - 1 = n - j,\ 1 \le j \le n$. Далее, если $m - 1 > n$, то $a_{10} = n + 1 + 1 = n + 2,\ a_{11} = n - 1 + 1 = n,\ a_{1j} = n - j + 1 - 1 - 1 = n - j - 1,\ 2 \le j \le n$.

В общем случае (для любых m и n) элементы a_{ij}, $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$, матрицы выигрышей вычисляются следующим образом:

$$a_{ij}=K(x_i,y_j)=\begin{cases} n+2, & \text{если} \quad m-i>n-j, \quad i>j,\\ n-j+1, & \text{если} \quad m-i>n-j, \quad i=j,\\ n-j-i, & \text{если} \quad m-i>n-j, \quad i<j,\\ -m+i+j, & \text{если} \quad m-i<n-j, \quad i>j,\\ j+1, & \text{если} \quad m-i=n-j, \quad i>j,\\ -m-2, & \text{если} \quad m-i<n-j, \quad i<j,\\ -i-1, & \text{если} \quad m-i=n-j, \quad i<j,\\ -m+i-1, & \text{если} \quad m-i<n-j, \quad i=j,\\ 0, & \text{если} \quad m-i=n-j, \quad i=j. \end{cases}$$

Таким образом, при $m=4, n=3$, рассмотрев всевозможные ситуации, получим матрицу выигрышей A этой игры:

$$A=\begin{array}{c} \\ x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\\ \left[\begin{array}{rrrr} 4 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Пример 2 (Игра на уклонение) [Гейл, 1960]. Игроки 1 и 2 выбирают целые числа i и j из множества $\{1,\ldots,n\}$, при этом игрок 1 выигрывает величину $|i-j|$. Игра антагонистическая. Матрица выигрышей этой игры квадратная, размера $(n\times n)$, где $a_{ij}=|i-j|$. Так, если $n=4$, матрица A игры принимает вид

$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Пример 3 (Дискретная игра типа дуэли) [Гейл, 1960]. Игроки продвигаются навстречу друг другу на n шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но во время игры он может выстрелить только один раз. Считается, что вероятность того, что игрок попадает в своего противника, если выстрелит, продвинувшись на k шагов, равна k/n $(k\le n)$.

Стратегия игрока 1(2) заключается в принятии решения стрелять на i-м (j-м) шаге. Пусть $i<j$ и игрок 1 принимает решение стрелять на i-м шаге, а игрок 2 — на j-м шаге. Тогда выигрыш a_{ij} игрока 1 определяется формулой

$$a_{ij}=\frac{i}{n}-\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\frac{j}{n}=\frac{n(i-j)+ij}{n^2}.$$

Таким образом, выигрыш a_{ij} — это разность вероятностей поражения противника и собственной гибели в дуэли.

В случае $i > j$ первым стреляет игрок 2 и $a_{ij} = -a_{ji}$. Если же $i = j$, то полагаем $a_{ij} = 0$. Так, если положить $n = 5$, то матрица этой игры, умноженная на 25, имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 & -11 & -15 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 7 & -1 & 0 & 7 & 5 \\ 11 & 2 & -7 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & -5 & -15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 4 (Игра «нападение — защита»). Пусть игрок 1 намерен атаковать один из объектов $c_1, \ldots, c_n$, которые имеют положительные ценности $\tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0$. Игрок 2 защищает один из этих объектов. Будем считать, что если атакован незащищенный объект c_i, то он с достоверностью уничтожается (игрок 1 выигрывает τ_i), а защищенный — поражается с вероятностью $1 > \beta_i > 0$ (объект c_i выдерживает нападение с вероятностью $1 - \beta_i > 0$), т. е. игрок 1 выигрывает (в среднем) $\beta_i \tau_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда задача выбора объекта нападения (для игрока 1) и объекта защиты (для игрока 2) сводится к матричной игре с матрицей выигрышей

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1\tau_1 & \tau_1 & \ldots & \tau_1 \\ \tau_2 & \beta_2\tau_2 & \ldots & \tau_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_n & \tau_n & \ldots & \beta_n\tau_n \end{bmatrix}.$$

Пример 5 (Игра дискретного поиска). Имеется n ячеек. Игрок 2 прячет предмет в одной из n ячеек, а игрок 1 хочет его найти. При проверке i-й ячейки игрок 1 тратит $\tau_i > 0$ усилий, при этом вероятность найти предмет в i-й ячейке (если там он спрятан) равна $0 < \beta_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Если предмет найден, то игрок 1 получает доход α. Стратегиями игроков являются номера ячеек, в которых игроки соответственно прячут и ищут предмет. Выигрыш игрока 1 равен разности между ожидаемым доходом и усилиями, затраченными на поиск предмета. Таким образом, задача поиска и прятания предмета сводится к матричной игре с матрицей выигрышей

$$A = \begin{bmatrix} \alpha\beta_1 - \tau_1 & -\tau_1 & -\tau_1 & \ldots & -\tau_1 \\ -\tau_2 & \alpha\beta_2 - \tau_2 & -\tau_2 & \ldots & -\tau_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\tau_n & -\tau_n & -\tau_n & \ldots & \alpha\beta_n - \tau_n \end{bmatrix}.$$

Пример 6 (Поиск «шумного» объекта.) Предположим, что игрок 1 ведет поиск подвижного объекта (игрок 2) с целью его обнаружения. Игрок 2 преследует противоположную цель (т. е. стремится уклониться от обнаружения). Игрок 1 может двигаться со скоростями $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 3$, а игрок 2 — соответственно со скоростями $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = 3$. Дальность действия средства обнаружения игрока 1 в зависимости от скоростей движения участников игры приведена в матрице

$$D = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Стратегиями игроков являются скорости движения, а в качестве выигрыша игрока 1 в ситуации (α_i, β_j) примем производительность поиска $a_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$, где δ_{ij} – элемент матрицы D. Тогда задача выбора скоростей игроков при поиске – уклонении может быть представлена матричной игрой с матрицей

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \end{array}.$$

§ 1.2. Максиминные и минимаксные стратегии

1.2.1. Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = (X, Y, K)$. Здесь каждый из игроков выбором стратегии стремится максимизировать свой выигрыш. Но для игрока 1 он определяется функцией $K(x, y)$, а для игрока 2 как $(-K(x, y))$, т. е. цели игроков прямо противоположны. При этом заметим, что выигрыш игрока 1(2) определен на ситуациях $(x, y) \in X \times Y$, складывающихся в процессе игры. Но каждая ситуация, а следовательно, и выигрыш игрока зависят не только от его выбора, но и от того, какая стратегия будет выбрана противником. Поэтому, стремясь получить возможно больший выигрыш, каждый игрок должен учитывать поведение противника.

