

А. М. Ахтямов

**ТЕОРИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ
КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 517.984.54:534

ББК 22.1

А 95

Ахтямов А. М. **Теория идентификации краевых условий и ее приложения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-1127-0.

В книге впервые дано систематическое изложение исследований по новому научному направлению — теории идентификации краевых условий спектральных задач по собственным значениям. Монография представляет собой не просто обобщение результатов из ранее опубликованных автором статей, а вводит новые обобщающие подходы, терминологию, намечает новые задачи и дальнейшие пути развития теории. В качестве приложений теории разрабатываются методы диагностики закреплений механических систем по собственным частотам их колебаний, а также способы создания закреплений, обеспечивающих нужный (безопасный) диапазон частот колебаний закрепляемой механической системы.

Книга рассчитана на специалистов, аспирантов и студентов, интересующихся задачами акустической диагностики и обратными задачами математической физики.

ISBN 978-5-9221-1127-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© А. М. Ахтямов, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	8
Глава 1. Идентификация вида и параметров закрепления стержня	14
1.1. Предварительные сведения и определения	14
1.1.1. Звуковые колебания и колебательные системы (14).	
1.1.2. Обратные задачи и их классификация (17).	
1.1.3. Целая функция и теорема Адамара (23).	
1.1.4. Спектральная задача, краевые условия, собственные значения и характеристический определитель (26).	
1.1.5. Идентификация матрицы по ее минорам (30).	
1.2. Акустическая диагностика одного из концов стержня	35
1.2.1. Постановка обратной задачи (35).	
1.2.2. Единственность решения обратной задачи (38).	
1.2.3. Метод биортогональной системы и метод хорошо обусловленной матрицы (41).	
1.2.4. Пример решения задачи методом хорошо обусловленной матрицы (43).	
1.2.5. Метод неопределенной системы (45).	
1.2.6. Примеры решения задачи методом неопределенной системы (47).	
1.3. Идентификация вида и параметров закрепления обоих концов стержня	49
1.3.1. Постановка обратной задачи (50).	
1.3.2. Теорема о двойственности решения (51).	
1.3.3. Метод решения (55).	
1.3.4. Устойчивость решения (56).	
1.3.5. Примеры и численные эксперименты (57).	
1.4. Идентификация нераспадающихся закреплений	60
1.4.1. Идентификация нераспадающихся условий закрепления стержня по одному набору собственных частот (60).	
1.4.2. Идентификация нераспадающихся закреплений стержня по двум наборам собственных частот (63).	
1.5. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки	68
1.5.1. Балка Тимошенко (68).	
1.5.2. Единственность решения обратной задачи (71).	
1.5.3. Метод решения обратной задачи (72).	
Глава 2. Идентификация закреплений пластин и оболочек	75
2.1. Идентификация вида и параметров закрепления круговой пластины	75
2.1.1. Прямая задача (75).	
2.1.2. Постановка обратной задачи (79).	
2.1.3. Единственность решения обратной задачи (79).	
2.1.4. Точное решение (81).	
2.1.5. Приближенное решение (84).	
2.1.6. Устойчивость решения (86).	
2.1.7. Примеры (89).	
2.1.8. Идентификация условий закрепления пластины переменной толщины (94).	
2.2. Диагностика закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее осесимметрических колебаний	94

2.2.1. Постановка обратной задачи (94). 2.2.2. Единственность решения обратной задачи (97). 2.2.3. Метод распознавания краевых условий (100). 2.2.4. Примеры (102).	
2.3. Диагностика закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее неосесимметрических колебаний.	106
2.3.1. Необходимость учета неосесимметрических колебаний (106).	
2.3.2. Постановка обратной задачи (107). 2.3.3. Метод распознавания краевых условий (108).	
2.4. Диагностика вида и параметров закрепления двух противоположных краев прямоугольной пластины.	112
2.4.1. Постановка задачи (112). 2.4.2. Прямая задача (113).	
2.4.3. Обратная задача (115). 2.4.4. Теорема о двойственности решения обратной задачи (117). 2.4.5. Метод распознавания краевых условий (121). 2.4.6. Примеры (123).	
2.5. Определение виброзащитного закрепления трубопровода с жидкостью по собственным частотам его изгибных колебаний.	129
2.5.1. Прямая задача (129). 2.5.2. Обратная задача (131).	
2.5.3. Единственность и двойственность решения обратной задачи (132). 2.5.4. Метод отыскания краевых условий в случае когда жидкость не течет по трубопроводу (137). 2.5.5. Метод отыскания краевых условий в случае, когда жидкость течет по трубопроводу (139). 2.5.6. Определение закреплений концов трубопровода в частном случае (141).	
Глава 3. Единственность решения обратных задач с нераспадающимися краевыми условиями.	144
3.1. Единственность восстановления краевых условий для задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка.	144
3.1.1. Постановка задачи и ее место среди обратных спектральных задач (144). 3.1.2. Теорема единственности (145). 3.1.3. Контрпримеры (148). 3.1.4. Алгоритм восстановления краевых условий (151). 3.1.5. Случай, когда корни характеристического уравнения — константы (155). 3.1.6. Случай, когда корни характеристического уравнения являются переменными (160). 3.1.7. Восстановление краевых условий известного порядка (163).	
3.2. Восстановление краевых условий для задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка по пяти собственным значениям.	166
3.2.1. Постановка задачи (166). 3.2.2. Метод решения (167).	
3.2.3. Устойчивость решения (169). 3.2.4. Примеры (174).	
3.3. Восстановление краевых условий для задачи с дифференциальным уравнением 3-го порядка.	178
3.3.1. Постановка задачи (178). 3.3.2. Единственность решения (178). 3.3.3. Метод решения (185). 3.3.4. Метод решения обратной задачи (187). 3.3.5. Устойчивость решения (188). 3.3.6. Пример (192).	
3.4. Однозначность восстановления краевых условий для задачи с дифференциальным уравнением 4-го порядка.	194
3.4.1. Постановка задачи (194). 3.4.2. Единственность решения (195).	

