В. Д. Бертяев

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \equiv \overline{OM}(t$$

Теоретическая механика на базе Mathcad

практикум

- Кинематика, статика, динамика – основные понятия и определения
- Большое количество специально подобранных задач
- Методология решения задач средствами пакета Mathcad
- Основы работы в Mathcad
- Возможность использования при дневной, вечерней и заочной формах обучения студентами высших и средних специальных заведений

$$I_\xi = \sum_k m_k d_k^2$$

$a_m(t) := \mathrm{vector5}\left(R_M(t)_1, R_M(t)_2, a_M(t)_1, a_M(t)_2, Ma\right)$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

Виталий Бертяев

Теоретическая механика на базе Mathcad

ПРАКТИКУМ

Допущено учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по машиностроительным специальностям

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Б52

Бертяев В. Д.

Б52 Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 752 с.: ил.

ISBN 5-94157-625-0

В пособии рассматриваются решения большого количества разнообразных задач основных разделов курса (кинематики, статики, динамики) с помощью Mathcad. Основные теоретические сведения по каждому разделу даны конспективно, в качестве справочного материала. Особое внимание уделено применению Mathcad для анализа поведения механических систем на основе полученного решения. Приводятся тексты рабочих документов Mathcad с решениями задач. Изложены основы работы с Mathcad; представлен его интерфейс, вычислительные и аналитические возможности, подробно рассмотрены вопросы графического отображения получаемых с помощью Mathcad решений; дано введение в программирование на языке Mathcad; представлены часто используемые в механике твердого тела функции, операторы и объекты.

Для студентов и преподавателей высших и средних технических учебных заведений всех форм обучения

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Леонид Кочин*
Компьютерная верстка	*Екатерины Трубниковой*
Корректор	*Татьяна Кошелева*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 31.08.05.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 60,63.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-625-0

Содержание

Введение

Теоретическая механика является одной из важнейших физико-математических дисциплин, изучаемых не только в вузах, но и в средних специальных учебных заведениях. На основных законах теоретической механики базируются многие общеинженерные и теоретические дисциплины, такие как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, теория упругости, внешняя и внутренняя баллистика и т. д. Хорошее знание курса теоретической механики требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант решения.

Обширная литература по теоретической механике [2—4, 15, 16, 19—21, 24] помогает освоить теорию, а также постановку и методы решения типовых задач. Однако полученные знания и умения не освобождают от рутинных и трудоемких расчетов, за которыми может теряться смысл механических явлений и процессов. В существующей литературе не уделяется достаточного внимания математическому моделированию и анализу полученных решений. Между тем потребность в таких руководствах ощущается как студентами в процессе обучения, так и специалистами в их практической деятельности. Иными словами, нужно научить не только методам, но и анализу решения задач разной степени сложности таким образом, чтобы это решение не затмевало физику процессов и явлений.

В настоящее время развитие вычислительной техники приобрело лавинообразный характер, получили широкое распространение такие мощные пакеты математического моделирования, не требующие специальных знаний в программировании, как Maple, MATLAB, Mathcad и т. д. Облегчая решение сложных математических задач, такие системы позволяют снять психологический барьер в изучении механики и математики, а также делают этот процесс интересным и более простым. Грамотное их применение в учебном процессе позволяет обеспечить повышение фундаментальности математического и технического образования.

Данную книгу следует рассматривать как введение к применению одной из самых распространенных математических систем — Mathcad — для решения задач разной степени сложности в курсе "Теоретическая механика". Использование Mathcad в теоретической механике позволяет анализировать поведение механических систем в соответствии с поставленной задачей, что дает возможность решать реальные инженерные задачи учащимися младших курсов, не знакомыми еще с численными методами и программированием.