Поясним сказанное на примере игры «оборона города». Если игрок 1 хочет получить максимальный выигрыш, то он должен принять стратегию x_0 (или x_4). В этом случае, если игрок 2 применит стратегию $y_0(y_3)$, то первый получит выигрыш, равный 4 единицам. Но если игрок 2 применит стратегию y_3 (соответственно y_0), то игрок 1 получит выигрыш, равный 0, т. е. потеряет 4 единицы. Аналогичные рассуждения можно провести и для игрока 2.

В теории игр предполагается, что оба игрока действуют разумно, т. е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим (для себя) образом. Что может себе гарантировать игрок 1? Пусть игрок 1 выбрал стратегию x. Тогда в худшем случае он выиграет $\min\limits_y K(x, y)$. Поэтому игрок 1 всегда может гарантировать себе выигрыш $\max\limits_x \min\limits_y K(x, y)$. Если отказаться от предположения достижимости экстремума, то игрок 1 может всегда получить выигрыш, сколь угодно близкий к величине

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y), \tag{1.2.1}$$

которую будем называть *нижним значением игры.*

Если же внешний экстремум в (1.2.1) достигается, то величина $\underline{v}$ называется также *максимином*; принцип построения стратегии x, основанный на максимизации минимального выигрыша,— *принципом максимина*, а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия x — *максиминной стратегией* игрока 1.

Для игрока 2 можно провести аналогичные рассуждения. Пусть он выбрал стратегию y. Тогда в худшем случае он проиграет $\max\limits_x K(x, y)$. Поэтому второй игрок всегда может себе гарантировать проигрыш не более, чем $\min\limits_y \max\limits_x K(x, y)$. Число

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \tag{1.2.2}$$

называется *верхним значением* игры Г, а в случае достижения внешнего экстремума в (1.2.2) и минимаксом. При этом принцип построения стратегии y, основанный на минимизации максимальных потерь, называется *принципом минимакса*, а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия y — *минимаксной стратегией* игрока 2. Подчеркнем, что существование минимаксной (максиминной) стратегии определяется достижимостью внешнего экстремума в (1.2.2) ((1.2.1)).

Пусть задана матричная $(m \times n)$- игра Γ_A. Тогда экстремумы в (1.2.1) и (1.2.2) достигаются, а нижнее и верхнее значения игры соответственно равны

$$\underline{v} = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij}, \tag{1.2.3}$$

$$\overline{v} = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij}. \tag{1.2.4}$$

Минимакс и максимин для игры Γ_A могут быть найдены по следующей схеме:

$$\begin{array}{c}
\underbrace{\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] \\ \max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \quad \dots \quad \max_i a_{in} \end{array}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}}
\end{array}
\left.\begin{array}{c} \min_j a_{1j} \\ \min_j a_{2j} \\ \dots \\ \min_j a_{mj} \end{array}\right\} \max_i \min_j a_{ij}$$

Так, в игре Γ_A с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

нижнее значение (максимин) $\underline{v}$ и максиминная стратегия i_0 первого игрока равны $\underline{v} = 3$, $i_0 = 2$, а верхнее значение (минимакс) $\overline{v}$ и минимаксная стратегия j_0 второго игрока $\overline{v} = 3,\ j_0 = 2$.

1.2.2. Для любой игры $\Gamma = (X, Y, K)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма. *В антагонистической игре* Г

$$\underline{v} \ \le \ \overline{v} \tag{1.2.5}$$

или

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} K(x,y) \ \le \ \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} K(x,y). \tag{1.2.6}$$

Доказательство. Пусть $x \in X$ произвольная стратегия игрока 1. Тогда имеем

$$K(x,y) \le \sup_{x\in X} K(x,y).$$

Отсюда получаем

$$\inf_{y\in Y} K(x,y) \le \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} K(x,y).$$

Теперь заметим, что в правой части последнего неравенства стоит константа, а значение $x \in X$ выбиралось произвольно. Поэтому выполняется неравенство

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} K(x,y) \le \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} K(x,y).$$

§ 1.3. Ситуации равновесия

1.3.1. Рассмотрим вопрос об оптимальном поведении игроков в антагонистической игре. Естественно считать оптимальной в игре $\Gamma = (X, Y, K)$ такую ситуацию $(x^*, y^*) \in X \times Y$, отклоняться от которой невыгодно ни одному из игроков. Такая ситуация (x^*, y^*) называется *равновесной*, а принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации,— *принципом равновесия*. Конечно, для этого необходимо существование равновесия (т. е. чтобы принцип оптимальности был реализуем).

Определение. *В антагонистической игре* $\Gamma = (X, Y, K)$ *ситуация* (x^*, y^*) *называется ситуацией равновесия или седловой точкой, если*

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*), \tag{1.3.1}$$

$$K(x^*, y) \ge K(x^*, y^*) \tag{1.3.2}$$

для всех $x \in X$ *и* $y \in Y$.