Глава 4. Идентификация краевых условий задачи Штурма–Лиувилля	198
4.1. Отыскание k коэффициентов краевого условия по k собственным значениям	198
4.1.1. Постановка двух обратных задач (198). 4.1.2. Решение первой обратной задачи (200). 4.1.3. Пример решения первой обратной задачи (202). 4.1.4. Контрпримеры, касающиеся первой обратной задачи (202). 4.1.5. Решение второй обратной задачи (203). 4.1.6. Контрпримеры, касающиеся второй обратной задачи (203).	
4.2. Акустическая диагностика закрепления кольцевой мембраны	204
4.2.1. Постановка обратной задачи (204). 4.2.2. Единственность решения обратной задачи (205). 4.2.3. Метод распознавания краевых условий (207). 4.2.4. Пример (208).	
4.3. Диагностика закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам ее колебаний	209
4.3.1. Постановка задачи (210). 4.3.2. Метод идентификации параметров упругого закрепления мембраны на каждой из ее сторон (211). 4.3.3. Примеры (213). 4.3.4. Метод распознавания условий Дирихле и Неймана каждой из сторон прямоугольной мембраны (213).	
4.4. Диагностика условий замыкания электронных систем	214
4.4.1. Постановка задачи (214). 4.4.2. Метод решения (215). 4.4.3. Примеры (217).	
4.5. Идентификация краевых условий Штурма	217
4.5.1. Двойственность решения задачи восстановления краевых условий Штурма (217). 4.5.2. Восстановление краевых условий Штурма по двум собственным значениям (227).	
4.6. Идентификация закрепления графа из n струн	228
4.6.1. Постановка обратной задачи (228). 4.6.2. Количество решений обратной задачи (229). 4.6.3. Метод решения обратной задачи (230). 4.6.4. Пример решения обратной задачи (231).	
Глава 5. Обратные задачи Ильгамова	232
5.1. Идентификация краевых условий и нагрузок, действующих на стержень	232
5.1.1. Постановка обратной задачи (232). 5.1.2. Метод нахождения канонических краевых условий (234).	
5.2. Обратная статическая задача для графа из стержней	237
5.2.1. Постановка обратной задачи (237). 5.2.2. Решение обратной задачи (238). 5.2.3. Пример (238).	
5.3. Обратная статическая задача для бруса переменного сечения и пластины переменной толщины	240
5.3.1. Обратная задача для бруса переменного сечения (240). 5.3.2. Опознание закрепления и нагрузки кольцевой пластины по значениям прогибов (242).	
5.4. Граничная ретроспективная обратная задача	244

5.4.1. Постановка первой ретроспективной обратной задачи (244).	
5.4.2. Отыскание момента удара и длины стержня (246).	
5.4.3. Отыскание массы груза и скорости, с которой он двигался до удара по стержню (246).	
5.4.4. Пример решения первой ретроспективной обратной задачи (248).	
5.4.5. Постановка и решение второй ретроспективной обратной задачи (248).	
5.4.6. Пример решения второй ретроспективной задачи (251).	
Заключение. Проблемы и перспективы	252
Список литературы	256
Предметный указатель	269

Предисловие

В настоящей книге впервые дается систематическое изложение результатов по новому научному направлению, возникшему в конце 20 столетия — теории идентификации краевых условий спектральных задач по собственным значениям. Рассмотрены также статические и ретроспективные граничные обратные задачи. Причем приведены результаты фундаментальных исследований, касающиеся как чистой математики, так и их приложений в механике, электродинамике, технической диагностике и теории виброзащиты.

Монография состоит из пяти глав, введения, заключения, предметного указателя и списка литературы. Каждая глава, введение и заключение предваряется эпиграфом и краткой аннотацией. Главы, в свою очередь, подразделяются на параграфы, которые имеют двойную нумерацию, первый номер в которой — это номер главы, второй — номер параграфа в этой главе. Каждый параграф также имеет свою аннотацию. Теоремы, примеры и замечания пронумерованы тремя цифрами, означающими номер главы, номер параграфа и номер самой теоремы (примера, замечания) в параграфе. В конце книги приводится предметный указатель, по которому легко можно найти тот или иной термин.

Автор выражает глубокую признательность своим учителям — М. А. Ильгамову, Я. Т. Султанаеву, А. А. Шкаликову — за полезные обсуждения; Р. М. Асадуллину, А. В. Муфтахову и С. Ф. Урманчееву — за полезные советы в развитии некоторых исследований; а также Л. И. Абзелиловой, Р. Ф. Муртазиной, Э. Р. Нафиковой, Г. Ф. Сафиной, Л. С. Ямиловой — за содействие в реализации некоторых идей автора и совместные публикации, которые были использованы при написании некоторых параграфов настоящего издания.

Ряд работ, вошедших в монографию, выполнен в рамках грантов РФФИ (№ 08-01-97026-р-поволжье-а, 08-01-97008-р-поволжье-а, 06-01-00354-а, 05-01-97914-р-агидель-а, 01-01-00996-а), Министерства образования России (№ Е-02-1.0-77) и Академии наук Республики Башкортостан (ГНТП № 3).

Всякий раз, когда мы внимательно вглядываемся в мир, мы создаем теорию.

И. Гёте

Введение

Во введении приводится краткий обзор близких теме монографии исследований по акустической диагностике, теории снижения шума, теории обратных спектральных задач и другим смежным вопросам. Показывается место результатов автора в ряду этих исследований.

Обзор близких теме монографии исследований

Суть и значение исследуемых нами задач лучше понять на примере однородного стержня. Ниже на примере стержня поясняется постановка общей задачи идентификации краевых условий.

Порой некоторые специалисты, не производя разборку двигателя, по тончайшим особенностям шумов в двигателе могут предсказывать, где находится неисправность. Является ли это случайным угадыванием, или же специалисты действительно «слышат» неисправность, и такому распознаванию может научиться и обычный человек после соответствующей тренировки?

Этот, казалось бы, несерьезный вопрос связан с фундаментальными проблемами математики и механики, а ответ на него важен для создания приборов технической диагностики, а также малозумных и безопасных для здоровья человека двигателей.

Поставленный нами вопрос порождает множество других более конкретных. Например, можно ли по собственным частотам колебаний стержня определить то, как закреплены концы стержня? Закреплены они на пружинках, заделаны или свободны? И если они закреплены на пружинках, то каковы коэффициенты жесткостей пружинок? Можно

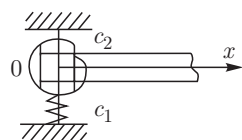


Рис. 1. Закрепление левого конца стержня

ли по собственным частотам колебаний определить, как закреплены другие механические системы, такие как пластина, мембрана или оболочка? Какие виды и параметры закрепления нужны для того, чтобы частоты колебаний механической системы находились в нужном безопасном для здоровья человека диапазоне?

Как известно, стержень может быть закреплен по-разному. На рис. 1 изображено закрепление левого конца стержня. Через c_1 обозначена жесткость пружины, которая препятствует вертикальному смещению. Через c_2 обозначена

жесткость пружины, которая препятствует повороту стержня. В общем случае считаем, что коэффициенты жесткости пружинок c_1 и c_2 могут изменяться в широких пределах. При различных c_1 и c_2 получаем различные виды закрепления. Например, в случае $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ (пружинок нет вообще) на конце стержня реализуется «свободный конец», в случае $c_1 = \infty$ и $c_2 = \infty$ — «заделка», в случае $c_1 = \infty$ и $c_2 = 0$ — «свободное опирание», в случае $c_1 = 0$ и $c_2 = \infty$ — «плавающая заделка», в случае $c_1 = c$ ($0 < c < +\infty$) и $c_2 = 0$ — «упругое опирание».