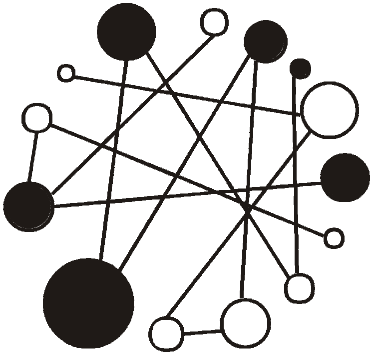
Пакет Mathcad представляет собой эффективное средство для аналитических преобразований и численного решения инженерных и физических задач. Область его применения простирается от простейших вычислений до расчета сложных задач в различных отраслях знаний. С помощью Mathcad можно с успехом решать задачи механики абсолютно твердых и деформируемых тел. Пакет имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики [1, 11—13, 26]. Наличие интеграции Mathcad с такими мощными системами автоматизации расчетов, как MATLAB и Excel делает его незаменимым инструментом в руках не только студента, но и инженера, занимающегося разработкой сложных систем.

Данная книга продолжает серию справочных книг [6—9, 17, 21, 22, 23], посвященных современным средствам автоматизации математических расчетов и применению их в технических приложениях. Предполагается, что читатель либо изучает теоретическую механику, либо знаком с ней. Наиболее эффективным путем обучения искусству применения методов теоретической механики является не формальное заучивание правил и приемов, а показ их в действии. Поэтому в книге основное внимание уделено решению практических задач, специально подобранных для того, чтобы, с одной стороны, научить самостоятельно решать более сложные и математически трудоемкие задачи механики, а с другой — показать возможности системы Mathcad.

Книга состоит из трех частей (14 глав) и двух приложений. Первая, вторая и третья часть книги посвящены решению конкретных задач теоретической механики в соответствии с ее разделами (кинематика, статика и динамика). В каждом разделе после конспективного обзора теории указываются не только типы задач, решаемых с помощью перечисленных теорем и положений, но и методы пакета Mathcad, позволяющие получить данное решение. Затем приводятся решения конкретных задач, причем часто сравниваются и оцениваются разные способы и методы их получения. В приложении 1 даны основные сведения о Mathcad, приемы работы с его математическим, графическим и текстовым редакторами. В отличие от существующего переводного описания системы Mathcad PLUS 6.0 [1] и других изданий [11—13, 26], данное приложение характеризуется ориентацией на англоязычную версию Mathcad 11, компактностью изложения, сокращенным описанием широко известных элементов интерфейса, изучением системы на конкретных примерах. Приложение 2 является кратким справочником по Mathcad 11, в котором приводится описание интерфейса, основных операторов и функций пакета, а также перевод сообщений об ошибках и способах их устранения. Изложенного материала достаточно для первоначального ознакомления с пакетом. Предварительных знаний о Mathcad не требуется.

Считаю своим долгом поблагодарить доцента кафедры теоретической механики Тульского государственного университета Л.А. Булатова, ознакомившегося с рукописью и сделавшего ряд ценных замечаний.

Все замечания и предложения по структуре, содержанию и стилю изложения книги автор с благодарностью примет по адресу vit@tiei.ru или tm@tsu.tula.ru.



ЧАСТЬ I

Кинематика

Кинематика изучает механическое движение материальных объектов с геометрической точки зрения. Механическим движением называется процесс непрерывного изменения положения тел (или их точек) в пространстве относительно друг друга.

Объектами изучения кинематики является материальная точка и абсолютно твердое тело. Тело, размерами которого можно пренебречь по условиям задачи, принимается за материальную точку. Абсолютно твердым телом называется система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными в любой момент времени.

Положение точки или тела в пространстве определяется с помощью системы координат (системы отсчета), неизменно связанной с другим телом (телом отсчета). Система отсчета называется основной или "абсолютной", если в рассматриваемой задаче можно не учитывать движение этой системы.

При проектировании новой машины или прибора необходимо уметь создать такую кинематическую схему, в которой движения всех звеньев совершаются наиболее целесообразно. Для этого необходимо уметь определять кинематические характеристики движения точек: законы движения, траектории, скорости и ускорения. Без знания кинематики это сделать невозможно.

Глава 1

Кинематика точки

Основные понятия и определения

Положение точки определяется радиус-вектором (рис. 1.1):

$$\overline{r} = \overline{r}\left(t\right) \equiv \overline{OM}\left(t\right).$$

Это уравнение движения точки в векторной форме.

