Пономарев С.В. Мищенко С.В. Дивин А.Г. Вертоградский В.А. и др.

Теоретические и практические основы теплофизических измерений



УДК	536.2 536-536.7	11
ББК	31.32-5 22.36	₽фи
	T 11	_]] _

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 07-08-07022

Авторский коллектив: Пономарев С.В., Мищенко С.В., Дивин А.Г., Вертоградский В.А., Чуриков А.А.

Теоретические и практические основы теплофизических измерений / Под ред. С. В. Пономарева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 408 с. — ISBN 978-5-9221-0956-7.

Изложены теоретические и практические основы принципа действия и работы наиболее часто применяемых в производственной и исследовательской практике методов и приборов, предназначенных для измерения теплофизических свойств веществ. Большое внимание уделено стационарным и нестационарным методам и приборам для измерения теплопроводности, коэффициента температуропроводности и объемной теплоемкости. Рассмотрены проблемы анализа и уменьшения влияния источников погрешностей измерения теплофи зических свойств. Приведены примеры применения теории погрешностей для оценки метрологических характеристик теплофизических методов и приборов.

Монография будет полезна научным работникам, инженерам, аспирантам, магистрантам и студентам, специализирующимся на применении теплофизических методов и приборов для контроля и управления качеством продукции и процессов.

> Рецензент: Доктор технических наук, профессор ИТЭС ОИВТ РАН *В.А. Петров*

ISBN 978-5-9221-0956-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2008
 © Коллектив авторов, 2008

оглавление

Введение	7
Глава 1. Основы феноменологической теории теплопроводности	9
1.1. Понятие температурного поля	9
1.2. Основной закон теплопроводности Фурье	11
1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности	13
1.4. Начальные условия краевых задач теплопроводности	16
1.5. Граничные условия краевых задач теплопроводности	16
1.6. Основные представления о прямых и обратных краевых за-	
дачах теплопроводности	20
Глава 2. Начальные сведения о методах и приборах для измере-	
ния теплофизических свойств веществ	24
2.1. Организация эксперимента при измерении теплофизических	
свойств веществ	24
2.2. Классификация методов и приборов для измерения теплофи-	05
зических свойств	25
Глава З. Основы калориметрии	31
3.1. Адиабатическая калориметрия	31
3.2. Основы измерения теплоемкости методом монотонного	
нагрева	35
3.3. Основы микрокалориметрии	38
Глава 4. Стационарные методы измерения теплопроводности	42
4.1. Теоретические основы стационарного метода плоского слоя.	42
4.2. Теоретические основы стационарного метода цилиндрическо-	
го слоя	54
4.3. Теоретические основы стационарного метода шарового слоя.	62
4.4. Источники погрешностей измерения теплопроводности ста-	
ционарными методами	66

4	Оглавление
---	------------

Глава 5. Методы теплофизических измерений, основанные на теории начальной стадии теплопереноса в исследуемом	-
образце	79
5.1. Метод плоского мгновенного источника тепла	79
5.2. Метод линейного мгновенного источника тепла	90
Глава 6. Нестационарные методы регулярных режимов первого, второго и третьего рода	102
6.1. Основные сведения о регуляризации температурных полей в образцах простой формы	102
6.2. Метод регулярного режима первого рода	107
6.3. Методы теплофизических измерений, основанные на законо-	
мерностях регулярного режима второго рода	127
6.4. Измерение теплофизических свойств веществ с помощью	151
методов регулярного режима третьего рода	191
Глава 7. Методы измерения теплофизических свойств веществ с помощью непосредственно определяемых временных и пространственных интегральных характеристик физических	
величин	165
 Основные виды интегральных характеристик температуры и тепловых потоков Методы вычисления или непосредственного определения 	165
значений интегральных характеристик температур 7.3. Абсолютный метод измерения коэффициента температуро- проводности с применением временных интегральных харак-	169
теристик температуры 7.4. Относительный метод измерения теплофизических свойств жидкостей с использованием временных интегральных ха-	172
образования Лапласа	176
тегральных преобразований по временной и пространствен- ной координатам	186
Глава 8. Экспериментальное измерение реологических свойств	107
ньютоновских и неньютоновских жидкостей	197
8.1. Закономерности течения ньютоновских жидкостей	198
8.2. Закономерности течения неньютоновских жидкостей	210

Оглавление		5
8.3. Методы и жидкостей неньютоно	устройства для измерения вязкости ньютоновских й и реологических характеристик реостабильных звских жидкостей	230
Глава 9. Измерен	ние теплофизических свойств жидкостей мето-	
дами ламинар	ного режима	258
9.1. Математич	ческое моделирование стационарных температур-	
ных полей 9.2. Измерение сти в прог	в установившихся ламинарных потоках жидкости е коэффициента температуропроводности жидко- цессе течения через измерительную трубку с обо-	259
гревом сте	енки теплообменного участка пропусканием через	064
водяную р 9.3. Методы л ностях тен	уоашку теплоносителя с постоянной температурой заминарного режима, основанные на закономер- плопереноса в ламинарном потоке жидкости при	204
течении в	измерительной труоке с электроооогревом стенок	276
9.4. Метолы и	участка лля определения теплоемкости, ком-	210
плексного	теплофизического параметра $c\rho/\mu$ и плотности	
внутренни	их источников тепла	281
9.5. Математич	ческая модель, метод и устройство для исследова-	
ния зависи	имости теплофизических характеристик жидкостей	
от скорост	и сдвига	284
-		
Глава 10. Основь	л экспериментального измерения коэффици-	
ента диффузи	и влаги в коллоидных капиллярно-пористых	000
материалах		298
10.1. Количеств	енные характеристики содержания влаги в твер-	
дых матер	иалах и газах	298
10.2. Основные	закономерности взаимодействия влажного матери-	0.04
ала с окру	жающей газовой средой	304
10.3. Основные	сведения о потенциале массопереноса	309
10.4. Основы фе	еноменологической теории переноса влаги в колло-	
идных кап	ииллярно-пористых материалах	321
10.5. Методы и	 устройства для измерения коэффициента диф- 	
фузии вла	зги (массы) в коллоидных капиллярно-пористых	220
материала	х	329
Глава 11. Станио	нарные метолы комплексного измерения тепло-	
проводности и	и электропроводности материалов	341
- 11.1 Обзор мет		
электропр	оводности	342

5 Оглавление	
11.2. Метод торцевого контакта пары образцов	343
11.3. Метод двух мостов	
Заключение	354
Приложение. Теплофизические измерительные установки ул ленного доступа для научных исследований и дистанциони	ца- но-
го образования	355
1.1. Введение	355
Библиографический список	399

введение

Материалы подготовлены к опубликованию на основании многолетнего опыта разработки и практического использования теплофизических методов и приборов, а также чтения в Тамбовском государственном техническом университете курса лекций «Основы теплофизических измерений» для студентов, обучающихся по программе подготовки инженеров по специализации 210217 «Автоматизация аналитического контроля технологических процессов» в рамках специальности 210200 «Автоматизация технологических процессов и производств». В последнее время одноименный курс лекций читается для студентов магистратуры, обучающихся по программам: 200410 «Метрологическое обеспечение контроля качества, свойств и состава веществ, материалов и изделий», 200415 «Всеобщее управление качеством», в рамках наповаления 200400 «Метрология, стандартизация и сертификация».

К настоящему времени опубликовано много работ, например [1-3, 5-6, 10-14, 17, 18, 23-27, 57], посвященных теплофизическим измерениям и приборам. В этих книгах, как правило, приводятся очень краткие описания отличительных особенностей рассматриваемых методов и измерительных устройств, а исходные математические модели рассматриваемых теплофизических методов и приборов обсуждаются редко. В большинстве случаев даны только итоговые расчетные соотношения и практически никогда не рассматривается процесс вывода этих формул. Мало внимания уделяется анализу источников погрешности и метрологическому анализу обсуждаемых методов и приборов.

Отличительной особенностью данной монографии является то, что при изложении принципа действия каждого метода и измерительного устройства приводятся:

 — физическая модель рассматриваемого метода и устройства с изложением примерного порядка осуществления измерительных операций;

 математическая модель в виде прямой или обратной краевой задачи, описывающей процессы теплопроводности, влагопроводности или течения исследуемой субстанции;

 процедура получения расчетных формул для вычисления искомых теплофизических свойств по значениям физических величин, непосредственно измеряемым в ходе эксперимента;

 процедура получения расчетных формул для вычисления погрешностей измерения искомых теплофизических свойств по известным погрешностям непосредственно измеряемых в ходе эксперимента физических величин (геометрических размеров, температур, тепловых потоков, расхода жидкости, перепада давления и т.п.);

 в ряде случаев приведен анализ возможных источников погрешностей измерения экспериментально измеряемых физических величин и рекомендации по уменьшению влияния этих источников на результирующую погрешность определения искомых теплофизических свойств.