В настоящей монографии показано, что если стержень является однородным, то вид и параметры закрепления его концов определяются однозначно с точностью до перестановок закреплений на концах стержня. Например, по собственным частотам можно определить, что левый конец стержня закреплен упруго с коэффициентами жесткостей пружинок $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$, а правый конец заделан, или же наоборот: левый конец заделан, а правый конец стержня закреплен упруго с коэффициентами жесткостей $c_1 = 2$ и $c_2 = 1$.

Одинаковое звучание стержней, закрепленных таким образом, понятно. Ведь при перемене закреплений на концах однородного стержня звучание его колебаний не изменится. Это связано с тем, что концы однородного стержня равноправны, и поэтому замена закреплений будет равносильна повороту стержня «со старыми закреплениями» на 180° вокруг своего серединного перпендикуляра, что, конечно же, не изменит звучания. Это — очевидные рассуждения. Однако не они составляют суть исследования. Основной результат — это теорема о двойственности решения поставленной задачи. Двойственность решения задачи означает не то, что «симметричные» закрепления однородного стержня звучат одинаково, а то, что всего решений ровно два, т. е. что кроме двух «симметричных» закреплений других закреплений с таким же спектром частот не бывает. Например, стержень, закрепленный упруго на одном конце с коэффициентами жесткостей пружинок 1 и 2 и заделанный на другом конце, не прозвучит также как стержень, закрепленный на обоих концах упруго с коэффициентами жесткостей пружинок 1 и 1. Показано также, что для определения закреплений обоих концов стержня не обязательно знать все собственные частоты. Достаточно лишь девяти собственных частот.

Аналогичные результаты изложены и для неоднородных стержней и для стержней с более сложным видом закреплений. Отметим, что в случае неоднородного стержня два найденных решения уже не являются «симметричными». Взаимосвязь между ними более сложная.

Похожие результаты получены и для других механических распределенных систем — пластин, мембран и оболочек.

Рассмотрены также задачи идентификации нераспадающихся краевых условий, граничные обратные задачи Штурма–Лиувилля, обратные статические и ретроспективные задачи, а также приложения

поставленных задач в механике, в технической диагностике, в электродинамике и в теории виброзащиты.

Большинство постановок задач и результаты, рассмотренные в монографии, являются новыми, однако их можно рассматривать как задачи, возникшие на стыке наук, уже имеющих богатую историю, — теории акустической диагностики, теории снижения шума и виброзащиты, а также теории обратных задач математической физики и теории обратных спектральных задач.

Задачами *технической диагностики* люди занимаются с самого начала появления техники. Этим задачам посвящено большое количество работ (см., например, библиографию в работах [53, 69]).

Процессы, протекающие в механизмах и двигателях, являются источником шума. По шуму в двигателе часто можно судить о процессах, протекающих в нем [5, 71].

Наука, изучающая возможности распознавания характеристик двигателя или другого механического механизма по его шуму, носит название *акустической диагностики*. Задачи акустической диагностики могут быть различными. В работе [100], например, рассматривались задачи обнаружения дефектов в судовых механизмах по шуму, вызываемому упругими колебаниями от соударения сопряженных деталей.

Аналогичные задачи обнаружения дефектов решались в [58, 81], но уже для поиска дефектов в автотракторных двигателях. В работах [5, 53, 124] также решались задачи акустической диагностики механизмов. В [221] ставился вопрос: можно ли по звучанию барабана установить его форму? В [234] по сдвигам собственных частот определялись размеры объекта и его положение в камере. Статья [62] была посвящена способу обнаружения шпал, потерявших плотный контакт с балластом насыпи, при помощи ударного возбуждения колебаний и анализа акустических сигналов. В работах [211, 212] исследовались условия на входе и выходе выхлопных труб и трубопроводных систем, а в [174, 175] — задачи идентификации объектов по их акустическому отклику.

В отличие от всех этих работ по диагностике в настоящей монографии отыскиваются не форма области, размеры объекта, его местоположение или состояние, а вид его закрепления.

В акустической диагностике очень давно применяется метод проверки трещин, который носит название *интегрального метода свободных колебаний* [122]. Этот метод используется при проверке стеклянной посуды, бандажей железнодорожных колес, ударных музыкальных инструментов и других объектов по «чистоте звона», вызываемого механическим ударом. Смещение собственной частоты — один из признаков наличия дефектов.

В настоящей монографии при изучении возможностей диагностирования закреплений механических систем были применены методы, которые сродни интегральному методу свободных колебаний по своим целям. Они также позволяют по собственным частотам колебаний,

вызываемых механическим ударом, диагностировать систему, а именно вид и параметры ее закрепления. Преимуществом наших методов диагностирования, так же как интегрального метода свободных колебаний, является то, что они не зависят от силы механического удара (амплитуды колебаний). Отличие же состоит в самой сути этих методов и в том, что нами диагностируются иные объекты — закрепления, а не трещины.

Найденные нами методы связаны не только с задачами акустической диагностики, но и с *проблемой снижения вредного воздействия шума и звуковой вибрации*. Эта проблема относится к числу тех проблем, с которыми человечество столкнулось в древнейшие времена. Трудно сказать, когда были сделаны первые практические шаги в решении этой проблемы, однако цивилизации Древнего мира, безусловно, уже достаточно ясно осознавали их необходимость. Об этом свидетельствует, в частности, древнешумерский эпос о Гильгамеше (около 2400 г. до н. э.) [96], в котором содержится весьма своеобразная трактовка большого наводнения как противошумового мероприятия, осуществленного шумерским богом в наказание человечеству за чрезмерный шум на Земле. Одним из первых актов, регулировавших шум в городе, стал обязательный запрет, принятый в древнегреческом городе Сибарисе (VIII век до н. э.). Он не позволял мастерам-ремесленникам располагать свои мастерские в пределах городских стен. Таким образом, жители Сибариса — сибариты — стали, по-видимому, пионерами в деле ограничения промышленного шума и создания акустического комфорта в условиях городской среды. Однако до 40-х гг. XX столетия попытки снижения шума носили скорее случайный и ограничительный, нежели систематический и научный характер.