Положение движущейся точки в каждый момент времени относительно выбранной системы отсчета может быть определено ее декартовыми координатами (рис. 1.1):

$$\overline{r}\left(t\right) = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$$

или криволинейными координатами q_i, $i = \overline{1,\ 3}$ (рис. 1.3):

$$\overline{r}\left(t\right) = q_1\left(t\right)\ \overline{e}_1 + q_1\left(t\right)\ \overline{e}_2 + q_1\left(t\right)\ \overline{e}_3,$$

где $\overline{e}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\,\overline{r}}{\partial\,q_i}$, а $h_i = \left|\dfrac{\partial\,\overline{r}}{\partial\,q_i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial\,x}{\partial\,q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\,y}{\partial\,q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\,z}{\partial\,q_i}\right)^2}$ — коэффициенты Ламе.

Непрерывная кривая, с точками которой в каждый момент времени совпадает движущаяся точка, называет траекторией. Уравнения движения точки в координатной форме представляют собой уравнения траектории в параметрическом виде. Если исключить из них параметр t, то получим уравнение траектории в виде пересечения двух поверхностей:

$$F_1\left(x,\,y,\,x\right) = 0,\ \ F_2\left(x,\,y,\,x\right) = 0.$$

При известном виде траектории движение точки удобно задать естественным способом (рис. 1.2). Для этого на траектории назначают начало отсчета, например точку O, направление отсчета и записывают зависимость дуговой координаты s от времени $\overset{\frown}{OM} = s(t)$. С траекторией точки можно связать естественный координатный базис с единичными векторами: касательной — $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$, главной нормали — $\bar{n} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ и бинормали — $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$. Здесь ρ — радиус кривизны траектории.

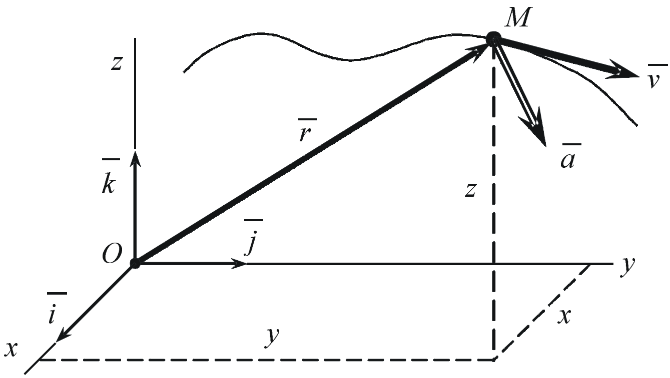


Рис. 1.1. Закон движения, скорость и ускорение точки в декартовых координатах

Скорость точки — векторная величина, которая направлена по касательной к траектории, характеризует быстроту изменения ее положения в пространстве и вычисляется как производная от радиус-вектора по времени:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\,\bar{i} + \dot{y}\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k}\,.$$

Модуль и направляющие косинусы вектора скорости равны

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},\ \cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v},\ \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{v},\ \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

При естественном способе задания движения точки ее скорость можно определить следующим образом:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\,\bar{r}}{d\,s}\dot{s} = \dot{s}\,\bar{\tau} = v_\tau\,\bar{\tau}\,,$$

где $v_\tau = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = \dot{s}$ — проекция вектора скорости на касательную к траектории.

В криволинейных координатах вектор скорости имеет вид:

$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = h_1\,\dot{q}_1\,\bar{e}_1 + h_2\,\dot{q}_2\,\bar{e}_2 + h_3\,\dot{q}_3\,\bar{e}_3 = h_i\,\dot{q}_i\,\bar{e}_i\,,$$

где $\dot{q}_i$ — обобщенная скорость точки.