Предлагаемая вниманию читателя монография будет полезна сотрудникам организаций, аспирантам и студентам, специализирующимся в области проектирования, разработки и практического применения теплофизических методов и приборов для измерения, контроля и управления качеством сырья, материалов, промежуточной и конечной продукции технологических процессов.

Ряд результатов исследований, представленных в монографии, были получены на кафедре «Автоматизированные системы и приборы» Тамбовского государственного технического университета при поддержке РФФИ (гранты 02-02-17587 a и 05-08-01515а).

За большую помощь в подготовке рукописи к опубликованию авторы монографии выражают благодарность сотрудникам, аспирантам и студентам магистратуры кафедры «Автоматизированные системы и приборы» Тамбовского государственного технического университета, в том числе начальнику сектора Е. П. Постниковой; аспиранту С. В. Миронову; студентам: И. Минько, А. Павлинову, Е. Поповой, Е. Савельевой, М. Утоповой, Е. Кузнецовой, В. Серегину, Е. Тимошиной, Е. Чепурновой, Р. Павлинову, С. Ходилину.

Глава 1

ОСНОВЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Феноменологическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества, т.е. рассматривает его не как совокупность отдельных дискретных частии, а как сплоинную среду — континуум. Такое модельное представление вещества может быть применено на практике при решении задач переноса тепла, если размеры рассматриваемых дифференциальных объемов достаточно велики по сравнению с размерами молекул и расстояниями между ними [1].

1.1. ПОНЯТИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Аналитическое исследование теплопроводности сводится [1] к изучению пространственно-временного изменения так называемого температурного поля, характерного для рассматриваемого процесса,

$$T = f(x, y, z, \tau),$$
 (1.1)

где T — температура; x, y, z — пространственные координаты в декартовой системе; τ — время; f — функция, определяющая зависимость T от x, y, z и τ .

Различают стационарное и нестационарное температурное поле.

Выражение (1.1) представляет собой математическую запись нестационарного температурного поля [1], зависящего не только от пространственных координат x, y, z, но и от времени τ .

Стационарным температурным полем называется такое поле [1]

$$T = F(x, y, z), \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0,$$
 (1.2)

значение которого в любой его точке не изменяется во времени, т.е. является функцией только пространственных координат x, y, z.

Температурные поля (1.1) и (1.2) трехмерные, так как являются функциями трех координат. Если температура — функция только двух пространственных координат x, y:

$$T = f_2(x, y, \tau);$$
 (1.1a)

$$T = F_2(x, y),$$
 (1.2a)

то температурные поля (1.1а), (1.2а) называют двухмерными. Если же температуры представляют собой функции одной пространственной координаты *х*

$$T = f_1(x, \tau);$$
 (1.16)

$$T = F_1(x),$$
 (1.26)

то соответствующие температурные поля (1.16), (1.26) называются одномерными [1].

Примерами одномерных температурных полей могут служить:

 поле неограниченной пластины, ширина и длина которой очень велики по сравнению с ее толщиной;

 поле неограниченного цилиндра, длина которого намного больше его диаметра (радиуса);

- поле шара.

Поскольку температура — скалярная величина, можно утверждать, что температурное поле является скалярным полем.

Если точки поля, имеющие одинаковые температуры, соединить, то получится изотермическая поверхность (рис. 1.1). Пересечение изотермической поверхности плоскостью дает на этой поверхности изотерму (линию, соответствующую одинаковой температуре).



Рис. 1.1. К определению понятий изотермической поверхности, вектора градиента температуры grad T и вектора теплового потока q; I, 2 — изотермические поверхности с температурами T_1 и $T_2 = T_1 + \Delta T_i$ 3, 4 — изотермы (линии пересечния изотермических поверхностей I и 2 с плоскостью, представленной штриховыми линиями 5, 6; 7 — линия теплового тока

Вдоль изотермической поверхности температура не изменяется. Наибольшее изменение температуры на единицу длины происходит в направлении нормали *n* к изотермической поверхности и характеризуется градиентом температуры, представляющим собой вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры:

grad
$$T = (\mathbf{1}_n) \frac{\partial T}{\partial n}$$
,

где (1_n) — единичный вектор, направленный по нормали в сторону возрастания температуры; $\frac{\partial T}{\partial n}$ — производная температура по направлению нормали *n* к изотермической поверхности.

Градиент температуры grad T часто обозначают также символом ∇T . Составляющие градиента температуры по осям декартовой системы координат равны соответствующим частным производным:

grad
$$T \equiv \nabla T = 1_x \frac{\partial T}{\partial x} + 1_y \frac{\partial T}{\partial y} + 1_z \frac{\partial T}{\partial z},$$
 (1.3)

где l_x , l_y , l_z — ортогональные между собой векторы единичной длины, направленные вдоль осей x, y, z соответственно; $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ — частные производные температуры $T(x, y, z, \tau)$ по координатам x, y, z.

1.2. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУРЬЕ

Количество тепла Q, проходящее в единицу времени τ через единицу площади S изотермической поверхности, называется плотностью теплового потока q и определяется соотношением [1]

$$\mathbf{q} = (-\mathbf{1}_n) \frac{dQ}{d\tau} \frac{1}{S},\tag{1.4}$$

где $(-\mathbf{1}_n)$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности *S* в сторону уменьшения температуры; $\frac{dQ}{d\tau}$ — количество тепла, проходящего в единицу времени; **q** — вектор теплового потока. Вектор **q** называется вектором теплового потока, его направление противоположно градиенту температуры grad $T \equiv \nabla T$. Векторь **q** и grad *T* направлены по нормали к изотермической поверхности, но в противоположные стороны (см. рис. 1.1).

Линии, касательные к которым совпадают с направлениями векторов q, называются линиями теплового тока. Линии теплового тока перпендикулярны к изотермическим поверхностям в точках пересечения с ними. Касательная к линиям теплового тока, взятая в обратном направлении, указывает направление градиента температуры [1].

Основной закон теплопроводности, часто называемый законом Фурье, может быть записан в виде

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \nabla T = \lambda (-\mathbf{1}_n) \frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (1.5)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности.

Таким образом, вектор плотности теплового потока прямо пропорционален градиенту температуры, но направлен в противоположную сторону (от точек тела, имеющих более высокую температуру, к точкам с меньшей температурой).

Вектор теплового потока, с учетом выражения (1.3), может быть представлен в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{1}_{x}q_{x} + \mathbf{1}_{y}q_{y} + \mathbf{1}_{z}q_{z} = \lambda \Big[(-\mathbf{1}_{x})\frac{\partial T}{\partial x} + (-\mathbf{1}_{y})\frac{\partial T}{\partial y} + (-\mathbf{1}_{z})\frac{\partial T}{\partial z} \Big], \quad (1.6)$$

причем его проекции на оси координат x, y, z соответственно равны

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x};$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

В случае стационарного одномерного температурного поля (при $\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$) закон теплопроводности Фурье имеет наиболее поостой вид

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$
 (1.7)

Принимая во внимание, что

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}; \quad q = \frac{Q}{S\tau},$$

закон Фурье (1.7) можно представить в виде

$$\frac{Q}{S\tau} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1},$$

т. е. коэффициент теплопроводности λ равен количеству тепла Q [Дж], протекающему в единицу времени τ [с] через изотермическую поверхность площадью S [м²] при перепаде температуры ($T_2 - T_1$) = 1 К на единицу длины нормали ($x_2 - x_1$) = 1 м.

Основной закон теплопроводности (1.5) можно представить в несколько ином виде:

$$\mathbf{q} = -\frac{\lambda}{c\rho} \operatorname{grad}(c\rho T) = -a \operatorname{grad} h,$$
 (1.8)

где $h = c\rho T [Дж/м^3]$ — объемная энтальпия несжимаемого вещества; $\rho [кг/m^3]$ — плотность; $c [Дж/(кг \cdot K)]$ — удельная теплоемкость; $a = \lambda/(c\rho) [m^2/c]$ — коэффициент температуропроводности.

Согласно выражению (1.8) плотность теплового потока q пропорциональна градиенту объемной энтальпии h (объемной концентрации тепловой энергии, имеющей размерность Дж/м³). Коэффициент пропорциональности $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ получил в русской литературе наименование «коэффициент температуропроводности», а в английской он называется «thermal diffusivity», т. е. коэффициент диффузии тепла.