Бурный прогресс техники привел к принципиальному изменению ситуации: повседневная жизнь человечества оказалась неразрывно связанной с многочисленными механизмами, устройствами, транспортными средствами, создающими интенсивные шум и вибрации. После Второй Мировой войны во многих развитых странах развернулись всесторонние исследования последствий воздействия шума и вибрации на организм человека и животных. В результате этих исследований было установлено, что от шума в первую очередь страдают центральная нервная и сердечно-сосудистая системы, а орган слуха поражается значительно позже. Выяснилось также, что первоначально принятые нормы на шум и вибрацию целого ряда машин и механизмов требуют значительного ужесточения. Следствием этого стало существенное ужесточение шумовых норм, проведенное в последние полтора–два десятилетия по отношению к целому ряду отраслевых шумовых стандартов (ограничений на шум самолетов, автомобилей и т. д.) и всплеска научных исследований по снижению шума и вибрации [84, 96, 132, 235]. Однако научных работ по созданию закреплений, обеспечивающих нужный (безопасный) диапазон частот колебаний механических систем не было. А такие работы нужны, поскольку звуки

в определенных диапазонах частот вредны для человека. Напомним, что инфранизкие звуки в интервале частот 5–7 Гц оказывают вредное воздействие на здоровье человека. Особенно негативно они влияют на психику: поражаются все виды интеллектуальной деятельности, ухудшается настроение, иногда появляется ощущение растерянности, тревоги, испуга, страха; а при высокой интенсивности — чувство слабости, как после сильного нервного потрясения. Даже слабые инфразвуки могут оказывать на человека серьезное воздействие, в особенности, если они носят длительный характер. Именно инфразвуками, проникающими сквозь самые толстые стены, обусловлены многие нервные болезни горожан. Опасны и ультразвуки свыше 4000 кГц. Они способны разрушать живые ткани. Первыми жертвами таких частот, как известно, стали рыбы, убитые и оглушенные ультразвуком, когда Ланжевен и Вуд испытывали эхолот в бухте Тулона. У человека при воздействии волн таких частот нередко наблюдаются функциональные отклонения нервной и сердечно-сосудистой систем, изменение давления, состава и свойств крови, головные боли, быстрая утомляемость.

Поэтому и возникает задача отыскания таких закреплений, которые бы обеспечивали нужный (безопасный) диапазон частот колебаний. Математически это та же задача, что и поставленная нами выше задача акустической диагностики. Ведь там тоже требуется идентифицировать вид и параметры закрепления по набору собственных частот. Поэтому полученные нами результаты для стержней, мембран и пластин переносятся без каких-либо изменений и на задачи виброзащиты.

Рассматриваемые нами задачи тематически можно отнести к *граничным обратным задачам*. Однако ранее задачи восстановления краевых условий не по одному или двум собственным значениям, а по множеству собственных значений, не рассматривались. Преимущественно рассматривались задачи восстановления граничных условий по решениям дифференциальных уравнений.

Отметим, что задачи восстановления краевых условий относят и к более широкому классу обратных задач — *обратным задачам математической физики* [80, 138]. В большинстве, постановки таких задач являются *некорректными* [85, 101, 168, 169, 170]. В отличие от них, задачи, рассмотренные в настоящей книге — *корректно поставлены*.

Отличаются рассматриваемые в книге задачи и от традиционных *обратных спектральных задач* (см., например, [109, 114–116, 142–144, 184] и библиографию к этим работам). В абсолютном большинстве обратных спектральных задач требуется восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий. Однако в них в качестве данных восстановления краевых условий используется не один спектр (как в нашей монографии), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля, или так называемые весовые числа). К тому же основной целью этих работ является восстановление коэффициен-

тов в уравнении, а не в краевых условиях. Цель же настоящей работы состоит в восстановлении краевых условий спектральной задачи с известными коэффициентами в уравнении только по одному спектру.

Отметим, что созданные нами методы идентификации краевых условий применяются и в традиционной теории обратных спектральных задач. В совместных работах автора с академиком В. А. Садовничим и профессором Я. Т. Султанаевым были доказаны теоремы о единственности и устойчивости решения обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями и предъявлены явные решения обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями, позволяющие решать ее численно [146–154]. В настоящей работе мы не останавливаемся на этих исследованиях, поскольку им посвящена отдельная совместная монография [155].

Таким образом, настоящая монография отличается от традиционных работ по теориям акустической диагностики, снижения шума, обратных задач математической физики и обратных спектральных задач как по постановке, так и по методам решения. Тем не менее, задачи идентификации краевых условий тематически принадлежат этим теориям. Поэтому они вполне могут рассматриваться в рамках каждой из этих теорий и решаться как методами математики и механики, так и методами физики и техники; как теоретически, так и экспериментально. В нашу задачу однако не входят экспериментальное исследование по возможностям акустического диагностирования, конструирование приборов технической диагностики и создание виброзащитных закреплений. Цель настоящей монографии — дать ответы на некоторые фундаментальные вопросы о возможностях идентификации краевых условий с использованием для этого методов математики и механики.

*Лишь первых познаний блеснет тебе свет,
Узнаешь: предела для знания нет.*

Фирдоуси

Глава 1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВИДА И ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Даются необходимые в дальнейшем определения и сведения из физики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, линейной алгебры и теории целых функций. Приводится классификация обратных задач. Рассматриваются задачи о диагностировании вида и параметров закреплений стержней, показывается корректность соответствующих задач; разрабатываются методы их решения; доказываются теоремы существования, единственности и устойчивости их решений и приводятся результаты численных экспериментов.

1.1. Предварительные сведения и определения

Ниже приводятся необходимые в дальнейшем определения, понятия и примеры, которые почерпнуты преимущественно из работ А. О. Ватульяна [63], В. М. Вержбицкого [64], А. М. Денисова [80], А. А. Гольдберга, Б. Я. Левина, И. В. Островского [72], Г. Корна, Т. Корн [91], Б. Я. Левина [108], Д. Б. Мамфорда [112], М. М. Махмутова [117], М. А. Наймарка [120], М. М. Постникова [133, 134], С. М. Усманова [176], Д. К. Фаддеева, В. Н. Фаддеевой [178], W. V. D. Hodge и D. Pedoe [215].

1.1.1. Звуковые колебания и колебательные системы. Напомним известные представления о звуке, собственных частотах, тонах и обертонах и т. п. Как известно, звук передается с помощью звуковых волн. Если оттянуть струну гитары, а потом отпустить ее, то она начнет дрожать, т. е. колебаться около своего первоначального положения равновесия. Пока струна колеблется, мы слышим *звук*. Как только струна успокоится, звук затихает. Рождение звука — результат сгущения и разрежения молекул воздуха. Колебаясь из стороны в сторону, струна теснит, как бы прессует перед собой молекулы воздуха, образуя в некотором его объеме область повышенного, а сзади, наоборот, область пониженного давления. Это и есть звуковые волны. Чем больше амплитуда звуковой волны, тем больше энергии она несет в себе, тем *громче* воспринимаемый нами звук. А вот чем больше число звуковых

колебаний в единицу времени, тем больше его *частота*. Число звуковых колебаний в секунду именуется *герцем* (Гц). Крылья пчел совершают 200 колебаний в секунду, поэтому звук, который мы слышим, имеет частоту 200 герц. Звук комариного роя является более высоким, так как комары машут крыльями еще быстрее, совершая до 500 колебаний в секунду. Таким образом, благодаря числовой характеристике, герцам, мы можем распознать (диагностировать): комару или пчеле принадлежит соответствующий звук. Человеческое ухо способно реагировать на относительно небольшой диапазон частот звуковых колебаний — примерно от 16 Гц до 20 кГц. Остальные колебания мы не слышим. Это колебания частотой до 16 Гц, называемые *инфразвуковыми*, колебания от 20 кГц до 1 ГГц, называемые *ультразвуковыми* и колебания свыше 20 кГц, называемые *гиперзвуковыми*. Каждый музыкальный инструмент обладает своим собственным звучанием. Любая нота, которую мы слышим, сопровождается другими, высокими звуками, называемыми *обертонами* (гармониками). Благодаря обертонам мы и отличаем ноту «до», прозвучавшую на баяне, от той же ноты, прозвучавшей на скрипке. Ведь звуки состоят не из одной, а нескольких волн различной частоты. Музыкальные инструменты издают разные звуки, так как они обладают различными обертонами. Струна, например, извиваясь одновременно несколькими способами, и рождает смесь звуковых волн. Из-за этого мы слышим звук более богатый, более насыщенный. Все частоты волн, из которых состоит звук, называются *спектром частот*.