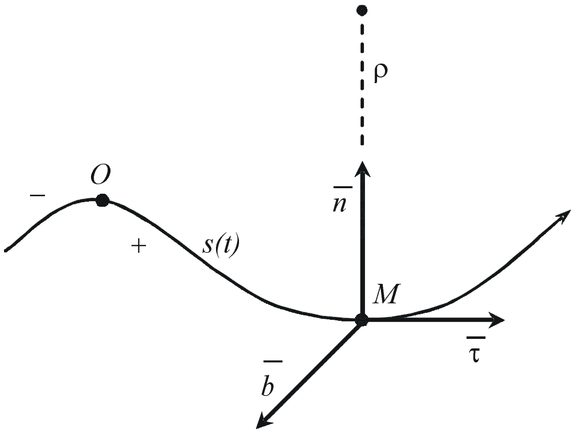


Рис. 1.2. Естественный координатный базис

В случае ортогональных криволинейных координат модуль скорости определится выражением

$$v=\sqrt{\left(h_1\,\dot q_1\right)^2+\left(h_2\,\dot q_2\right)^2+\left(h_3\,\dot q_3\right)^2}\ .$$

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости, называется ускорением и равна производной по времени от вектора скорости:

$$\overline{a}=\dot{\overline{v}}=\ddot{\overline{r}}=a_x\,\overline{i}+a_y\,\overline{j}+a_z\,\overline{k}=\ddot x\,\overline{i}+\ddot y\,\overline{j}+\ddot z\,\overline{k}\ .$$

Модуль вектора ускорения и его направляющие косинусы можно вычислить по формулам:

$$a=\sqrt{\ddot x^2+\ddot y^2+\ddot z^2},\quad \cos(\overline{a},\overline{i})=\frac{a_x}{a},\quad \cos(\overline{a},\overline{j})=\frac{a_y}{a},\quad \cos(\overline{a},\overline{k})=\frac{a_z}{a}\ .$$

При естественном способе задания движения точки ускорение определяется равенством

$$\overline{a}=\dot v_\tau\,\overline{\tau}+v_\tau\,\dot{\overline{\tau}}=\dot v_\tau\,\overline{\tau}+\left(v_\tau\right)^2\frac{d\,\overline{\tau}}{d\,s}=\ddot s\,\overline{\tau}+\frac{{v_\tau}^2}{\rho}\,\overline{n}=a_\tau\,\overline{\tau}+a_{\text{n}}\,\overline{n}\ ,$$

где $a_\tau=\overline{a}\cdot\overline{\tau}=\dot v_\tau=\ddot s$ — касательное и $a_{\text{n}}=\overline{a}\cdot\overline{n}=\dfrac{{v_\tau}^2}{\rho}$ — нормальное ускорения.

Так как $\overline{a}_\tau\ \perp\ \overline{a}_{\text{n}}$, модуль ускорения можно найти по теореме Пифагора

$$a=\sqrt{{a_\tau}^2+{a_{\text{n}}}^2}\ .$$

Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.

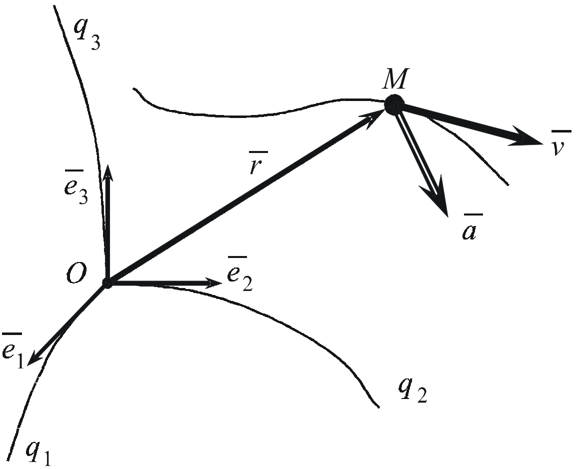


Рис. 1.3. Закон движения, скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

В ортогональных криволинейных координатах вектор ускорения равен

$$\overline{a}(t)=\dot{\overline{v}}(t)=a_1\,\overline{e}_1+a_2\,\overline{e}_2+a_3\,\overline{e}_3=a_i\,\overline{e}_i\,,$$

где $a_i=\dfrac{1}{h_i}\left[\dfrac{d}{d\,t}\left(\dfrac{\partial\,\mathrm{T}}{\partial\,\dot{q}_i}\right)+\dfrac{\partial\,\mathrm{T}}{\partial\,q_i}\right]$, $i=\overline{1,3}$ — проекции ускорения точки, направленные по базисным ортогональным векторам, а $\mathrm{T}=v^2/2$.