В случае одномерного стационарного переноса тепла основной закон теплопроводности приобретает вид

$$q = -a\frac{dh}{dx}.$$
 (1.9)

Учитывая, что $\frac{dh}{dx} \approx \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1}, \ q = \frac{Q}{S_7}$, выражение (1.9) можно представить

$$\frac{Q}{S\tau} = -a\frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1},$$

т. е. коэффициент температуропроводности $a \left[\frac{\underline{\mathcal{M}} \times \mathbf{M}^{-2} \cdot \mathbf{c}^{-1}}{\underline{\mathcal{M}} \times \mathbf{M}^{-3} / \mathbf{M}} \right] = a \; [\mathbf{M}^2 / \mathbf{c}]$

равен количеству тепла Q [Дж], протекающему через изометрическую поверхность площадью $S = 1 \text{ м}^2$ в единицу времени $\tau = 1$ с при перепаде объемной энтальпии h (объемной концентрации тепловой энергии) в $h_2 - h_1 = 1$ Дж/м³ на единицу длины нормали ($x_2 - x_1$) = 1 м.

1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Под дифференциальным уравнением теплопроводности понимают математическую зависимость, обычно выражаемую дифференциальным уравнением в частных производных, характеризующую протекание физического явления переноса тепла и позволяющую рассчитать темпера-

турное поле в любой внутренней точке тела в любой момент времени.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности для неподвижной среды приведем для простого случая — одномерного температурного поля в плоской неограниченной пластине.

Выделим в неподвижной однородной и изотропной среде (рис. 1.2) элементарный параллелепипед, объем которого равен V = dx dy dz. Обозначим q_x [BT/m²] — тепловой поток, втекающий в левую грань, а q_{x+dx} — тепловой поток, вытекающий из правой грани.



Рис. 1.2. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Количество тепла, втекающего в левую грань площадью dy dz в единицу времени, равно $q_x dy dz$, а количество тепла, вытекающего через правую грань, равно $q_{x+dx} dy dz$. Если $q_x > q_{x+dx}$, элементарный параллелепипед будет нагреваться; если $q_x < q_{x+dx}$ — охлаждаться. В единицу времени в объеме $V = dx \, dy \, dz$ будет накапливаться следующее количество тепла: $P_q = q_x \, dy \, dz - q_{x+dx} \, dy \, dz$. При q_{x+dx} стоит знак минус, так как тепло вытекает из объема $dx \, dy \, dz$.

В среде может действовать внутренний источник энергии W [Bт/ m^3]. Тогда в элементарном объеме параллелепипеда будет выделяться в единицу времени тепло в количестве $P_W = WV = W dx dy dz$. Всего в объеме V = dx du dz накопится суммарное тепло в единицу времени

$$P_{q} + P_{W} = q_{x} \, dy \, dz - q_{x+dx} \, dy \, dz + W \, dx \, dy \, dz. \tag{1.10}$$

По закону сохранения энергии количество тепла, накапливающееся в объеме $V = dx \, dy \, dz$ в единицу времени, должно быть равно его количеству, аккумулируемому средой в единицу времени:

$$P_{\rm ak} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} \, dx \, dy \, dz; \quad \frac{Q_{\rm ak}}{\tau} = P_{\rm ak},$$

т.е.

$$P_{a\kappa} = P_q + P_W;$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx \, dy \, dz = (q_x - q_{x+dx}) \, dy \, dz + W \, dx \, dy \, dz.$$
(1.11)

Разложим q_{x+dx} в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx;$$

$$(q_x - q_{x+dx}) dy dz = -\frac{dq_x}{dx} dx dy dz.$$
(1.12)

После подстановки (1.12) в (1.11)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz + W dx dy dz.$$

Разделим на $V=dx\,dy\,dz$ и получим дифференциальное уравнение теплопроводности в неокончательном виде

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + W. \tag{1.13}$$

Согласно закону теплопроводности Фурье

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$
 (1.14)

Подставив (1.14) в (1.13), получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + W.$$

Учитывая, что температура $T = T(x, \tau)$, и функция внутренних источников тепла $W = W(x, \tau)$ являются функциями координаты x и вре-

мени т, уравнение теплопроводности для неподвижных сред примет вид

$$c\rho \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x} \right) + W(x,\tau).$$
(1.15)

Если можно принять, что $\lambda = \text{const}$, то уравнение упростится:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{W(x,\tau)}{c\rho},$$
(1.16)

где $a = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности.

Отметим, что в случае трехмерного температурного поля, уравнение (1.15) представляют в виде

$$c\rho \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial z} \right) + W(x, y, z, \tau).$$
(1.17)

Уравнение (1.15) записано для плоских тел в декартовой системе. Часто требуется представление уравнений (1.15), (1.16) в цилиндриче-



Рис. 1.3. Кривые изменения температур: *a* — в неограниченной пластине при граничных условиях первого рода на обеих поверхностях; *б* — в сплошном неограниченном цилиндре, обогреваемом равномерно распределенным тепловым потоком *q* = const; *e* — в двухслойной пластине при задании граничных условий четвертого рода на поверхности контакта слоев *x* = *h*

ской или сферической системе координат. В этом случае пользуются понятием коэффициента формы г:

для плоской (декартовой) системы координат г = 0;

для цилиндрической системы координат г = 1;

– для сферической системы координат г = 2.

С использованием коэффициента формы г уравнения (1.15) и (1.16) приобретают вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{x^{r}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^{r} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + W; \qquad (1.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{1}{x^r} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^r \frac{\partial T}{\partial x} \right). \tag{1.19}$$

Уравнения (1.15)-(1.19) описывают перенос тепла во внутренних точках неподвижных сред (рис. 1.3).

Для того, чтобы воспользоваться любым из этих уравнений, их надо дополнить краевыми условиями, включающими в себя:

1) задание геометрии рассматриваемого тела;

 задание начального условия, определяющего распределение температуры в теле в начальный момент времени;

 задание граничных условий первого, второго, третьего или четвертого рода, определяющих закономерности теплообмена на граничных поверхностях рассматриваемого образца (тела).

1.4. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Начальные условия обычно задаются в виде известных значений температурного поля внутри исследуемого образца в момент времени, предшествующий моменту подачи теплового воздействия или совпадающий с ним, например:

$$T(x, y, z, 0) = T_{\rm H}(x, y, z); \quad T(x, 0) = T_{\rm H}(x).$$

Для упрощения получающихся аналитических решений стараются обеспечить простейший вид начальных условий, например:

 $T_{\rm H}(x, y, z) = T_{\rm H} = {\rm const}$ или $T_{\rm H}(x) = T_{\rm H} = {\rm const}$.

1.5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Могут быть заданы граничные условия первого, второго, третьего или четвертого рода.

Граничные условия первого рода обычно задают в виде известного закона изменения во времени температуры на поверхности исследуемого образца. Для тела, представленного на рис. 1.3, *a*, граничные условия первого рода (ГУ-1) имеют вид

 $T(0,\tau) = \varphi_1(\tau); \quad T(H,\tau) = \varphi_2(\tau).$

Функции $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ могут иметь вид

$$T(0,\tau) = \varphi_1(\tau) = T_0(1 - e^{-2\tau});$$
 $T(H,\tau) = \varphi_2(\tau) = k\tau.$

В общем случае граничные условия имеют вид

$$T(x_{\pi}, y_{\pi}, z_{\pi}, \tau) = \varphi_1(x_{\pi}, y_{\pi}, z_{\pi}, \tau),$$

где x_п, y_п, z_п — координаты точек поверхности тела.

Граничные условия второго рода обычно задают в виде известных функций изменения во времени теплового потока на поверхности тела. С учетом закона Фурье $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ для геометрии образца, представленной на рис. 1.3, *a*, получаем граничные условия второго рода (ГУ-2) в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = q_1(\tau); \quad \lambda \frac{\partial T(H,\tau)}{\partial x} = q_2(\tau).$$

В простейшем случае

$$q_1(\tau) = \text{const}; \quad q_2(\tau) = \text{const}.$$

Эти функции $q_1(\tau), q_2(\tau)$ могут быть записаны в виде

$$q_1(\tau) = 0; \quad q_2(\tau) = 0.$$

Граничные условия третьего рода описывают взаимодействие тела с окружающей средой по закону конвективного теплообмена, предложенного Ньютоном и имеющим вид

$$q = \alpha (T^{\rm c} - T_{\rm n}),$$

где α — коэффициент теплообмена [Вт/(м² · °С)]; T^{c} — температура греющей среды; T_{n} — температура поверхности.