Множество всех ситуаций равновесия в игре Γ обозначим через

$$Z(\Gamma) \subset X \times Y.$$

Для матричной игры Γ_A речь идет о *седловых точках* матрицы выигрышей A, т. е. таких точках (i^*, j^*), что для всех $i \in M$ и $j \in N$ выполняются неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}.$$

В седловой точке элемент матрицы $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Например, в игре с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ситуация (2,2) является равновесной.

1.3.2. Множество ситуаций равновесия в антагонистической игре Γ обладает свойствами, которые позволяют говорить об оптимальности ситуации равновесия и входящих в нее стратегий.

Теорема. *Пусть* (x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*) *— две произвольные ситуации равновесия в антагонистической игре* Γ. *Тогда*

1) $K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*)$;

2) $(x_1^*, y_2^*) \in Z(\Gamma)$, $(x_2^*, y_1^*) \in Z(\Gamma)$.

Доказательство. Из определения ситуации равновесия для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$K(x, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y); \tag{1.3.3}$$

$$K(x, y_2^*) \le K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y). \tag{1.3.4}$$

Подставим в левую часть неравенства (1.3.3) x_2^*, в правую — y_2^*, в левую часть неравенства (1.3.4) — x_1^* и в правую y_1^*. Тогда получим

$$K(x_2^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y_1^*).$$

Откуда следует равенство

$$K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) = K(x_2^*, y_1^*) = K(x_1^*, y_2^*). \tag{1.3.5}$$

Покажем справедливость второго из утверждений. Рассмотрим ситуацию (x_2^*, y_1^*). Тогда из (1.3.3)–(1.3.5) имеем

$$K(x, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y) \tag{1.3.6}$$

для всех $x \in X, y \in Y$. Доказательство равновесности ситуации $(x_1^*, y_2^*) \in Z(\Gamma)$ проводится аналогично.

Из теоремы следует, что функция выигрыша принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия. Поэтому разумно ввести следующее определение.

Определение. *Пусть (x^*, y^*) — ситуация равновесия в игре Γ. Тогда число*

$$v = K(x^*, y^*) \tag{1.3.7}$$

называется значением игры Γ.

Из второго утверждения теоремы следует, в частности, такой факт. Обозначим X^* и Y^* проекции множества $Z(\Gamma)$ на X и Y соответственно, т. е.

$$X^* = \{x^* \,|x^* \in X, \exists y^* \in Y, (x^*, y^*) \in Z(\Gamma)\},$$

$$Y^* = \{y^*|y^* \in Y, \exists x^* \in X, (x^*, y^*) \in Z(\Gamma)\}.$$

Тогда множество $Z(\Gamma)$ можно представить в виде декартового произведения

$$Z(\Gamma) = X^* \times Y^*. \tag{1.3.8}$$

Доказательство (1.3.8), как следствие второго утверждения теоремы, предоставим читателю.

Определение. *Множество $X^*(Y^*)$ называется множеством оптимальных стратегий игрока 1(2) в игре Γ, а его элементы — оптимальными стратегиями игрока 1 (2).*

Заметим, что равенство (1.3.5) указывает на взаимозаменяемость оптимальных стратегий, т. е. любая пара оптимальных стратегий образует ситуацию равновесия, а выигрыш в ней равен значению игры.

1.3.3. Оптимальность поведения игроков не изменится, если в игре множества стратегий остаются прежними, а функция выигрыша умножается на положительную константу (или к ней прибавляется постоянное число).

Лемма о масштабе. *Пусть $\Gamma = (X, Y, K)$ и $\Gamma' = (X, Y, K')$ — две антагонистические игры, причем*

$$K' = \beta K + \alpha,\ \beta > 0, \alpha = const, \beta = const. \tag{1.3.9}$$

Тогда

$$Z(\Gamma') = Z(\Gamma),\ v_{\Gamma'} = \beta v_\Gamma + \alpha. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. Пусть (x^*, y^*) — ситуация равновесия в игре Γ. Тогда имеем

$$K'(x^*, y^*) = \beta K(x^*, y^*) + \alpha \le \beta K(x^*, y) + \alpha = K'(x^*, y),$$

$$K'(x, y^*) = \beta K(x, y^*) + \alpha \le \beta K(x^*, y^*) + \alpha = K'(x^*, y^*),$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Следовательно, $(x^*, y^*) \in Z(\Gamma'), Z(\Gamma) \subset Z(\Gamma')$.

Обратно, пусть $(x,y) \in Z(\Gamma')$. Тогда

$$K(x,y) = (1/\beta)K'(x,y) - \alpha/\beta$$

и, рассуждая аналогично, получаем, что $(x,y) \in Z(\Gamma)$. Следовательно, $Z(\Gamma) = Z(\Gamma')$, при этом выполняется равенство

$$v_{\Gamma'} = K'(x^*,y^*) = \beta K(x^*,y^*) + \alpha = \beta v_\Gamma + \alpha.$$

Содержательно данная лемма говорит о стратегической эквивалентности двух игр, отличающихся лишь началом отсчета выигрышей, а также масштабом их измерения.

1.3.4. Теперь установим связь между принципом равновесия и принципами минимакса и максимина в антагонистической игре.