Классифицировать колебательные системы можно по различным признакам. Одним из важнейших признаков является *число степеней свободы системы*, т. е. количество независимых числовых параметров, однозначно определяющих конфигурацию системы в любой фиксированный момент времени t . Понятие конфигурации само по себе нуждается в определении. Здесь ограничимся указанием на то, что для механических систем под конфигурацией понимается положение всех точек системы в пространстве.

Различают *системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы*. В последнем случае множество степеней свободы может быть либо *счетным*, либо *континуальным*. Системы, обладающие континуальным множеством степеней свободы, называют *распределенными*. С математической точки зрения колебания систем с конечным числом степеней свободы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а колебания распределенных систем — дифференциальными уравнениями в частных производных. Под *упругими распределенными системами* понимают упругие механические системы с непрерывно распределенными массой и жесткостью. Распределенные упругие системы называют *линейными*, если они описываются линейными уравнениями в частных производных. В настоящей книге изучаются обратные задачи именно для таких упругих распределенных систем — струн, стержней, пластин и оболочек.

Под *струной* понимают тонкое упругое одномерное тело с пренебрежимо малой жесткостью на изгиб. Колебания струны l , растянутой усилием N , происходящие в плоскости Oxz , описываются уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t).$$

Здесь w — отклонение струны в направлении Oz ; ρ — плотность материала струны; F — площадь поперечного сечения; q — интенсивность нагрузки, действующей в плоскости Oxz .

Под *стержнем* понимают одномерное упругое тело (два размера малы по сравнению с третьим), обладающее конечной жесткостью на растяжение, кручение и изгиб. Продольные колебания стержня описываются уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t).$$

Изгибные колебания стержня описываются уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t).$$

Здесь J — момент инерции относительно Oy .

Под *пластиной* понимают тонкое двухмерное тело, один размер которого (толщина) много меньше двух других размеров и срединная поверхность которого есть плоскость. *Срединной поверхностью* называют поверхность, равноотстоящую от внешних (лицевых) поверхностей двухмерного тела.

В основе *классической теории пластин* лежит совокупность допущений, называемая *гипотезами Кирхгофа–Лява*: прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, после деформации остается прямым и нормальным к срединной поверхности, не меняя своей длины. Если толщина h однородной пластины постоянна (цилиндрическая жесткость $D = \text{const}$, то уравнение колебаний принимает форму

$$D \Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t).$$

Оболочкой называют тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с основными размерами тела.

Термином *вибрация* чаще всего пользуются там, где колебания имеют относительно малую амплитуду и не слишком низкую частоту (например, едва ли можно принять термин вибрация, когда говорят о раскачивании качелей). Совокупность методов и средств для уменьшения вредного воздействия вибрации на человека, а также приборы и механизмы называется *виброзащитой*. Изучение состояния объекта на основе анализа эксплуатационных или искусственно возбуждаемых вибраций называют *вибродиагностикой*.

1.1.2. Обратные задачи и их классификация. Обычно под *прямой задачей* понимают прогнозирование последствий каких-либо действий, а под *обратной задачей* понимают задачу выяснения того, что явилось причиной этих (или других) последствий. Так, например, прогнозирование последствий лечения конкретными медикаментами — это прямая задача, а задача медицинской диагностики, при которых по цвету языка, температуре тела и т.п. врач должен поставить точный диагноз — это обратная задача. Прямые и обратные задачи решают практически все. Уинстон Черчилль говорил: «Политик должен уметь предсказать, что произойдет завтра, через неделю, через месяц и через год. А потом объяснить, почему этого не произошло». Не трудно догадаться, которая из задач политика является прямой, а которая — обратной.

В терминах «причина–следствие» можно сказать, что прямая задача — это определение следствий по причине, а обратная — определение причины по следствию.

Конечно, в некоторых случаях деление на прямые и обратные задачи весьма условно. Ведь часто явления взаимосвязаны: причина может выступать в роли следствия, а следствие в роли причины. Однако так уж сложилось, что в математике, механике и физике под прямыми задачами понимают те задачи, которые начали изучать раньше и которые ныне уже являются классическими. Исходными данными («причинами») в таких задачах выступают коэффициенты дифференциальных уравнений, граничные и начальные условия, геометрия области, а в качестве получаемых данных («следствий») — решения краевых задач на некотором множестве или собственные значения. В обратных задачах наоборот: решения краевых задач на некотором множестве или собственные значения краевых задач выступают в качестве исходных данных («причин»), а в качестве искоемых данных («следствий») выбираются либо коэффициенты дифференциальных уравнений, либо граничные или начальные условия, либо геометрия области.

К настоящему времени сложилась следующая условная *классификация обратных задач* [63].

1. *Ретроспективные обратные задачи* (задачи с обращенным временем) — задачи определения начального состояния (начальных условий) по некоторым функционалам или операторам от решения.

Пример 1.1.1. Рассмотрим уравнение движения материальной точки под действием заданной силы:

$$mx''(t) = F(t).$$

Зная $x(t)$, найти $x(0)$, $x'(0)$.

2. *Коэффициентные обратные задачи* — задачи определения коэффициентов дифференциальных операторов.

Пример 1.1.2. Рассмотрим краевую задачу

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Зная собственные значения этой задачи λ_n , найти $q(x) \in C[0, 1]$.

3. *Граничные обратные задачи* — задачи об определении граничных условий.

Пример 1.1.3. Рассмотрим процесс изменения температуры в стержне, один из концов которого теплоизолирован, а на другом поддерживается свободный теплообмен с окружающей средой, причем температура имеет некоторое заданное начальное распределение $\varphi(x)$. Процесс описывается следующей начально-краевой задачей:

$$u_t = a u_{xx}, \quad u(0, t) + \alpha(t) u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Зная $u(l, t)$, найти коэффициент теплообмена $\alpha(t)$.

4. *Геометрические обратные задачи* — задачи об определении области.

Пример 1.1.4. Рассмотрим уравнение

$$\Delta U + \lambda_n U = 0, \quad x \in G; \quad U|_{\partial G} = 0.$$

Зная все собственные значения λ_n задачи, определить форму области G (можно ли определить форму барабана по его звучанию?).