С учетом того, что

$$q(0,\tau) = -\lambda \frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x}; \quad q(H,\tau) = \lambda \frac{\partial T(H,\tau)}{\partial x}$$

для образца, представленного на рис. 1.3, *а*, получаем граничные условия третьего рода (ГУ-3) в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = \alpha_1 [T_1^{c}(\tau) - T(0,\tau)];$$

$$\lambda \frac{\partial T(H,\tau)}{\partial x} = \alpha_2 [T_2^{c}(\tau) - T(H,\tau)].$$

Граничные условия четвертого рода задаются (рис. 1.3, *в*) на внутренних границах контакта двух твердых тел или твердое тело —

2 С.В. Пономарев и др.

жидкость (газ) следующим образом:

$$\begin{cases} T(h-0,\tau) = T(h+0,\tau); \\ \lambda_1 \frac{\partial T(h-0,\tau)}{dx} = \lambda_2 \frac{\partial T(h+0,\tau)}{dx}. \end{cases}$$
(1.20)

Согласно граничным условиям четвертого рода (ГУ-4) на границе контакта одновременно обеспечивается непрерывность изменения как температур, так и тепловых потоков, хотя производные температурного поля по координате при этом могут иметь разрыв (см. рис. 1.3, *ө*).

В некоторых случаях на практике используют граничные условия четвертого рода специального вида [2], учитывающие наличие поверхностного источника тепла $p(\tau)$ [Вт/м²], действующего на поверхности раздела соседних слоев. Например, если на поверхности x = h будет действовать (см. рис. 1.3, в) источник тепла с удельной поверхностной мощностью $p(\tau)$, то ГУ-4 специального вида могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} T(h-0,\tau) = T(h+0,\tau);\\ \lambda_1 \frac{\partial T(h-0,\tau)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T(h+0,\tau)}{\partial x} = p(\tau) \end{cases}$$

С учетом изложенного легко получают выражения для прямых краевых задач теплопроводности, лежащих в основе рассматриваемых в данной монографии методов и приборов для измерения теплофизических свойств веществ.

Ниже приведены несколько примеров постановок краевых задач теплопроводности для различных случаев геометрии образцов, а также вариантов задания начальных и граничных условий.

 Постановка задачи о расчете температурного поля плоской пластины толщиной *H*, на поверхности *x* = 0 которой заданы граничные условия первого рода, а на поверхности *x* = *H* — граничные условия второго рода при постоянных начальных условиях может быть записана в виде

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1.21a)$$

$$\tau > 0$$
, $0 < x < H$; (1.216)

$$T(x, 0) = T_H = \text{const};$$
 (1.21b)

$$T(0,\tau) = \varphi(\tau); \tag{1.21r}$$

$$\lambda \frac{\partial T(H,\tau)}{\partial x} = q(\tau). \tag{1.21a}$$

2. Постановка задачи о расчете температурного поля плоской пластины толщиной H, на поверхности x = 0 которой заданы граничные условия второго рода, а на поверхности x = H — граничные условия третьего рода, с постоянными начальными условиями записывается в виде

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1.22a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H;$$
 (1.226)

$$T(x,0) = T_{\rm H} = \text{const}; \tag{1.22B}$$

$$-\lambda \frac{\partial I(0,\tau)}{\partial \mathbf{x}} = q_1(\tau); \tag{1.22r}$$

$$\lambda \frac{\partial T(H,\tau)}{\partial x} = \alpha [\psi_2(\tau) - T(H,\tau)]. \tag{1.22}$$

3. Постановка задачи о расчете температурного поля неограниченного сплошного цилиндра радиуса R с постоянной начальной температурой $T_{\rm H}=0\,^{\circ}{\rm C}$, помещенного в момент времени $\tau=0$ в активно перемешиваемую жидкость с температурой $T_{\rm K}=50\,^{\circ}{\rm C}$, может быть представлена так:

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} \right]; \qquad (1.23a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R;$$
 (1.236)

$$T(r, 0) = T_{\rm H} = 0^{\circ} C;$$
 (1.23b)

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial r} = 0; \tag{1.23r}$$

$$T(R, \tau) = T_{\kappa} = 50 \,^{\circ}\text{C.}$$
 (1.23д)

4. Постановка задачи о расчете температурного поля шара с первоначальной температурой $T(r, 0) = T_{\rm H} = {\rm const}$, который в момент времени $\tau = 0$ помещен в активно перемешиваемую жидкость с температурой $T_{\rm K} = {\rm const}$, имеет вид

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} \right];$$
(1.24a)

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R;$$
 (1.246)

$$T(r, 0) = T_{\rm H} = {\rm const};$$
 (1.24b)

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial r} = 0; \qquad (1.24r)$$

$$T(R,\tau) = T_{\kappa} = \text{const}. \qquad (1.24 \text{g})$$

5. Для случая, аналогичного рассмотренному в предыдущем примере, однако отличающегося тем, что шар в момент времени τ – 0 помещен в газовую среду, теплообмен с которой происходит по закону Ньютона, постановка краевой задачи теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} \right]; \tag{1.25a}$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R;$$
 (1.256)

 2^{*}

$$T(r, 0) = T_{\rm H} = {\rm const};$$
 (1.25b)

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial r} = 0; \tag{1.25r}$$

$$\lambda \frac{\partial T(R,\tau)}{\partial r} = \alpha \big[T^{c}(\tau) - T(R,\tau) \big].$$
(1.25д)

6. Для двухслойного неограниченного цилиндра $(0 < r < R_1$ и $R_1 < r < R_2)$ из материала с постоянными теплофизическими свойствами $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ при $r = R_1$ заданы граничные условия четвертого рода специального вида $(p(\tau) = p = \text{const})$, при r = 0 задан тепловой поток q = 0, при $r = R_2$ известен закон теплообмена по закону Ньютона с греющей средой $T^c(\tau)$, а начальное условие имеет вид $T_u(r) = 0$.

В этом случае запись постановки задачи о расчете температурного поля $T(r, \tau)$ принимает вид

$$\frac{\partial T_1(r,\tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_1(r,\tau)}{\partial r} \right]; \tag{1.26a}$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R_1;$$
 (1.266)

$$\frac{\partial T_2(r,\tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_2(r,\tau)}{\partial r} \right]; \tag{1.26b}$$

$$\tau > 0, \quad R_1 < r < R_2;$$
 (1.26r)

$$T_1(r,0) = 0, \quad T_2(r,0) = 0;$$
 (1.26д)

$$\frac{\partial T_1(0,\tau)}{\partial r} = 0; \qquad (1.26e)$$

$$\int T_1(R_1,\tau) = T_2(R_1,\tau);$$
 (1.26ж)

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1(R_1, \tau)}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(R_1, \tau)}{\partial r} = p = \text{const}; \end{cases}$$
(1.263)

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(R_2,\tau)}{\partial r} = \alpha \big[T^{\rm c}(\tau) - T_2(R_2,\tau) \big]. \tag{1.26u}$$

1.6. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.6.1. Прямая краевая задача теплопроводности

Простейшую аналитическую запись, при прочих равных условиях, имеет одномерное температурное поле в образцах простой формы в виде:

- пластины г = 0;

— шара г = 2.

20

Рассмотренные выше постановки краевых задач для:

неограниченной пластины (1.21а) и (1.21д); (1.22а) и (1.22д);

неограниченного цилиндра в виде (1.23а)-(1.23д);

— шаров в виде (1.24а)-(1.24д); (1.25а)-(1.25д);

 двухслойной неограниченной пластины в виде (1.26а)-(1.26и), представляют собой примеры записи прямых краевых задач теплопроводности.

Прямые краевые задачи теплопроводности по известным (заданным):

виду уравнения теплопроводности (1.21а);

- геометрии образца (г = 0) и его размерам (1.21б);

теплофизическим свойствам (a, λ);

- начальным условиям (1.21в);
- граничным условиям (1.21г), (1.21д),

позволяют найти (рассчитать) температурное поле $T(x, \tau)$, которое будет иметь место в рассматриваемом теле (в любой точке 0 < x < H и в любой момент времени $\tau > 0$).

1.6.2. Обратная краевая задача теплопроводности относительно граничных условий

Пусть известна геометрия образца (г = 0, 0 < x < H), его теплофизические свойства (a, λ = const), вид дифференциального уравнения теплопроводности, начальное условие $T_{\rm H}(x) = T_0$ = const, вид граничных условий, например

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0; \quad T(H,\tau) = U(\tau),$$

где $U(\tau)$ — управляющее воздействие, которое следует выбрать таким [4], чтобы, например, за минимально возможное время $\tau_{\rm K}$ = min нагреть образец до конечной температуры $T_{\rm K}$ = const.