Теорема. *Для того чтобы в игре* $\Gamma = (X, Y, K)$ *существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы существовали минимакс и максимин*

$$\min_y \sup_x K(x,y), \;\; \max_x \inf_y K(x,y) \tag{1.3.11}$$

и выполнялось равенство:

$$\underline{v} = \max_x \inf_y K(x,y) = \min_y \sup_x K(x,y) = \overline{v}. \tag{1.3.12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $(x^*,y^*) \in Z(\Gamma)$. Тогда для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняются следующие неравенства:

$$K(x,y^*) \le K(x^*,y^*) \le K(x^*,y) \tag{1.3.13}$$

отсюда

$$\sup_x K(x,y^*) \le K(x^*,y^*). \tag{1.3.14}$$

Вместе с тем имеем

$$\inf_y \sup_x K(x,y) \le \sup_x K(x,y^*). \tag{1.3.15}$$

Сравнивая (1.3.14) и (1.3.15), получаем

$$\inf_y \sup_x K(x,y) \le \sup_x K(x,y^*) \le K(x^*,y^*). \tag{1.3.16}$$

Рассуждая аналогично, приходим к неравенствам

$$K(x^*,y^*) \le \inf_y K(x^*,y) \le \sup_x \inf_y K(x,y). \tag{1.3.17}$$

Таким образом,

$$\inf_y \sup_x K(x,y) \le \sup_x K(x,y).$$

С другой стороны, всегда выполняется обратное неравенство (1.2.6). Итак, получаем

$$\sup_x \inf_y K(x,y) = \inf_y \sup_x K(x,y), \tag{1.3.18}$$

при этом неравенства (1.3.16), (1.3.17) выполняются как равенства

$$\min_y \sup_x K(x,y) = \sup_x K(x,y^*) = K(x^*,y^*),$$

$$\max_x \inf_y K(x,y) = \inf_y K(x^*,y) = K(x^*,y^*),$$

т. е. внешние экстремумы у $\min\sup$ и $\max\inf$ достигаются в точках y^* и x^* соответственно.

Достаточность. Пусть существуют $\min\sup$ и $\max\inf$,

$$\max_x \inf_y K(x,y) = \inf_y K(x^*,y); \tag{1.3.19}$$

$$\min_y \sup_x K(x,y) = \sup_x K(x,y^*) \tag{1.3.20}$$

и выполняется равенство (1.3.12). Покажем, что ситуация (x^*,y^*) является равновесной. Действительно,

$$K(x^*,y^*) \geq \inf_y K(x^*,y) = \max_x \inf_y K(x,y); \tag{1.3.21}$$

$$K(x^*,y^*) \leq \sup_x K(x,y^*) = \min_y \sup_x K(x,y). \tag{1.3.22}$$

Согласно равенству (1.3.12), $\min\sup$ равен $\max\inf$, а из (1.3.21), (1.3.22) следует, что он равен также и величине $K(x^*,y^*)$, т. е. неравенства в (3.21), (3.22) выполняются как равенства. Теперь имеем

$$K(x^*,y^*) = \inf_y K(x^*,y) \leq K(x^*,y),$$

$$K(x^*,y^*) = \sup_x K(x,y^*) \geq K(x,y^*)$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$, т. е. $(x^*,y^*) \in Z(\Gamma)$.

Заметим, что в ходе доказательства показано, что общее значение $\min\sup$ и $\max\inf$ равно $K(x^*,y^*) = v$ — значению игры, при этом любая $\min\sup$ $(\max\inf)$ стратегия $y^*(x^*)$ в условиях теоремы является оптимальной, т. е. ситуация (x^*,y^*) является равновесной.

Из доказательства теоремы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если* $\min\sup$ *и* $\max\inf$ *в (1.3.11) существуют и достигаются на* $\overline{y}$ *и* $\overline{x}$ *соответственно, то*

$$\max_x \inf_y K(x,y) \leq K(\overline{x},\overline{y}) \leq \min_y \sup_x K(x,y). \tag{1.3.23}$$

Игры, в которых существуют ситуации равновесия, называются *вполне определенными.* Поэтому данная теорема устанавливает критерий вполне определенной игры и может быть переформулирована следующим образом. Для того чтобы игра была вполне определена, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\min\sup$ и $\max\inf$ в (1.3.11) и выполнялось равенство (1.3.12).

Заметим, что в матричной игре Γ_A экстремумы в (1.3.11) всегда достигаются, поэтому теорема принимает следующий вид.

Следствие 2. *Для того чтобы матричная* $(m \times n)$*-игра* Γ_A *была вполне определена, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} \alpha_{ij} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} \alpha_{ij}. \tag{1.3.24}$$

Например, в игре с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ ситуация (2,1) является равновесной. При этом

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 2.$$

С другой стороны, игра с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ не имеет ситуации равновесия, поскольку

$$\min_j \max_i a_{ij} = 1 > \max_i \min_j a_{ij} = 0.$$

Заметим, что игры, сформулированные в примерах 1 – 3 (п. 1.1.3), не являются вполне определенными, а игра в примере 6 вполне определена и ее значение $v = 6$.

§ 1.4. Смешанное расширение игры

1.4.1. Рассмотрим матричную игру Γ_A. Если в ней существует ситуация равновесия, то минимакс равен максимину, причем согласно определению ситуации равновесия каждый из игроков может сообщить свою оптимальную (максиминную) стратегию противнику и от этого ни один из игроков не может получить дополнительную выгоду. Теперь предположим, что в игре Γ_A не существует ситуации равновесия. Тогда согласно теореме п. 1.3.4 и лемме п. 1.2.2 имеем

$$\min_j \max_i \alpha_{ij} - \max_i \min_j a_{ij} > 0. \tag{1.4.1}$$

В этом случае максиминная и минимаксная стратегии не являются оптимальными. Более того, игрокам бывает невыгодно их придерживаться, так как они могут получить больший выигрыш. Однако сообщение о выборе стратегии противнику может привести к еще большим потерям, чем в случае максиминной или минимаксной стратегии.

Действительно, пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Для такой матрицы $\min_j \max_i \alpha_{ij} = 5$, $\max_i \min_j \alpha_{ij} = 3$, т. е. ситуации равновесия не существует.

Обозначим через i^* максиминную стратегию игрока 1 ($i^* = 1$), а минимаксную стратегию игрока 2 через j^* ($j^* = 2$). Пусть игрок 2 придерживается стратегии $j^* = 2$, а игрок 1 выберет стратегию $i = 2$. Тогда последний получит выигрыш 5, т. е. на 2 единицы больше, чем максимин. Однако если игрок 2 догадается о выборе игрока 1, то он изменит стратегию на $j = 1$, и тогда первый получит выигрыш лишь 2 единицы, т. е. на единицу меньше, чем в случае максимина. Аналогичные рассуждения можно провести и для второго игрока. По существу вопрос стоит о том, как разделить между игроками величину (1.4.1)?