5. *Обратные задачи смешанных типов* — задачи, в которых неизвестными являются несколько факторов из 1–4.

Пример 1.1.5. Рассмотрим две краевые задачи:

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= \lambda y(x), & y'(0) - h y(0) &= 0, \\ y'(1) + H y(1) &= 0, & x \in [0, 1], \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= \mu y(x), & y'(0) - h_1 y(0) &= 0, \\ y'(1) + H y(1) &= 0, & h_1 &\neq h. \end{aligned}$$

Зная собственные значения этих задач λ_n и μ_n , найти $q(x) \in C[0, 1]$, h , h_1 , H .

Это пример задачи смешанных типов (2 и 3). Здесь требуется найти и коэффициенты дифференциального уравнения и граничные условия.

Следует отметить, что вышеприведенная классификация обратных задач является условной, и постановки задач легко трансформируются одна в другую. Например, граничные формы в примере 5 можно рас-

смаатривать как компоненты для дифференциального оператора в расширенном пространстве $L_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} -y''(x) + q(x) \\ y'(0) - h y(0) \\ y'(1) + H y(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и тогда обратная задача смешанных типов трансформируется в коэффициентную обратную задачу.

Все задачи, рассмотренные в этой монографии, можно отнести к третьему типу, т. е. к граничным обратным задачам. Заметим, однако, что может быть более правильно было бы задачи идентификации краевых условий называть краевыми обратными задачами, так как под границей обычно понимают линию, а не точку. Однако термин «граничные обратные задачи» используется в научной литературе уже и применительно к краевым задачам (см. пример 3, который был приведен выше и почерпнут из работы А. О. Ватульяна [63]). Поэтому мы будем также придерживаться уже устоявшегося термина.

Среди граничных обратных задач будем выделять задачи следующих типов: граничные обратные спектральные задачи, обратные статические задачи Ильгамова и граничные ретроспективные обратные задачи Ильгамова.

Термин *обратные спектральные задачи* уже устоялся [185]. Этот термин используется для задач восстановления дифференциальных операторов по их собственным значениям или другим спектральным данным. К этим задачам относят, в частности, хорошо известные *обратные задачи Штурма–Лиувилля*, т. е. задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по его спектральным данным.

Под *граничными обратными спектральными задачами* мы будем понимать задачи идентификации граничных (или краевых) условий по известному дифференциальному уравнению и известным собственным значениям. Под *граничной обратной задачей Штурма–Лиувилля* будем понимать задачу идентификации краевых условий оператора Штурма–Лиувилля по его собственным значениям. Причем, слово *идентификация* будет использоваться в этой книге в обоих смыслах, принятых в науке: 1) опознание, диагностика; 2) создание оптимальной в каком-либо смысле модели [131, с. 186].

Обратной статической задачей Ильгамова будем называть задачу восстановления краевых условий и нагрузок, действующих на механическую систему, по значениям ее прогибов в нескольких точках. В частности, под *граничной обратной статической задачей Ильгамова* будем понимать задачу восстановления краевых условий механической системы по нагрузкам, действующим на нее, и значениям прогибов системы в нескольких точках.

Ретроспективной обратной задачей Ильгамова будем называть задачу восстановления времени и места удара по трубопроводу (струне,

стержню) по показаниям тензодатчика в одной (или нескольких точках) трубопровода.

Обратные задачи подразделяют также на корректные и некорректные задачи.

Дело в том, что решение любой количественной задачи, в том числе и обратной, состоит в определении некоторого элемента z (решения задачи) по исходным данным u и может быть записано в виде

$$z = R(u). \quad (1.1.1)$$

При этом предполагается, что исходные данные u являются элементами некоторого метрического пространства U , а решение z ищется в некотором метрическом пространстве Z , т.е. $z \in Z$.

Задача (1.1.1) называется *корректно поставленной* на паре пространств U, Z (*корректной*), если выполняются следующие условия:

- 1) для любого $u \in U$ решение задачи существует;
- 2) для любого $u \in U$ решение задачи единственно;
- 3) решение задачи z непрерывно зависит от исходных данных u .

Задачи, не удовлетворяющие этим условиям, называются *некорректно поставленными* (*некорректными*).

Условия 1) и 2) характеризуют математическую определенность рассматриваемой задачи, а условие 3) — физическую детерминированность задачи.

Пример 1.1.6. Рассмотрим задачу решения системы линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$Az = u, \quad (1.1.2)$$

где A — квадратная матрица, а $u \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$. Если определитель матрицы A отличен от нуля, то для любого вектора правой части $u \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение системы (1.1.2) — вектор $z \in \mathbb{R}^n$, который имеет вид $z = A^{-1}u$, где A^{-1} — матрица, обратная к A . Из этого представления для решения следует также его непрерывная зависимость от исходных данных u , а значит, и корректность задачи решения системы (1.1.2).

В том случае, когда определитель матрицы A равен нулю, система (1.1.2) имеет решение не для любого $u \in \mathbb{R}^n$, а если для некоторого u_0 решение существует, то оно будет не единственно. Следовательно, при $\det(A) = 0$ задача является некорректной.

Исследование любой обратной задачи, связанной с изучением некоторого реального процесса, проводится, как правило, в рамках определенной *математической модели* на основе абстрактной постановки обратной задачи в виде задачи решения операторного уравнения $Az = u$. Это означает, что выбраны оператор A и класс элементов Z , содержащий искомую неизвестную характеристику $\bar{z}$. Класс U , которому принадлежит правая часть уравнения u , определяется типом

экспериментальной информации, которая привлекается для решения обратной задачи. При этом предполагается, что в классе U существует элемент $\bar{u} = A\bar{z}$, который и пытаются измерить в результате эксперимента. Однако, так как в любом эксперименте измерения проводятся с некоторой погрешностью, то элемент $\bar{u}$ неизвестен, а задан приближенный элемент $\tilde{u}$ и величина погрешности δ , характеризующая близость $\tilde{u}$ к $\bar{u}$ в некоторой метрике. Поэтому в рассматриваемой постановке задачи особое значение приобретают вопросы устойчивости. Проблема устойчивого решения обратных задач связана с построением таких методов, которые позволяют определять приближенные решения $\tilde{z}$, близкие к искомому $\bar{z}$, на основе имеющейся, приближенно заданной исходной информации $\tilde{u}$ и δ . Будем говорить, что обратная задача *устойчива*, если малым изменениям в исходных данных $\Delta u = \tilde{u} - \bar{u}$ соответствуют малые изменения решений обратной задачи $\Delta z = \tilde{z} - \bar{z}$. Другими словами, обратная задача называется устойчивой, а ее решение *устойчивым*, если из близости $\tilde{u}$ к $\bar{u}$ в некоторой метрике следует близость $\tilde{z}$ к $\bar{z}$. Как видим, понятие устойчивости связано с понятием «малости» и «близости». Но как математически понимать «малость» или «близость»? Будем считать, что переменная величина является малой, если она стремится к нулю. Следовательно, $\Delta z = \tilde{z} - \bar{z}$ мало, если $\Delta z \rightarrow 0$ или, в других обозначениях $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta z = 0$. Таким образом, обратная задача и ее решение являются *устойчивыми*, если решение обратной задачи непрерывно относительно исходных данных:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta z = 0.$$

Возвращаясь к определению корректности можно сказать, что обратная задача является *корректной*, если решение ее существует, единственно и устойчиво. В противном случае задача называется *некорректной*.