Тогда обратная краевая задача может быть записана в виде

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1.27a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H;$$
 (1.276)

$$T(x, 0) = T_{\rm H} = \text{const};$$
 (1.27b)

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0; \qquad (1.27r)$$

$$T(H,\tau) = U(\tau) \tag{1.27a}$$

с дополнительными условиями

$$|T(x,\tau_{\rm K}) - T_{\rm K}| < \varepsilon, \tag{1.27e}$$

$$\int_{0}^{1} d\tau = \min . \qquad (1.27 \varkappa)$$

Если (1.27в) представляет собой так называемое начальное условие, то выражение (1.27е) можно рассматривать как некоторое «конечное условие», задающее желаемое распределение температуры $T(x, \tau_{\kappa}) = T_{\kappa} = {
m const}$ в образце, которое должно быть получено в процессе нагрева, с погрешностью, не превышающей заданной малой величины $\varepsilon > 0$.

Выражение (1.27ж) представляет собой функционал, который обычно используют в теории автоматического управления при постановке задач максимального быстродействия [4, 5].

Таким образом, обратная краевая задача теплопроводности (1.27а)– (1.27ж) требует найти такую программу изменения управляющего воздействия $U(\tau)$, при котором образец, имевший температуру $T(x, 0) = T_{\rm H} = {\rm const}$ в начальный момент времени $\tau = 0$, за минимальное возможное время $\tau_{\rm K}$ будет нагрет до температуры $T(x, \tau_{\rm K}) = T_{\rm K} = {\rm const}$ с погрешностью, не превышающей заданной малой величины ε .

1.6.3. Обратная (инверсная) краевая задача теплопроводности относительно коэффициентов (теплофизических свойств)

Пусть известны:

дифференциальное уравнение теплопроводности (1.27а);

— геометрия образца (r = 0) и его размеры 0 < x < H (1.276);

- начальное условие (1.27в);

граничное условие (1.27г) слева;

— граничное условие $T(H, \tau) = 0$ справа, причем в ходе эксперимента определена функция $T(H/2, \tau) = f_{\mathfrak{I}}(\tau)$.

Требуется найти значение коэффициента температуропроводности a, при котором расчетные значения $T(H/2, \tau)$ и экспериментально измеренная функция $f_{3}(\tau)$ будут мало отличаться друг от друга.

Тогда обратная краевая задача теплопроводности (относительно неизвестного коэффициента температуропроводности *a*) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1.28a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H;$$
 (1.286)

$$T(x, 0) = T_{\rm H} = {\rm const};$$
 (1.28b)

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0; \qquad (1.28r)$$

$$T(H, \tau) = 0$$
 (1.28g)

с дополнительным условием

$$T(H/2, \tau) = f_{\mathfrak{s}}(\tau).$$
 (1.28e)

Требуется найти такое значение коэффициента *a*, которое минимизирует функционал

$$\int_{0}^{\tau_{\kappa}} [T(H/2,\tau) - f_{\mathfrak{s}}(\tau)] d\tau = \min.$$
 (1.28ж)

Отметим, что обратные краевые задачи теплопроводности относительно коэффициентов (теплофизических свойств) в монографии [5] было предложено называть инверсными.

Рассмотренные в этой главе основы феноменологической теории теплопроводности представляют собой теоретическую базу обсуждаемых в данной монографии методов и приборов для измерения теплофизических свойств веществ.

Глава 2

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ И ПРИБОРАХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ

2.1. ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ

Современные теплофизические методы и приборы основаны на том, что искомое теплофизическое свойство проявляется через температурный отклик исследуемого образца на внешнее тепловое воздействие, которому этот образец подвергается в ходе специально организованного эксперимента.

Обобщенная схема установки для измерения теплофизических свойств веществ представлена на рис. 2.1.

Устройство задания тепловых воздействий (УЗТВ) позволяет при подготовке к эксперименту создать в образце необходимые начальные условия (НУ) за счет управления граничными условиями (ГУ) и внутренними источниками тепла (ВИТ), а затем в ходе эксперимента изменять значения ГУ и ВИТ по закону, заданному программным обеспечением персонального компьютера (ПК). Устройство УРО и СКД служит для размещения образца и для создания контактного давления на внешних его поверхностях, что позволяет снизить контактные тепловые сопротивления на граничных поверхностях образца.

Блок измерительных преобразователей (БИП) включает в себя преобразователи температуры (ПТ), теплового потока (ПТП), других величин (ПДВ), например, устройства для измерения электрической мощности, тока, напряжения и т.п. Коммутатор обеспечивает возможность подключения выходного сигнала любого из измерительных преобразователей к входу усилителя У, коэффициент передачи которого задается персональным компьютером ПК. Выходной сигнал усилителя преобразуется аналого-цифровым преобразователем (АЦП) в цифровой сигнал, воспринимаемый ПК. Устройство боковой защиты образца (УБЗО) позволяет создать необходимые тепловые условия на его боко-



Рис. 2.1. Структурная схема компьютерного устройства для измерения теплофизических свойств веществ: ИУ — измерительное устройство; УЗТВ устройство задания тепловых воздействий на образец; БИП — блок измерительных преобразователей, включающий в себя ПТ — преобразователи температуры, ПТП — преобразователи теплового потока, ПДВ — преобразователи температуры, ПТП — преобразователи теплового потока, ПДВ — преобразователи температуры, ПТП — измеритель; АЦП — аналого-цифровой преобразователи; УРО и СКД — устройство для размещения образи, и создания контактного давления; УБЗО — устройство боковой защиты образиа от теплообмена с окружающей средой; ПК — персональный компьютер, включающий в себя: П — проинтер; СА — системный адаптер; ЗУ — запоминающее устройство

вых поверхностях, например, адиабатические условия, позволяющие исключить теплообмен этих поверхностей образца с окружающей средой.

Персональный компьютер (ПК) обеспечивает управление ходом эксперимента во время его подготовки и на стадии проведения. Системный адаптер (СА) позволяет проводить теплофизический эксперимент в режиме удаленного доступа через Интернет.

2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ И ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Методы и приборы, предназначенные для измерения теплофизических свойств веществ, могут быть классифицированы по различным признакам.

По измеряемому теплофизическому свойству различают теплофизические методы и приборы:

для измерения одной теплофизической величины:

- удельной теплоемкости с [Дж/(кг · K)];
- объемной теплоемкости ср [Дж/(м³ · K)];

- теплопроводности λ [Вт/(м · K)];
- температуропроводности а [м²/c];
- динамической вязкости µ [Па · с];
- коэффициента диффузии a_m [м²/c] и др.;

 для одновременного измерения комплекса теплофизических величин:

- объемной теплоемкости $c\rho$, теплопроводности λ и температуропроводности $a = \lambda/(c\rho)$;
- теплопроводности λ и вязкости μ;
- температуропроводности а и коэффициента диффузии а_m и др.

В зависимости от требований к форме и размерам образцов различают теплофизические методы и приборы, использующие

1) одномерные образцы простой формы в виде:

- неограниченной пластины;
- неограниченного цилиндра;
- шарового слоя и др.;
- 2) двухмерные образцы простой формы в виде:
- неограниченного бруса;
- полупространства;
- цилиндра ограниченной длины и т. п.;
- 3) трехмерные образцы в виде:
- параллелепипеда;
- цилиндра ограниченной длины, обогреваемого неравномерно распределенным внешним тепловым потоком, и т. п.

Простейший вид имеют решения одномерных краевых задач теплопроводности. Двухмерность и трехмерность температурных полей обычно не обеспечивает улучшения эксплуатационных показателей метода или устройства, однако при этом значительно ухудшаются их метрологические характеристики. Поэтому при разработке теплофизических методов и приборов стараются согласовать пространственное расположение источника теплового воздействия с геометрией образца таким образом, чтобы этот образец можно было считать одномерным (плоским, цилиндрическим, сферическим) в ходе активной стадии эксперимента.

В зависимости от характера изменения во времени температур и тепловых потоков в исследуемом образце в ходе рабочей стадии измерительного эксперимента различают:

1) стационарные методы и приборы, предназначенные для измерения теплофизических свойств веществ после завершения всех тепловых переходных процессов в исследуемом образце, т.е. в условиях $T = \text{const}, \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ и $q = \text{const}, \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0$;

2) нестационарные методы и приборы, предназначенные для измерения теплофизических свойств веществ в ходе теплового переходного процесса, когда $T \neq \text{const}, \frac{\partial T}{\partial \tau} \neq 0$ и/или $q \neq \text{const}, \frac{\partial q}{\partial \tau} \neq 0$.