Оказывается, что в этом случае игрокам разумно действовать случайно, что обеспечивает наибольшую скрытность выбора стратегии. Результат выбора не может стать известным противнику, поскольку до реализации случайного механизма не известен самому игроку.

1.4.2. Определение. *Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока, называется его смешанной стратегией.*

Так, для матричной игры Γ_A смешанной стратегией игрока 1 является случайная величина, значениями которой являются номера строк $i \in M$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ матрицы A. Аналогично определяется смешанная стратегия игрока 2, значениями которой являются номера $j \in N$ столбцов матрицы A.

Учитывая только что введенное определение смешанных стратегий, прежние стратегии будем называть «чистыми». Так как случайная величина характеризуется своим распределением, то будем отождествлять в дальнейшем смешанную стратегию с вероятностным распределением на множестве чистых стратегий. Таким образом, смешанная стратегия x игрока 1 в игре есть m-мерный вектор

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_m), \ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \tag{1.4.2}$$

Аналогично, смешанная стратегия y игрока 2 есть n-мерный вектор

$$y = (\eta_1, \dots, \eta_n), \ \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1, \eta_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \tag{1.4.3}$$

При этом $\xi_i \geq 0$ и $\eta_j \geq 0$ — вероятности выбора чистых стратегий $i \in M$ и $j \in N$ соответственно при использовании игроками смешанных стратегий x и y.

Обозначим через X и Y соответственно *множества смешанных стратегий первого и второго игроков*. Нетрудно заметить, что множество смешанных стратегий каждого игрока — компакт в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве (замкнутое, ограниченное множество).

Определение. *Пусть* $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in X$ *— смешанная стратегия игрока* 1. *Тогда множество индексов*

$$M_x = \{i | i \in M, \xi_i > 0\}, \tag{1.4.4}$$

где $M = \{1, 2, \dots, m\}$, *назовем спектром стратегии* x.

Аналогично для смешанной стратегии $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in Y$ игрока 2 спектр N_y определяется следующим образом:

$$N_y = \{j | j \in N, \eta_j > 0\}, \tag{1.4.5}$$

где $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Таким образом, спектр смешанной стратегии состоит из таких чистых стратегий, которые выбираются с положительными вероятностями.

Для любой смешанной стратегии x спектр $M_x \neq \oslash$, поскольку вектор x имеет неотрицательные компоненты, сумма которых равна 1 [см. (1.4.2)].

Рассмотрим смешанную стратегию $u_i = (\xi_1, \dots, \xi_1, \dots, \xi_m) \in X$, где $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0, j \neq i, i = 1, 2, \dots, m$. Такая стратегия предписывает выбор i-ой строки матрицы A с вероятностью 1. Естественно отождествлять смешанную стратегию $u_i \in X$ с выбором i-й строки, т. е. с чистой стратегией $i \in M$ игрока 1. Аналогично отождествим смешанную стратегию $w_j = (\eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_n) \in Y$, где $\eta_j = 1, \eta_i = 0, i \neq j, j = 1, \dots, n$ с чистой стратегией $j \in N$ игрока 2. Тем самым мы получили, что множество смешанных стратегий игрока есть расширение его пространства чистых стратегий.

Определение. *Пара* (x, y) *смешанных стратегий игроков в матричной игре* Γ_A *называется ситуацией в смешанных стратегиях.*

Определим выигрыш игрока 1 в ситуации (x, y) в смешанных стратегиях для матричной $(m \times n)$-игры Γ_A как математическое ожидание его выигрыша при условии, что игроки используют смешанные стратегии соответственно x и y. Выбор стратегий игроками осуществляется независимо друг от друга, поэтому математическое ожидание выигрыша $K(x, y)$ в ситуации (x, y) в смешанных стратегиях $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ равно

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j = (xA)y = x(Ay). \tag{1.4.6}$$

При этом функция $K(x, y)$ является непрерывной по $x \in X$ и $y \in Y$. Заметим, что выигрыши $K(i, y), K(x, j)$ при применении одним из игроков чистой стратегии (i или j соответственно), а другим — смешанной стратегии (y или x) имеют вид

$$K(i, y) = K(u_i, y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \eta_j = a_i y, i = 1, \ldots, m,$$

$$K(x, j) = K(x, w_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \xi_i = x a^j, j = 1, \ldots, n,$$

где a_i — i-я строка, а a^j —j-й столбец $(m \times n)$-матрицы A.

Таким образом, от матричной игры $\Gamma_A = (M, N, A)$ мы перешли к новой игре $\overline{\Gamma}_A = (X, Y, K)$, где X и Y — множества смешанных стратегий в игре Γ_A и K — функция выигрыша в смешанных стратегиях (математическое ожидание выигрыша). Игру $\overline{\Gamma}_A$ будем называть *смешанным расширением* игры Γ_A. Игра Γ_A является подыгрой для $\overline{\Gamma}_A$, т. е. $\Gamma_A \subset \overline{\Gamma}_A$.

1.4.3. Определение. *Ситуация (x^*, y^*) в игре $\overline{\Gamma}_A$ образует ситуацию равновесия, а число $v = K(x^*, y^*)$ является значением игры $\overline{\Gamma}_A$, если для всех $x \in X$ и $y \in Y$*

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y). \tag{1.4.7}$$

Теорема п. 1.3.2 очевидным образом справедлива и для ситуаций равновесия в смешанном расширении $\overline{\Gamma}_A$ игры Γ_A. Более того, согласно теореме п. 1.3.4 стратегии x^* и y^* являются соответственно максиминнои и минимаксной, поскольку внешние экстремумы в (1.3.11) достигаются (функция $K(x, y)$ непрерывна на компактных множествах X и Y).