Пример 1.1. Определение кинематических характеристик точки по заданному закону движения

Точка M движется согласно уравнениям:

$$x(t)=3\cos(\omega\,t)\quad[\text{см}],$$

$$y(t)=2\cos(\omega\,t)\quad[\text{см}],\quad\omega=\pi\quad\left[\text{с}^{-1}\right].$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки M, в момент времени $T=1/3$ с . Найти тангенциальную и нормальную составляющие, а также радиус кривизны траектории. Построить графики изменения кинематических характеристик точки.

Решение

Для определения траектории точки M, движущейся по заданному закону, исключим из уравнений движения время, для чего выразим тригонометрические функции времени, возведем каждое уравнение в квадрат и сложим почленно. В результате получим уравнение траектории, которая является эллипсом с полуосями $a = 3$ и $b = 2$:

$$\frac{x(t)}{3} = \cos(\omega t), \quad \frac{y(t)}{2} = \sin(\omega t), \quad \Rightarrow \quad \frac{x(t)^2}{3^2} + \frac{y(t)^2}{2^2} = 1.$$

Дальнейшее решение проведем с использованием стандартных методов Mathcad. На рис. 1.4 представлено окно программы, содержащее численное решение поставленной задачи.

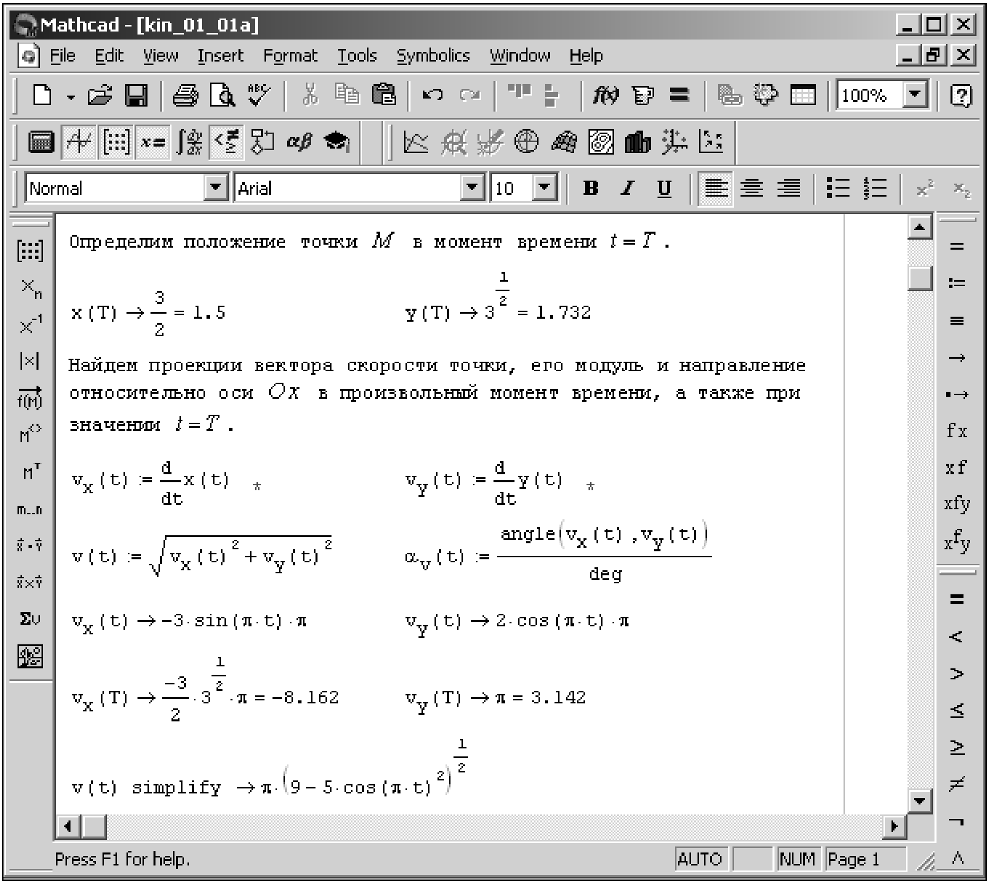


Рис. 1.4. Окно Mathcad, содержащее численное решение задачи

Примечание

В Mathcad имеется возможность с помощью команды **Save as** (Сохранить как) сохранить решение в формате RTF (рис. 1.5), а затем вставить его в любой документ, в том числе и в рукопись этой книги. Однако размещение в книге большого объема неформатированного текста, содержащего внедренные объекты, неудобно по технологическим соображениям, поэтому в дальнейшем решения задач, снятые с экрана Mathcad, будут выделяться шрифтом `Courier`.