Принимая во внимание, что тепловой переходной процесс в исследуемом образце принято делить на три стадии (рис. 2.2), различают нестационарные теплофизические

методы и приборы основанные на закономерностях:

 начальной стадии теплового переходного процесса (см. примечание);

 регулярной стадии теплового переходного процесса (так называемые методы и приборы регулярных режимов первого, второго и третьего рода);

 начальной и регулярной стадий теплового переходного процесса;

 — регулярной и квазистационарной стадий теплового переходного процесса;

— всех трех стадий (начальной, регулярной и квазистационарной) теплового переходного процесса (например, методы и приборы, основанные на использовании временных и/или простраиственно-временных инте-



Рис. 2.2. Характерные стадии теплового процесса изменения температуры 7(0, τ) на оси цилиндра при скачкообразном изменении температуры на его внешней поверхности $T(R, \tau)$ от начального $T_{n} > T_{k}$ до конечного T_{k} значения: I — начальная стадия: сильное влияние начальных условий на измеряемую температуру; 2 — нестационарная регулярная стадия переходного процесса: начальное распределение температуры T(r, 0) почти не влияет на измеряемую температуру $T(0, \tau)$; 3 — заключительная квазистационарная сталия

гральных характеристик температур и тепловых потоков, которые разрабатывают на кафедре «Автоматизированные системы и приборы» в Тамбовском государственном техническом университете);

 комбинированные методы и приборы, основанные на закономерностях как нестационарного, так и стационарного тепловых процессов в исследуемых образцах.

Примечание. Первые из перечисленных методов и приборов иногда неправильно называют экспресс-методами и приборами для экспрессного измерения теплофизических свойств на том основании, что длительность активной части эксперимента (определяемая продолжительностью начальной стадии теплового переходного процесса) составляет, как правило, от десятков секунд до одной или нескольких минут. Однако при обычно используемых образцах толщиной от 40 до 100 ммн такие методы и приборы требуют затрат времени от 30 до 100 ммн для получения необходимого начального распределения температуры в толще образца. Поэтому общее время экспериментального измерения теплофизических свойств веществ с помощью методов и приборов, основанных на закономерностях стационарной стадии теплового переменина, осс нованного на закономерностях стационарной стадии теплового процесса. По этой причине использование терминов «экспресс-метод» или «экспресс-прибор» применительно к таким методам и/или приборам следует считать неправомерным.

По характеру изменения во времени внешнего теплового воздействия на исследуемый образец различают следующие виды нестационарных методов и приборов для измерения теплофизических свойств:

 со ступенчатым изменением температуры (теплового потока) во времени (рис. 2.3, a, δ);

 с импульсным изменением температуры (теплового потока) на поверхности образца во времени (рис. 2.3, в, г);

3) с линейным изменением температуры поверхности образца во времени (рис. 2.3, д);

 с периодическим (гармоническим или импульсным) изменением температуры поверхности образца (рис. 2.3, е, ж);

5) с тепловым воздействием на исследуемый образец за счет изменения объемной плотности W [Вт/м³] внутренних источников тепла, действующих внутри образца, например, за счет пропускания электрического тока:

через электропроводный образец;

 через электронагреватель, рассматриваемый в качестве одного из слоев многослойного образца и т. п.

В зависимости от вида исследуемого вещества различают методы и приборы, предназначенные для измерения теплофизических свойств:

газов;

2) жидкостей и растворов;

3) эмульсий (суспензий);

4) пастообразных материалов;

5) насыпного слоя сыпучих (дисперсных) материалов;

6) твердых материалов.

В зависимости от состояния исследуемого газа или жидкости в процессе измерения их свойств (неподвижное «квазитвердое» или ламинарное течение) различают:

 традиционные методы и приборы теплофизических измерений, предполагающие, что газ или жидкость находятся в «квазитвердом» состоянии в ходе измерения их свойств (в таких методах и приборах предпринимаются специальные меры для предотвращения естественной или вынужденной конвекции внутри исследуемой пробы газа или жидкости);

 методы ламинарного режима, основанные на закономерностях переноса тепла в ламинарных потоках жидкостей; достоинствами этих методов являются:

 возможность непрерывного измерения теплофизических свойств технологических жидкостей в процессе течения через измерительное устройство, например в ходе инженерного эксперимента или реального технологического процесса);



Рис. 2.3. Характер изменения тепловых воздействий на внешние поверхности исследуемых образцов

 возможность экспериментального исследования зависимости теплопроводности жидкостей от скорости сдвига.

В зависимости от возможности контролировать теплофизические свойства материалов и изделий без нарушения их целостности различают методы и приборы:

 обычные (разрушающие), позволяющие измерять и контролировать теплофизические свойства материалов и изделий только после изготовления из них образцов заданной формы и размеров;

 неразрушающие — для измерения и контроля теплофизических свойств материалов и изделий без нарушения их целостности.

Примечание. При неразрушающих теплофизических измерениях образцы материала (или изделия) обычно рассматривают как неограниченное полупространство, а соответствующие методы и приборы базируются на использовании двухмерных храдач теплопроводности.

Глава З

ОСНОВЫ КАЛОРИМЕТРИИ

Калориметрия является одним из разделов технической теплофизики, в котором изучают [3, 6, 7] методы и средства измерения физических величин, характеризующих тепловые эффекты химических, физических и биологических процессов, а также тепловые свойства веществ (удельная теплоемкость, объемная теплоемкость и некоторые другие).

Результаты калориметрических измерений используются:

в научных исследованиях;

 при проектировании технологических процессов и аппаратов, промышленных и гражданских сооружений;

 при контроле и испытании качества продукции (переработанных материалов).

В данной главе рассматриваются основы калориметрических измерений.

Теоретические основы калориметрии основаны на уравнениях теплового баланса, например, в виде

$$Q = Q_{\rm a} + Q_{\rm o} + Q_{\rm mot},$$

где Q — общее количество тепла, выделившееся в системе; Q_a — количество тепла, аккумулированное материалом ампулы; Q_o — количество тепла, аккумулированное образцом; Q_{nor} — потери тепла в окружающую среду, и на известном соотношении

$$Q = Cm(T_{\rm K}-T_{\rm H}),$$

согласно которому, при нагреве тела от начальной температуры $T_{\rm H}$ до конечной температуры $T_{\rm K}$, это тело аккумулирует количество тепла Q, где C — удельная теплоемкость; m — масса тела.

3.1. АДИАБАТИЧЕСКАЯ КАЛОРИМЕТРИЯ

Наиболее точные измерения теплоемкости веществ обычно проводят [3] в адиабатическом калориметре (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Модель адиабатического калориметра с двухсоставным ядром: 1 – исследуемый образец с неизвестной удельной теплоемкостью C_x и известной массой m; 2 – ампула (стакан с крышкой); 3 – нагреватель; 4 – прибор для измерения электрической мощности (ваттметр); 5, 8, 9 – термопары; 6 – прибор для измерения температуры; 7 – внешняя металлическая оболочка; 10 – автоматический регулятор, поддерживающий нулевую разность температур (измеряемую дифференциально включенными термопарами 8 и 9) между ампулой 2 и внешней металлической оболочкой 7; 11 – охранный нагреватель адиабатический регемы

Образец 1 из исследуемого материала (жидкость или твердое тело) с известной массой m и удельной теплоемкостью C_x , подлежащей измерению, помещают в ампулу-стакан 2 с известной удельной теплоемкостью C_a и массой m_a . Нагреватель 3 может быть размещен в стенке ампулы 2 (если образец 1 представляет собой твердое тело) или непосредственно в исследуемом материале, если это жидкость. Ваттметр 4 позволяет измерять электрическую мощность $W(\tau)$, потребляемую нагревателем 3, и вычислять суммарное количество тепла

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_{\rm st}} W(\tau) \, d\tau, \qquad (3.1)$$

подведенное к двухсоставному ядру, образованному образцом 1 и ампулой 2. Термопара 5 и вторичный прибор 6 позволяют измерять температуру двухсоставного ядра. На рис. 3.1 показано, что термопара 5 может быть установлена непосредственно в исследуемом материале (если это жидкость или сыпучее вещество), однако при измерении теплоемкости твердых материалов термопару 5 часто устанавливают в стенке ампулы 2.

Внешнюю оболочку 7 обычно выполняют из металла, что позволяет создать изотермические условия вокруг двухсоставного центрального ядра. Адиабатическая система, включающая в себя дифференциально включенные термопары 8, 9, автоматический регулятор 10 и охранный нагреватель 11, обеспечивает почти полное устранение утечек тепла от двухсоставного ядра (состоящего из исследуемого материала 1 и ампулы-стакана 2 с крышкой) за счет поддержания нулевой разности температур между внешней металлической оболочкой 7 и ампулой 2.

Если принять меры к тому, чтобы в ходе эксперимента обеспечивался идеальный тепловой контакт между исследуемым образцом 1 и ампулой 2, то температуры образца 1 и ампулы 2 можно считать одинаковыми. При выполнении этого условия температура ампулы 2 с образцом 1 при подводе к ним импульса тепла (3.1) изменяется так, как это показано на рис. 3.2.