В лемме п. 1.3.3 была показана стратегическая эквивалентность двух игр, отличающихся лишь началом отсчета выигрышей, а также масштабом их измерения (лемма о масштабе). Оказывается, что если две матричные игры Γ_A и $\Gamma_{A'}$ находятся в условиях этой леммы, то их смешанные расширения стратегически эквивалентны. Формально этот факт устанавливается следующим утверждением.

Лемма. *Пусть Γ_A и $\Gamma_{A'}$ — две матричные $(m \times n)$-игры, где*

$$A' = \alpha A + B, \ \alpha > 0, \alpha = const,$$

а B — матрица с одинаковыми элементами β, т. е. $\beta_{ij} = \beta$ для всех i и j. Тогда $Z(\overline{\Gamma}_{A'}) = Z(\overline{\Gamma}_A)$, $\overline{v}_{A'} = \alpha \overline{v}_A + \beta$, где $\overline{\Gamma}_{A'}$ и $\overline{\Gamma}_A$ — смешанные расширения игр $\Gamma_{A'}$ и Γ_A соответственно, а $\overline{v}_{A'}, \overline{v}_A$ — значения игр $\overline{\Gamma}_{A'}$ и $\overline{\Gamma}_A$.

Доказательство. Обе матрицы A и A' одинаковой размерности $m \times n$; поэтому множества смешанных стратегий в играх $\Gamma_{A'}$ и Γ_A совпадают. Покажем, что для любой ситуации (x, y) в смешанных стратегиях выполняется равенство

$$K'(x, y) = \alpha K(x, y) + \beta, \tag{1.4.8}$$

где K' и K — выигрыши игрока 1 в играх $\overline{\Gamma}_{A'}$ и $\overline{\Gamma}_A$ соответственно.

Действительно, для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$K'(x, y) = xA'y = \alpha(xAy) + xBy = \alpha K(x, y) + \beta.$$

Из леммы о масштабе следует, что $Z(\overline{\Gamma}_{A'}) = Z(\overline{\Gamma}_A)$, $\overline{v}_{A'} = \alpha\overline{v}_A + \beta$.

Пример 7. Проверим, что стратегии $y^* = (1/2, 1/4, 1/4)$, $x^* = (1/2, 1/4, 1/4)$ оптимальны, а $v = 0$ — значение игры $\overline{\Gamma}_A$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Упростим матрицу A (с целью получения максимального числа нулей). Прибавляя ко всем элементам матрицы A единицу, получим матрицу

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы A разделим на 2. Новая матрица принимает вид

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

По лемме значение игр связано равенством $v_{A''} = \frac{1}{2}v_{A'} = \frac{1}{2}(v_A + 1)$. Таким образом, требуется проверить, что значение игры $\Gamma_{A''}$ равно $1/2$. Действительно, $K''(x^*, y^*) = x^T A'' y^* = 1/2$. С другой стороны, для каждой стратегии $y \in Y, y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ имеем $K''(x^*, y) = \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, а для всех $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), x \in X$, $K''(x, y^*) = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, указанные стратегии x^*, y^* являются оптимальными, а $v_A = 0$.

В дальнейшем, говоря о матричной игре Γ_A, будем предполагать, что речь идет о ее смешанном расширении $\overline{\Gamma}_A$.

§ 1.5. Некоторые сведения из теории выпуклых множеств и систем линейных неравенств

Этот параграф носит вспомогательный характер и при первом чтении может быть опущен. Однако для понимания доказательств последующих утверждений полезно напомнить широко распространенные понятия и результаты. Большинство из них будет приведено без доказательств, в необходимых случаях даны ссылки на специальную литературу.

1.5.1. Множество $M \subset R^m$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками этого множества $x_1,\ x_2 \in M$ в нем содержатся все точки отрезка $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0 \le \lambda \le 1$. Понятие выпуклого множества можно сформулировать и в более общем, но эквивалентном виде.

Множество $M \subset R^m$ называется выпуклым, если вместе с точками $x_1, \ldots, x_k$ из M, оно содержит и все точки вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

называемые выпуклыми линейными комбинациями точек $x_1, \ldots, x_k$.

Пересечение выпуклых множеств всегда выпукло.

Рассмотрим систему линейных неравенств

$$xA \le b$$

или

$$xa^j \le \beta_j,\ j \in N, N = \{1, \ldots, n\}, \tag{1.5.1}$$

где $A = [a^j, j \in N]$ — $(m \times n)$-матрица, $x \in R^m$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^n$.

Обозначим как $\tilde{X} = \{x|xA \le b\}$ множество решений системы (1.5.1). Непосредственно из определения следует, что $\tilde{X}$ — выпуклое множество. Множество $\tilde{X}$ называется *выпуклым многогранным множеством* , заданным системой ограничений (1.5.1).

1.5.2. Точка $X \in M$, где M — выпуклое множество, называется *крайней точкой*, если из условия $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ x_1 \in M, x_2 \in M$ и $0 < \lambda < 1$ следует, что $x_1 = x_2 = x$. Содержательно определение означает, что $x \in M$ — крайняя точка, если не существует отрезка, содержащего две точки из M, для которого x является внутренней. Заметим, что крайняя точка выпуклого множества всегда является граничной, обратное неверно.

Пусть X — выпуклое многогранное множество, заданное системой ограничений (1.5.1). Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема. *Множество $\tilde{X}$ имеет крайние точки тогда и только тогда, когда $rankA = rank[a^j, j \in N] = m$ [Ашманов, 1981].*

Теорема. *Для того чтобы точка $x_0 \in X$ была крайней, необходимо и достаточно, чтобы она была решением системы*

$$x_0 a^j = \beta_j, j \in N_1; \tag{1.5.2}$$

$$x_0 a^j \le \beta_j, i \in N \setminus N_1, \tag{1.5.3}$$

где $N_1 \subset N,\ rank[a^i, j \in N_1] = m$ [Ашманов, 1981].