Заметим, что введенное нами понятие устойчивости решения не гарантирует, что погрешность в решении будет иметь тот же порядок малости, что и погрешность в исходных данных. Например, для системы уравнений $Ax = b$ величина Δx может быть в миллионы раз больше, чем Δb . Так происходит, например, в случае плохо обусловленной матрицы A .

Перед тем как ввести понятие плохо обусловленной матрицы введем количественную характеристику, называемую *числом обусловленности*. Мы в качестве числа обусловленности матрицы A будем использовать число $\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, где $\|A\|$ — норма матрицы A .

Будем называть матрицу A *плохо обусловленной*, если $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ является очень большим числом. В противном случае матрицу A будем называть *хорошо обусловленной*.

Чем меньше число $\nu(A)$, тем более хорошо матрица обусловлена.

Поясним смысл числа обусловленности.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (1.1.3)$$

где $\det A \neq 0$, $b \neq 0$.

Пусть правая часть уравнения (1.1.3) задана с некоторой погрешностью, т.е. вместо b на самом деле задано $b + \Delta b$. Тогда получим измененное решение $x + \Delta x$, которое удовлетворяет системе

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

где, очевидно, $\Delta x = A^{-1} \Delta b$.

Оценим относительную погрешность $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$:

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|, & \|Ax\| = \|b\| &\leq \|A\| \cdot \|x\|, \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \nu(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \end{aligned}$$

где $\nu(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ и есть число обусловленности матрицы A .

Пусть теперь с некоторой погрешностью задана не правая часть уравнения (1.1.3), а сама матрица A , т.е. вместо A на самом деле задана матрица $A + \Delta A$. В этом случае можно получить похожий результат для относительной погрешности решения

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}.$$

Полученные неравенства объясняют смысл числа обусловленности матрицы A : чем больше число $\nu(A)$, тем сильнее сказываются на решении системы ошибки в исходных данных.

Число обусловленности не меньше единицы. Действительно,

$$\nu(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \|E\| = 1.$$

Если число $\nu(A)$ велико, то матрица A и соответствующая система (1.1.3) считаются *плохо обусловленными*.

Так, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix}$$

плохо обусловлена. Действительно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1001 & -10 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu(A) = 1101 \cdot 1011 = 1113111 > 10^6.$$

Плохая обусловленность матрицы A ведет к тому, что порядки малости ошибок в правых частях b системы (1.1.3) могут сильно различаться с порядками малостей ошибок в решении.

Поясним это на примере системы уравнений

$$\begin{cases} x + 10y = 11, \\ 100x + 1001y = 1101. \end{cases}$$

Эта система уравнений на первый взгляд «хорошая». Ведь определитель системы равен единице, т.е. не близок к нулю. Решением системы как нетрудно проверить является $x = 1, y = 1$.

Чуть изменим правую часть. Придадим ей незначительное приращение, равное $\Delta b = 0,01$. Казалось бы мы вправе ожидать, что чуть измененная система уравнений

$$\begin{cases} x + 10y = 11,01, \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

будет иметь решение, близкое к $x = 1, y = 1$. Однако, это не так. Точное решение последней системы есть $x = 11,01, y = 0$.

Так как обе системы уравнений были решены точно, то такое сильное различие в решениях при малых изменениях не связано с методом решения. Причина в самой матрице системы. Как мы показали выше, она плохо обусловлена. Число обусловленности $\nu(A)$ велико ($> 10^6$).

Знание числа обусловленности позволяет оценить погрешность решения:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 1113111 \cdot \frac{0,01}{1101} = 10,11.$$

Следовательно для такой матрицы наша оценка может гарантировать только, что $\|\Delta x\| \leq 10,11$.

1.1.3. Целая функция и теорема Адамара. В монографии при доказательстве теорем о единственности решений используются понятия целой функции, ее роста и типа, а также теорема Адамара. Напомним эти понятия и теоремы.

Целой функцией называют функцию комплексного переменного, голоморфную во всей комплексной плоскости и, следовательно, представляющуюся всюду в $\mathbb{C}$ сходящимся степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Эти функции являются естественным обобщением многочленов. Скорость возрастания многочлена при удалении независимой переменной на бесконечность, очевидно, определяется его степенью. С другой стороны, число корней многочлена равно его степени. Таким образом, чем больше корней у многочлена, тем больше его рост. Эта связь между

множеством корней функции и ее ростом обобщается на произвольные целые функции.

Для характеристики роста целой функции $f(z)$ вводится функция

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

С увеличением r величина $M_f(r)$ монотонно возрастает. У целой функции, отличной от многочлена, $M_f(r)$ возрастает быстрее любой положительной степени r . Поэтому при оценке роста целых трансцендентных функций следует выбирать для сравнения функции, растущие быстрее, чем степенные. В качестве таких функций, служащих для сравнения, выбирают функции вида $\exp(r^k)$, где $k > 0$.

Целую функцию $f(z)$ называют *функцией конечного порядка*, если существует такое положительное число k , что неравенство

$$M_f(r) < \exp(r^k)$$

выполняется для всех достаточно больших значений r ($r > r_0(k)$).

Точную нижнюю границу таких чисел k называют *порядком целой функции* $f(z)$.

Из этого определения следует, что если ρ — порядок целой функции $f(z)$, а ε — произвольное положительное число, то

$$\exp(r^{\rho-\varepsilon}) < M_f(r) < \exp(r^{\rho+\varepsilon}), \quad (1.1.4)$$

причем правое неравенство выполняется для всех достаточно больших r , а левое — для некоторой последовательности $\{r_n\}$ значений r , что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$. Легко проверить, что условие (1.1.4) равносильно равенству

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r},$$

которое поэтому также может быть принято за определение порядка функции.

Неравенства, которые выполняются для всех достаточно больших значений r , мы будем для краткости в дальнейшем называть *асимптотическими неравенствами*.

Более точную характеристику роста функции данного порядка дает тип функции. *Типом σ целой функции $f(z)$ порядка ρ* называют точную нижнюю границу положительных чисел A , для которых асимптотически

$$M_f(r) < \exp(Az^\rho).$$

Так же, как и при определении порядка, легко проверить, исходя из этого определения, что тип σ функции $f(z)$ порядка ρ определяется равенством

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

При $\sigma = 0$ функцию $f(z)$ называют *функцией минимального*, при $0 < \sigma < \infty$ — *нормального* и при $\sigma = \infty$ — *максимального типа*.