Рис. 3.2. Кривые изменения температуры $T_s(\tau)$ двухсоставного центрального ядра при подводе к нему теплового импульса [3]: a - 6ез учета потерь тепла в окружающую среду; $\delta - c$ учетом потерь тепла

При полном отсутствии потерь тепла в окружающую среду уравнение теплового баланса для центрального двухсоставного ядра может быть записано в виде

$$\int_{\tau_{0}}^{\tau_{H}} W(\tau) \, d\tau = Q = C_{x} m (T_{\kappa} - T_{H}) + C_{a} m_{a} (T_{\kappa} - T_{H}), \qquad (3.2)$$

где Q — полное количество тепла, подведенное к нагревателю 3; C_x , m — удельная теплоемкость и масса образца I; C_a , m_a — удельная теплоемкость и масса ампулы 2 с встроенным нагревателем и крышкой; T_x , T_k — температуры, зарегистрированные термопарой 5 в начале и конце опыта.

Принимая во внимание, что полную теплоемкость ампулы 2 (вместе с нагревателем 3 и крышкой) находят на практике в предварительных экспериментах и обозначают

$$C_{\rm A} = C_{\rm a} m_{\rm a}$$

уравнение теплового баланса обычно записывают в виде

$$Q = C_x m(T_K - T_H) + C_A (T_K - T_H). \qquad (3.3)$$

3 С.В. Пономарев и др.

Из уравнения (3.3) легко получить

$$Q = (T_{\kappa} - T_{\mu})[C_x m + C_A];$$

 $C_x m + C_A = rac{Q}{T_{\kappa} - T_{\mu}},$

откуда следует основная расчетная формула адиабатического калориметра

$$C_{x} = \frac{1}{m} \left[\frac{Q}{T_{\kappa} - T_{\scriptscriptstyle H}} - C_{\rm A} \right]. \tag{3.4}$$

В большинстве случаев на практике не удается полностью устранить утечки тепла от центрального двухсоставного ядра в окружающую среду. Тогла уравнение теплового баланса принимает вид [3]

$$Q = C_x m(T_{\kappa} - T_{\rm H}) + C_{\rm A}(T_{\kappa} - T_{\rm H}) + \int_{\tau_0}^{\tau_{\kappa}} K[T_{\kappa}(\tau) - T_{\rm c}(\tau)] d\tau$$

где *К* — коэффициент эффективной тепловой проводимости в окружающую среду; Т_н - начальная температура центрального ядра; $T_{\rm g}(\tau)$ — изменение температуры центрального ядра (ампулы) во времени; Т_с — температура окружающей среды. Третье слагаемое $Q_{\text{пот}} = \int_{0}^{\tau_{\text{K}}} [T_{\text{R}}(\tau) - T_{\text{C}}(\tau)] d\tau$ в последней формуле представляет собой

потери тепла в окружающую среду.

Примерный вид функции, описывающий закономерности изменения температуры $T_{\rm g}(\tau)$ центрального ядра при наличии утечек тепла, представлен на рис. 3.2, б. Если импульс имеет прямоугольную форму (W = const при $\tau_0 < \tau < \tau_w)$, то при K = const, $T_c = \text{const}$ уравнение теплового баланса можно представить в виде

$$Q = C_x m (T_m - T_H) + C_A (T_m - T_H),$$

где T_m — условное значение температуры центрального ядра в момент времени

$$\tau = \frac{\tau_0 + \tau_{\scriptscriptstyle H}}{2},$$

определяемое в результате графической обработки экспериментальных данных (см. рис. 3.2, б).

При этом расчетная зависимость (3.4) приобретает вид

$$C_x = \frac{1}{m} \left[\frac{Q}{T_m - T_{\rm H}} - C_{\rm A} \right].$$
 (3.4a)

Рассмотренный прием обработки удобен тем, что не требуется вспомогательных измерений коэффициента К эффективной тепловой проводимости между центральным ядром и окружающей средой.

Эффективную теплоемкость $C_{\rm A}$ ампулы-стакана 2 с встроенным в него нагревателем 3 целесообразно определять экспериментально в опытах без образца.

В заключение отметим, что адиабатические калориметры имеют довольно простую конструкцию, позволяют измерять теплоемкость с малыми погрешностями, что позволяет применять их при прецизионных научных исследованиях.

3.2. ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ МЕТОДОМ МОНОТОННОГО НАГРЕВА

Метод монотонного нагрева реализован в измерителе теплоемкости ИТ-C-400, предназначенном для исследования температурной зависимости теплоемкости твердых тел, сыпучих и волокнистых материалов, а также жидкостей с плотностью ≥ 800 кг/м³.

Тепловая схема С-калориметра типа ИТ-С-400 представлена на рис. 3.3.



Рис. 3.3. Схема динамического С-калориметра типа ИТ-С-400

В процессе подготовке к работе образец / помещают в ампулу, выполненную в виде стакана 2 с крышкой 3. Стакан раямещают на тепломере 4, закрепленном на основании 5 с встроенным нагревателем 6. Тепловая связь образца 1, находящегося в стакане 2 с крышкой 3, с внешней средой допускается только через тепломер 4. Поэтому внешние поверхности стакана 3 отделены от окружающей среды адиабатической оболочкой, выполненной в виде колпака 7 со встроенным в него нагревателем 8. Система автоматического регулирования САР поддерживает нулевую разность между температурой колпака 7 (измеряемой термопарой 9) и температурой стакана 2 (измеряемой кермопарой 10) путем изменения электрической мощности, подводимой к нагревателю 8, равномерно распределенному по боковой поверхности колпака 7. Монотонный нагрев образца 1 и ампулы осуществляется за счет подвода электрической мощности к нагревателю 6, встроенному в основание 5.

3.2.1. Теоретические основы метода

Количество тепла, проходящее в единицу времени через сечение тепломера 4 (рис. 3.3), расходуется на разогрев как образца 1, так и ампулы в виде стакана 2 с крышкой 3:

$$P_{\tau} = P_0 + P_a,$$
 (3.5)

где P_0 — мощность (количество тепла в единицу времени), приходящаяся на разогрев образца; P_a — то же на разогрев ампулы; P_τ — полная мощность, т. е. количество тепла в единицу времени, проходящее через тепломер 4.

Величины Ро, Ра могут быть рассчитаны по формулам

$$P_0 = cm_0b;$$
$$P_a = c_a m_a b = C_A b.$$

где c, c_a — удельная теплоемкость образца и ампулы [Дж/(кг · K)]; m_0, m_a — массы образца и ампулы [кг]; $b = \frac{dT}{d\tau}$ — скорость разогрева [K/c]; $C_A = c_a m_a$ — полная теплоемкость ампулы [Дж/K].

Полная теплоемкость $C_A = C_A(T)$ является постоянной характеристикой ампулы, выполненной в виде стакана с крышкой, и зависит только от температуры T.

О величине тепловой мощности P_{τ} , проходящей через тепломер 4, можно судить по величине перепада температуры О на тепломере 4 и по коэффициенту K_{τ} тепловой проводимости тепломера, определенных в ходе независимых градуировочных экспериментов

$$P_{\tau} = K_{\tau}\Theta$$

Параметр $K_{\tau} = K_{\tau}(T)$ является постоянной характеристикой тепломера и зависит только от температуры T. С учетом изложенного



уравнение теплового баланса (3.5) для ампулы с размещенным в ней образцом можно записать в виде

$$K_{\mathrm{T}}\Theta = cm_0b + C_{\mathrm{A}}b,$$

откуда получается расчетная формула

$$c = \frac{1}{m_0} \left[\frac{K_{\tau} \Theta}{b} - C_{\rm A} \right]. \tag{3.6}$$

На рис. 3.4 показаны графики, иллюстрирующие изменение температур, измеряемых термопарами 11 и 12 (см. рис. 3.3). Отметим, что термопара 11 измеряет температуру $T_n(\tau)$ ниж-

температур $T_{\rm H}(\tau)$ и $T_{\rm a}(\tau)$ во времени

ней части тепломера 4, а термопара 12 — температуру $T_a(\tau)$ ампулы, опирающейся на верхнюю часть тепломера 4 (см. рис. 3.3).