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t)$$

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \qquad \alpha_v(t) := \frac{\mathrm{angle}(v_x(t), v_y(t))}{\mathrm{deg}}$$

$$v_x(t) \rightarrow -3\cdot\sin(\pi\cdot t)\cdot\pi \qquad v_y(t) \rightarrow 2\cdot\cos(\pi\cdot t)\cdot\pi$$

$$v_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi = -8.162 \qquad v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142$$

$$v(t)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \pi\cdot\left(9-5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(T)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 31^{\frac{1}{2}}\cdot\pi = 8.746$$

Рис. 1.5. Решение в формате RTF

Далее представлено численное решение поставленной задачи, снятое с экрана программы.

Введем исходные данные задачи.

$$T := \frac{1}{3} \qquad \omega := \pi \qquad x(t) := 3\cos(\omega t) \qquad y(t) := 2\sin(\omega t)$$

Определим положение точки M в момент времени $t=T$.

$$x(T) \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5 \qquad y(T) \rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 1.732$$

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

Примечание

Звездочки справа от выражения означают, что режим оптимизации Mathcad включен и процедура вычисления данного выражения оптимизирована.

$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t)$ *

$v_x(t) \rightarrow -3\cdot\sin(\pi\cdot t)\cdot\pi$

$v_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi = -8.162$

$v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t)$ *

$v_y(t) \rightarrow 2\cdot\cos(\pi\cdot t)\cdot\pi$

$v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142$

$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$

$v(t)$ simplify $\rightarrow \pi\cdot\left(9 - 5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$v(T)$ simplify $\rightarrow \frac{1}{2}\cdot 31^{\frac{1}{2}}\cdot\pi = 8.746$

$\alpha_v(t) := \frac{\mathrm{angle}\left(v_x(t), v_y(t)\right)}{\mathrm{deg}}$

$\alpha_v(T) \rightarrow \frac{-\mathrm{atan}\left(\frac{2}{9}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) + \pi}{\mathrm{deg}} = 158.948$

Найдем проекции вектора ускорения точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

$a_x(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ *

$a_x(t) \rightarrow -3\cdot\cos(\pi\cdot t)\cdot\pi^2$

$a_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2}\cdot\pi^2 = -14.804$

$a_y(t) := \frac{d^2}{dt^2}y(t)$ *

$a_y(t) \rightarrow -2\cdot\sin(\pi\cdot t)\cdot\pi^2$

$a_y(T) \rightarrow -3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^2 = -17.095$

$a(t) := \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2}$

$a(t)$ simplify $\rightarrow \pi^2\cdot\left(5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2 + 4\right)^{\frac{1}{2}}$

$a(T)$ simplify $\rightarrow \frac{1}{2}\cdot 21^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^2 = 22.614$

$$\alpha_a(t) := \frac{\text{angle}\left(a_x(t), a_y(t)\right)}{\text{deg}} \qquad \alpha_a(T) \rightarrow \frac{\text{atan}\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) - \pi}{\text{deg}} = -130.893$$

Вычисляем тангенциальное ускорение точки в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$a_\tau(t) := \frac{v_x(t)\cdot a_x(t) + v_y(t)\cdot a_y(t)}{v(t)}$$

$$a_\tau(t) \text{ simplify } \rightarrow 5\cdot\sin(\pi\cdot t)\cdot\pi^2\cdot\frac{\cos(\pi\cdot t)}{\left(9 - 5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$a_\tau(T) \text{ simplify } \rightarrow \frac{5}{62}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^2\cdot 31^{\frac{1}{2}} = 7.676$$