Последняя теорема дает алгоритм нахождения крайних точек множества $\tilde{X}$. Для этого необходимо рассмотреть столбцовые базисы матрицы A, решить систему линейных уравнений (1.5.2) и проверить выполнение неравенств (1.5.3). Однако такой способ поиска крайних точек многогранного множества мало пригоден для практики, поскольку он связан с полным перебором всевозможных столбцовых базисов матрицы A.

1.5.3. *Выпуклой оболочкой множества P* будем называть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих P, и обозначать $conv(P)$. Данное определение эквивалентно следующему. Выпуклая оболочка множества P состоит из всех выпуклых линейных комбинаций всевозможных точек из P, т. е.

$$conv(P) = \{x\ |x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, x_i \in P\}.$$

Выпуклая оболочка конечного числа точек называется *выпуклым многогранником*, порожденным этими точками. Выпуклый многогранник порожден своими крайними точками. Так, если рассмотреть множество X смешанных стратегий игрока 1 в $(m\times n)$-игре, то $X = conv\{u_1, \ldots, u_m\}$, где $u_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ — орты пространства R^m или чистые стратегии игрока 1. Множество X является выпуклым многогранником размерности $(m-1)$ и называется также $(m-1)$-*мерным симплексом* или фундаментальным симплексом). При этом все векторы u_i (чистые стратегии) являются крайними точками многогранника X. Аналогичные утверждения справедливы для множества Y смешанных стратегий игрока 2.

Конусом C называется множество таких точек, что если $x \in C, \lambda \geq 0$, то $\lambda x \in C$.

Содержательно, конус C — это такое подмножество R^m, которое вместе с точкой x содержит и всю полупрямую (x), где

$$(x) = \{y \mid y = \lambda x, \lambda \geq 0\}.$$

Конус C называется *выпуклым конусом*, если выполняется условие: для всех $x, y \in C$ справедливо $x + y \in C$. Другими словами, конус C — выпуклый, если он замкнут относительно операции сложения. Можно дать и другое эквивалентное определение. Конус называется выпуклым, если он является выпуклым множеством. Сумма выпуклых конусов $C_1 + C_2 = \{c \mid c = c_1 + c_2, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$ и их пересечение $C_1 \cap C_2$ также являются выпуклыми конусами.

Непосредственной проверкой определения можно показать, что множество $C = \{x \mid xA \leq 0\}$ решений однородной системы линейных неравенств, соответствующей (1.5.1), является выпуклым конусом.

Пусть $\tilde{X}$ — выпуклое многогранное множество, заданное системой ограничений (1.5.1), записанной в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i \leq b, \tag{1.5.4}$$

где $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in R^m$, a_i —i-я строка матрицы A, $i = 1, \dots, m$. Предположим, что $rank A = r, r \leq m$, и векторы $a_1, \dots, a_r$ образуют строчечный базис матрицы A. Разложим остальные строки по базису

$$a_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ij} a_j, \ j = r+1, \dots, m. \tag{1.5.5}$$

Подставляя (1.5.5) в (1.5.4), получим эквивалентную (1.5.4) систему неравенств

$$\sum_{i=1}^{r} (\xi_i + \sum_{j=r+1}^{m} \xi_j \delta_{ij}) a_i \leq b. \tag{1.5.6}$$

Обозначим через X_0 множество векторов $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in R^m$, удовлетворяющих неравенствам (1.5.6) и условию $\xi_j = 0, j = r+1, \dots, m$. По теореме п. 1.5.2, множество X_0 имеет крайние точки. Справедлива следующая теорема [Ашманов, 1981].

Теорема о представлении многогранного множества. *Пусть $\tilde{X}$ — многогранное множество, заданное системой ограничений (1.5.4). Тогда*

$$\tilde{X} = M + C,$$

где $M + C = \{x \mid x = y + z, y \in M, z \in C\}$, M — выпуклый многогранник, порожденный крайними точками многогранного множества X_0, заданного (1.5.6), а $C = \{x \mid xA \leq 0\}$ — выпуклый конус.

Из теоремы, в частности, следует, что если множество $\tilde{X}$ решений системы (1.5.4) ограничено, то $\tilde{X}$ — выпуклый многогранник.

1.5.4. Напомним, что задача нахождения $\min cx$ при ограничениях

$$xA \geq b, \ x \geq 0, \tag{1.5.7}$$

где A — $(m \times n)$-матрица, $c \in R^m$, $x \in R^m$, $b \in R^n$ называется прямой стандартной задачей линейного программирования, а задача, заключающаяся в определении $\max by$ при ограничениях

$$Ay \leq c, \ y \geq 0, \tag{1.5.8}$$

где $y \in R^n$, двойственной задачей линейного программирования для (1.5.7). Вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий системе (1.5.7), называется допустимым решением задачи (1.5.7). Аналогично вводится понятие допустимого решения $y \in R^n$ задачи (1.5.8). Допустимое решение $\overline{x}(\overline{y})$ называется оптимальным решением задачи (1.5.7) [(1.5.8)], если на нем достигается минимум (максимум) функции $cx(by)$ на множестве всех допустимых решений.

Справедливо следующее утверждение [Ашманов, 1981].

Теорема двойственности. *Если обе задачи (1.5.7),(1.5.8) имеют допустимые решения, то они обе имеют оптимальные решения $\overline{x}, \overline{y}$, соответственно, при этом*

$$c\overline{x} = b\overline{y}.$$

1.5.5. В заключение параграфа приведем одно свойство выпуклых функций. Сначала напомним, что функция $\varphi : M \to R^1$, где $M \subset R^m$ — выпуклое множество, называется выпуклой, если

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2) \tag{1.5.9}$$

для всех $x_1, x_2 \in M$ и $\lambda \in [0,1]$. Если же в (1.5.9) выполняется обратное неравенство, то функция φ называется вогнутой. Пусть $\varphi_i(x)$ — выпуклые на M функции, $i = 1,\ldots,n$. Тогда верхняя огибающая $\psi(x)$ этого семейства функций

$$\psi(x) = \max_{i=1,\ldots,n} \varphi_i(x) \tag{1.5.10}$$

является выпуклой на M.