Примером целой функции порядка n и типа σ может при целом n служить функция $\exp(\sigma r^n)$. Легко проверить, что $\sin z$ есть целая функция первого порядка и нормального типа 1. Функция $\cos \sqrt{z}$ имеет порядок $\rho = 1/2$ и тип $\sigma = 1$. Функция $\exp(e^z)$ дает пример целой функции бесконечного порядка.

Заметим, что при дифференцировании порядок и тип целой функции не изменяются. Порядок произведения двух целых функций различных порядков равен наибольшему из порядков сомножителей и тип произведения равен типу той функции, которая имеет больший порядок.

Целой функцией экспоненциального типа называют целую функцию первого порядка роста нормального типа.

Известно, что всякий полином может быть представлен в виде произведения линейных множителей. Аналогом этого утверждения для целых функций является теорема Адамара.

Теорема Адамара. *Целая функция $f(z)$ конечного порядка ρ представляется в форме*

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \quad (\omega \leq \infty),$$

где m — кратность нулевого корня; a_n — все отличные от нуля корни функции $f(z)$; $p \leq \rho$, $P(z)$ — многочлен, степень которого q не превышает ρ ,

$$G(u; p) = (1 - u) \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots + \frac{u^p}{p}\right), \quad G(u; 0) = 1 - u.$$

При доказательстве теорем единственности решения задач определения краевых условий будет важно знать, можно ли с точностью до ненулевого постоянного множителя C восстановить целую функцию $f(z)$ по своим нулям a_n . Наиболее часто в доказательствах нам будут встречаться следующие три класса функций: 1) целые функции порядка роста $1/2$; 2) четные целые функции первого порядка; 3) функции класса Картрайт (определение ее см. ниже). Любая из перечисленных функций обладает нужным нам свойством: она может быть восстановлена по своим нулям с точностью до ненулевого постоянного множителя C . Так для целой функции порядка $1/2$ это следует из самой теоремы Адамара, приведенной выше. Если же $f(z)$ является *четной* целой функцией первого порядка и $f(z) \not\equiv 0$, то из теоремы Адамара получаем, что функция $f(z)$ восстанавливается по своим нулям a_n с точностью до множителя Ce^{az} , где a — некоторое действительное число, а C — некоторая ненулевая постоянная. Далее,

поскольку функция $f(z)$ — четная, то $a = 0$. Значит, с точностью до ненулевого постоянного множителя C четная целая функция $f(z)$ первого порядка роста может быть восстановлена по своим нулям.

Целой функцией класса Картрайт (или класса C) называют целую функцию экспоненциального типа, удовлетворяющую условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

К классу Картрайт принадлежат, в частности, все целые функции экспоненциального типа, ограниченные на вещественной оси или принадлежащие $L^p(-\infty, \infty)$.

Для описания асимптотического поведения вдоль лучей $\{z : \arg z = \theta\}$ целой функции $f(z)$ порядка $\rho > 0$ и нормального типа используется функция

$$h(\theta, f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln |f(r e^{i\theta})|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

называемая *индикатором*.

По теореме Адамара каждая целая функция $f(z)$ ($f(0) \neq 0$) первого порядка представляется в форме

$$f(z) = f(0) e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}.$$

Можно доказать, что целая функция класса Картрайт, такая что $f(0) \neq 0$ и $h(\pi/2, f) = h(-\pi/2, f)$, представляется в следующей форме:

$$f(z) = f(0) \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| < R} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

1.1.4. Спектральная задача, краевые условия, собственные значения и характеристический определитель. В научной математической литературе под *спектральной задачей* понимают задачи на отыскание собственных значений. В настоящей монографии рассматриваются спектральные задачи следующего вида:

$$l(y, \lambda) = l_0(y) + \lambda l_1(y) + \dots + \lambda^n l_n(y) = 0, \quad (1.1.5)$$

$$U_j(y, \lambda) = U_j^0(y) + \lambda U_j^1(y) + \dots + \lambda^{\nu_j} U_j^{\nu_j}(y) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.1.6)$$

Здесь

$$l_\nu(y) = \sum_{s=\nu}^n p_{\nu s}(x) y^{(n-s)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

$$U_j^\nu(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j\nu k} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{j\nu k} y^{(k)}(1), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j.$$

Коэффициенты $a_{j\nu k}$, $b_{j\nu k}$ являются комплексными числами, которые, в частности, могут быть равны нулю,

$$p_{ss}(x) = \text{const}, \quad s = \overline{1, n}, \quad p_{nn} \neq 0,$$

$p_{\nu s}(x)$ — достаточно гладкие функции, а $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ — произвольные полиномы от λ .

Именно к этим спектральным задачам приводят многие задачи математической физики. Для нас будет важно, что к этим краевым задачам сводятся многие задачи поиска собственных частот колебаний стержней, пластин, струн, мембран и оболочек.

Изучение краевых задач (1.1.5), (1.1.6) ведет начало от работ Дж. Биркгофа [195, 196]. В случае, когда $l_s(y) = 0$ при $s = \overline{1, n}$, $p_{00} = 1$ и $p_{0k} = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ в этих работах была найдена фундаментальная система решений уравнения (1.1.5) и выделен класс регулярных краевых условий, для которого была получена теорема о разложениях гладких функций в ряды по собственным и присоединенным функциям задачи.

В 1917 г. в работе Я. Д. Тамаркина [162] была найдена асимптотика (по λ) системы фундаментальных решений уравнения (1.1.5).

Для удобства чтения приводим обозначения, используемые в определении: L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке $[0, 1]$; W_2^k — соболевское пространство функций на отрезке $[0, 1]$ (т. е. совокупность всех функций $y(x)$, таких что $y^{(k)}(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0, 1]$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$, а $y^{(n)}(x)$ принадлежит пространству L_2).

Число λ_0 называется *собственным значением* краевой задачи (1.1.5), (1.1.6), если существует такая функция $\overline{y^0(x)} \not\equiv 0$ из W_2^n , что $l(y^0, \lambda_0) = 0$ и $U_j(y^0, \lambda_0) = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$. В этом случае функция $y^0(x)$ называется собственной функцией, отвечающей собственному значению λ_0 .

Пусть $y_j = y_j(x, \lambda)$ ($j = \overline{1, n}$) — линейно независимые решения уравнения (1.1.5), удовлетворяющие условиям:

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq r, \\ 1, & \text{при } j = r, \end{cases} \quad j, r = \overline{1, n}.$$

Общим решением задачи (1.1.5)–(1.1.6) является функция

$$y(x) = y(x, \lambda) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda) + \dots + C_n y_n(x, \lambda).$$

Для определения констант $C_1, C_2, \dots, C_n$ используют краевые условия (1.1.6):

$$\begin{aligned} U_i(y) &= U_i(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = \\ &= C_1 U_i(y_1) + C_2 U_i(y_2) + \dots + C_n U_i(y_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$