Из рис. 3.4 видно, что перепад $\Theta(\tau)$ температуры на тепломере представляет собой разность температур $T_u(\tau)$ и $T_a(\tau)$, т. е.

$$\Theta(\tau) = T_{\rm H}(\tau) - T_{\rm a}(\tau).$$

Из треугольника 1-2-3 на рис. 3.4 легко вывести соотношение

$$rac{dT}{d au} = b pprox rac{\Theta}{ au_{ au}}$$
 или $\Theta pprox b au_{ au},$

где τ_{τ} — время запаздывания температуры на тепломере. Подставив последнее выражение в формулу (3.6), находим расчетную зависимость

$$c = \frac{1}{m_0} [K_{\rm T} \tau_{\rm T} - C_{\rm A}]. \tag{3.7}$$

Вынесем в формуле (3.7) К_т за скобку:

$$c = \frac{K_{\rm T}}{m_0} \left[\tau_{\rm T} - \frac{C_{\rm A}}{K_T} \right].$$

Обозначив $C_{\rm A}/K_{
m \tau} = \tau_{
m \tau}^n$ и заметив, что величина $\tau_{
m \tau}^n$ представляет собой время запаздывания на тепломере, которое можно определить опытным путем в экспериментах с пустой ампулой, получим формулу

$$c = \frac{K_{\tau}(T)}{m_0} \big[\tau_{\tau} - \tau_{\tau}^n(T) \big], \qquad (3.8)$$

наиболее часто используемую на практике при обработке экспериментальных данных с применением динамического калориметра типа ИТ-С-400. Постоянные характеристики $K_{\tau}(T), \tau_{\tau}^{n}(T)$ обычно приводятся в эксплуатационной документации измерителей теплоемкости ИТ-С-400.

3.2.2. Порядок выполнения измерительных операций

Испытуемый образец 1 (см. рис. 3.3) помещают в ампулу в виде стакана 2, который закрывается крышкой 3. Колпак 7 адиабатической оболочки опускают на основание 5. Измерительное устройство охлаждают до необходимого нижнего уровня температуры путем пропускания жидкого азота через отверстия в колпаке 7 (эти отверстия на рис. 3.3 не показаны). Достижение необходимой начальной температуры контролируют по показаниям термопар 11 и 12.

В момент начала активной стадии эксперимента подают напряжение с блока питания БП на нагреватель 6. Ядро измерительной ячейки начинает плавно (монотонно) разогреваться вплоть до достижения верхней (предельной для каждого образца) температуры.

При подготовке к эксперименту и во время активной его стадии система автоматического регулирования поддерживает (изменяя электрическую мощность, потребляемую нагревателем 8) нулевую разность температур (контролируемую дифференциально включенными термопарами 9 и 10) между колпаком 7 и стаканом 2 с исследуемым образцом 1. В ходе эксперимента, в процессе непрерывного монотонного разогрева, на различных уровнях температуры с шагом 25 °С схема ИС измеряет время запаздывания τ_{τ} температуры ампулы $T_a(\tau)$ по отношению к температуре $T_u(\tau)$ основания 5. Искомую теплоемкость с вычисляют по формуле (3.8) с учетом известных зависимостей от температуры «постоянных» характеристик $K_{\tau}(T), \tau_{\tau}^{x}(T)$ прибора.

Блок питания обеспечивает нагрев ядра измерительной ячейки с заданной скоростью $b = \frac{dT}{d\tau} \approx 0,1$ K/c, а система автоматического регулирования САР — поддержание с высокой точностью нулевой разности температур колпака 7 и стакана 2, достаточной для того, чтобы утечками тепла в окружающую среду можно было пренебречь.

3.3. ОСНОВЫ МИКРОКАЛОРИМЕТРИИ

Микрокалориметры предназначены для изучения процессов, сопровождающихся малыми тепловыми эффектами и характеризующихся малой тепловой мощностью.

В последние годы стали довольно широко использовать микрокалориметры типа Кальве [7]. Принцип их действия основан на регистрации тепловых потоков двумя дифференциально включенными датчиками тепловых потоков (на основе термобатарей), они обладают высокой чувствительностью (по температуре до 10⁻³ К, по тепловым эффектам до 10⁻⁴ Дж/с), что позволяет исследовать процессы длительностью до нескольких часов при общем тепловом эффекте несколько джоулей.

Типичный микрокалориметр Кальве состоит (рис. 3.5, *a*) из массивного металлического (медного) блока *I*, в двух (иногда в четырех) симметрично расположенных цилиндрических полостях которого размещены микрокалориметрические ячейки *2* и *3* цилиндрической формы. Между ячейками *2*, *3* и стенками блока *I* находятся тепломеры *4*, *5* также цилиндрической формы.

Перед началом эксперимента в рабочую ячейку 2 помещают образец исследуемого вещества, например навеску известной массы из приготовленной заранее композиции при изучении теплового эффекта химической реакции отверждения композиционного связующего. В сравнительной ячейке 3 размещают образец такой же массы из инертного материала, например из уже затвердевшего композиционного материала. Для контроля температуры в ходе эксперимента, в сравни тельной ячейке 3 размещают термопару 6, подключенную к вторичному прибору 7. Тот факт, что массивный металлический блок 1 обычно изготавливают из меди, одного из самых теплопроводных металлов, позволяет считать, что температура рабочей ячейки 2 и сравнительной ячейки 3 практически не различаются. При необходимости термопара 6 может быть размещена в рабочей ячейке 2.

Большое количество отверстий 11, расположенных вдоль периметра массивного металлического блока 1 имеет целью создать повышенное



Рис. 3.5. Микрокалориметр Кальве: a — один из вариантов конструкции микрокалориметра; δ — изменение температуры в ячейке 3 во времени; a — график изменения сигнала E дифференциально включенных тепломеров 4 и δ

тепловое сопротивление между нагревателем 10 и ячейками 2, 3. За счет этого сопротивления снижается влияние колебаний температуры нагревателя 10, возникающих при работе системы программного регулирования температуры (СПРТ) 9, что позволяет получить желаемый закон изменения температуры ячеек 2 и 3. На рис. 3.5, б приведен пример эксперимента, в котором СПРТ 9 задает и реализует линейный закон изменения температуры.

Сигнал дифференциально (встречно) включенных тепломеров 4, 5 подается на вторичный прибор 8. Пример изменения суммарного сигнала $E(\tau)$ тепломеров 4, 5 приведен на рис. 3.5, s.

Значения $E(\tau)$ суммарного сигнала тепломеров 4, 5 связаны прямопропорциональной зависимостью с текущей мощностью $W(\tau)$ тепловых выделений в рабочей ячейке 2

$$W(\tau) = kE(\tau), \tag{3.9}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Суммарный тепловой эффект $Q = \int\limits_{ au_n}^{ au_n} W(au) \, d au$ исследуемого процесса

пропорционален площади S под кривой $E(\tau) - E_0$, представленной на рис. 3.5, s, и с учетом соотношения (3.9) может быть рассчитан по формуле

$$Q = \int_{\tau_n}^{\tau_k} W(\tau) \, d\tau = k \int_{\tau_n}^{\tau_k} [E(\tau) - E_0] \, d\tau = kS,$$
(3.10)

где $S = \int\limits_{\tau_u}^{\tau_u} [E(\tau) - E_0] d\tau$ — площадь между кривой $E(\tau)$ и базовой

пунктирной линией E_0 (12 на рис. 3.3, в), по которой изменялся бы сигнал $E(\tau)$, если бы в рабочей ячейке 2 не было тепловыделений; $\tau_{\rm H}$, $\tau_{\rm K}$ — моменты времени, соответствующие началу и окончанию химической реакции отверждения.

Сопоставление графиков $T(\tau)$ и $E(\tau)$ на рис. 3.5, б. в., позволяет также определить температурный диапазон $T_{\rm H} < T < T_{\rm K}$, в пределах которого происходит реакция затвердевания при заданном в ходе эксперимента режиме (скорости) изменения температуры, например, по линейному закону $T(\tau) = T_0 + K\tau$, представленному на рис. 3.5, б.

Коэффициент пропорциональности k зависимости (3.10) на практике находят путем проведения специального эксперимента. В его ходе в рабочую ячейку 2 дополнительно помещают миниатюрный электрический нагреватель, с помощью которого в интервале времени $\tau_{\rm H} < \tau < \tau_{\rm K}$ вводят количество тепла

$$Q = \int_{\tau_u}^{\tau_{\kappa}} P(\tau) \, d\tau,$$

где $P(\tau)$ — электрическая мощность нагревателя.

Если в ходе эксперимента подается постоянная мощность $P(\tau) = P = \text{const}$, то последняя формула принимает вид

$$Q = P(\tau_{\rm K} - \tau_{\rm H}).$$

По полученным экспериментальным данным определяют площадь S под кривой $E(\tau)-E_0$

$$S = \int_{\tau_{\rm H}}^{\tau_{\rm K}} \left[E(\tau) - E_0 \right] d\tau,$$