Действительно, по определению выпуклой функции для $x_1, x_2 \in M$ и $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$\varphi_i(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha\varphi_i(x_1) + (1-\alpha)\varphi_i(x_2) \le$$

$$\le \alpha \max_i \varphi_i(x_1) + (1-\alpha)\max_i \varphi_i(x_2).$$

Отсюда получаем

$$\psi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \max_i \varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha\psi(x_1) + (1-\alpha)\psi(x_2),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно показать вогнутость нижней огибающей (в (1.5.10) берется минимум по i) семейства вогнутых функций.

§ 1.6. Существование решения матричной игры в классе смешанных стратегий

Докажем, что произвольная матричная игра вполне определена в классе смешанных стратегий.

1.6.1. Основная теорема матричных игр. *Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях [Фон Нейман, 1928].*

Доказательство. Пусть Γ_A — произвольная $(m \times n)$-игра со строго положительной матрицей $A = \{a_{ij}\}$, т. е. $a_{ij} > 0$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$. Покажем, что в этом случае теорема справедлива. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\min xu,\ xA \ge w,\ x \ge 0 \tag{1.6.1}$$

и двойственную ей задачу п. (1.5.4)

$$\max yw,\ Ay \le u,\ y \ge 0, \tag{1.6.2}$$

где $u = (1, \ldots, 1) \in R^m$, $w = (1, \ldots, 1) \in R^n$. Из строгой положительности матрицы A следует, что существует такой вектор $x > 0$, для которого $xA > w$, т. е. задача (1.6.1) имеет допустимое решение. С другой стороны, вектор $y = 0$ является допустимым решением задачи (1.6.2). Поэтому по теореме о двойственности линейного программирования (см. п. 1.5.4) обе задачи (1.6.1) и (1.6.2) имеют оптимальные решения $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно, при этом

$$\overline{x}u = \overline{y}w = \Theta > 0. \tag{1.6.3}$$

Рассмотрим векторы $x^* = \overline{x}/\Theta$ и $y^* = \overline{y}/\Theta$ и покажем, что они являются оптимальными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно в игре $\overline{\Gamma}_A$, при этом значение игры равно $1/\Theta$.

Действительно, из (1.6.3) имеем

$$x^*u = (\overline{x}u)/\Theta = (\overline{y}w)/\Theta = y^*w = 1,$$

а из допустимости $\overline{x}$ и $\overline{y}$ для задач (1.6.1), (1.6.2), следует, что $x^* = \overline{x}/\Theta \geq 0$ и $y^* = \overline{y}/\Theta \geq 0$, т. е. x^* и y^* — смешанные стратегии игроков 1 и 2 в игре Γ_A.

Вычислим выигрыш игрока 1 в ситуации (x^*, y^*):

$$K(x^*, y^*) = x^*Ay^* = (\overline{x}A\overline{y})/\Theta^2. \tag{1.6.4}$$

С другой стороны, из допустимости векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ для задач (1.6.1), (1.6.2) и равенства (1.6.3) имеем

$$\Theta = w\overline{y} \leq (\overline{x}A)\overline{y} = \overline{x}(A\overline{y}) \leq \overline{x}u = \Theta. \tag{1.6.5}$$

Таким образом, $\overline{x}A\overline{y} = \Theta$, из (1.6.4) получаем, что

$$K(x^*, y^*) = 1/\Theta. \tag{1.6.6}$$

Пусть $x \in X$ и $y \in Y$ — произвольные смешанные стратегии игроков 1 и 2. Тогда выполняются неравенства

$$K(x^*, y) = (x^*A)y = (\overline{x}A)y/\Theta \geq (wy)/\Theta = 1/\Theta, \tag{1.6.7}$$

$$K(x, y^*) = x(Ay^*) = x(A\overline{y})/\Theta \leq (xu)/\Theta = 1/\Theta. \tag{1.6.8}$$

Сравнивая (1.6.6)–(1.6.8), получаем, что (x^*, y^*) ситуация равновесия, а $1/\Theta$ — значение игры Γ_A со строго положительной матрицей A.

Теперь рассмотрим $(m \times n)$- игру $\Gamma_{A'}$ с произвольной матрицей $A' = \{a'_{ij}\}$. Тогда существует такая константа $\beta > 0$, что матрица $A = A' + B$ строго положительна, где $B = \{\beta_{ij}\}$ — $(m \times n)$-матрица, $\beta_{ij} = \beta$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. В игре Γ_A существует ситуация равновесия (x^*, y^*) в смешанных стратегиях, а значение игры равно $v_A = 1/\Theta$, где Θ определяется как в (1.6.3).

Из леммы п. 1.4.3 следует, что $(x^*, y^*) \in Z(\overline{\Gamma}_{A'})$ — ситуация равновесия в игре $\Gamma_{A'}$ в смешанных стратегиях, а значение игры равно $v_{A'} = v_A - \beta = 1/\Theta - \beta$. Теорема доказана.

Неформально факт существования решения в классе смешанных стратегий означает, что игроки всегда могут снять неопределенность выбора стратегии, с которой они столкнулись перед началом игры, рандомизируя множество чистых стратегий. Следует отметить, что не всегда в антагонистических играх существует решение в смешанных стратегиях. Примеры таких игр с бесконечным числом стратегий приведены в 2.3, 2.4.

Заметим также, что доказательство теоремы конструктивно, поскольку сводит решение матричной игры к задаче линейного программирования, при этом алгоритм решения игры $\Gamma_{A'}$ следующий.