Вычисляем нормальное ускорение точки в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$a_n(t) := \sqrt{a(t)^2 - a_\tau(t)^2} \qquad a_n(t) \text{ simplify } \rightarrow 6\cdot\pi^2\cdot\left(\frac{-1}{-9 + 5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_n(T) \text{ simplify } \rightarrow \frac{12}{31}\cdot 31^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^2 = 21.272$$

Вычисляем угол между направлениями вектора ускорения и главной нормали к траектории.

$$\beta(t) := \frac{\text{angle}\left(a_n(t), a_\tau(t)\right)}{\text{deg}} \qquad \beta(T) = 19.842$$

Вычисляем радиус кривизны траектории в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$\rho(t) := \frac{v(t)^2}{a_n(t)} \qquad \rho(t) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-1}{6}\cdot\frac{-9 + 5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2}{\left(\frac{-1}{-9 + 5\cdot\cos(\pi\cdot t)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho(T) \text{ simplify } \rightarrow \frac{31}{48}\cdot 31^{\frac{1}{2}} = 3.596$$

Построим графики зависимостей найденных величин от времени в интервале $0 \le t \le 2$ [с] (рис. 1.6—1.9).

Зададим t в виде дискретной переменной:

$t := 0, 0.01 .. 2$

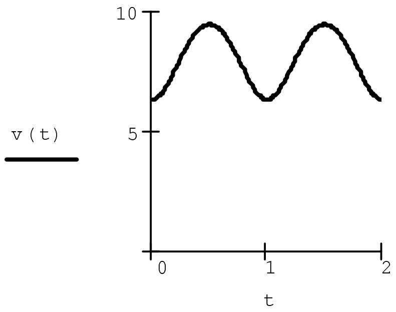


Рис. 1.6. График зависимости модуля скорости от времени t

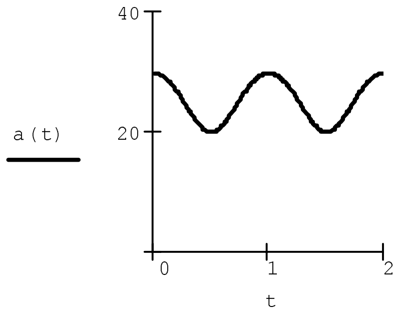


Рис. 1.7. График зависимости модуля ускорения от времени t

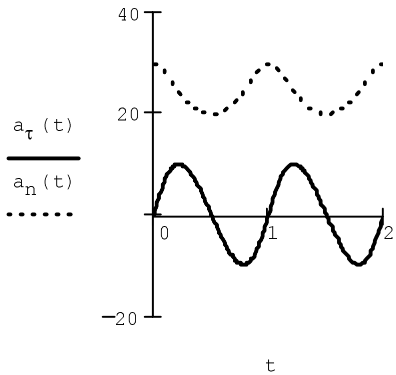


Рис. 1.8. График зависимости тангенциального и нормального ускорения от времени t

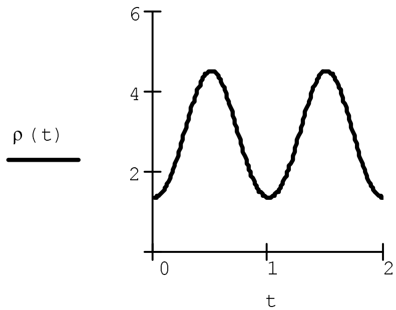


Рис. 1.9. График зависимости радиуса кривизны траектории от времени t

Так как уравнения движения точки являются ее траекторией, заданной в параметрическом виде, отобразить ее на графике (рис. 1.10) можно, задав в шаблоне графика XY: на оси X зависимость $x(t)$, а на оси Y – $y(t)$. Положение точки зададим ее координатами $x(T)$ и $y(T)$.

Стандартные методы Mathcad не позволяют изображать на графиках определяемые векторы. Расширить возможности Mathcad, обеспечивающие дифференцирование и отображение векторов, можно с помощью пользовательских функций-подпрограмм (*см. разд. П1.9 Приложения 1*), которые находятся в отдельном файле user_fun.mcd. Для определенности этот файл расположим по адресу: C:\Program Files\Mathsoft\user_fun.mcd.

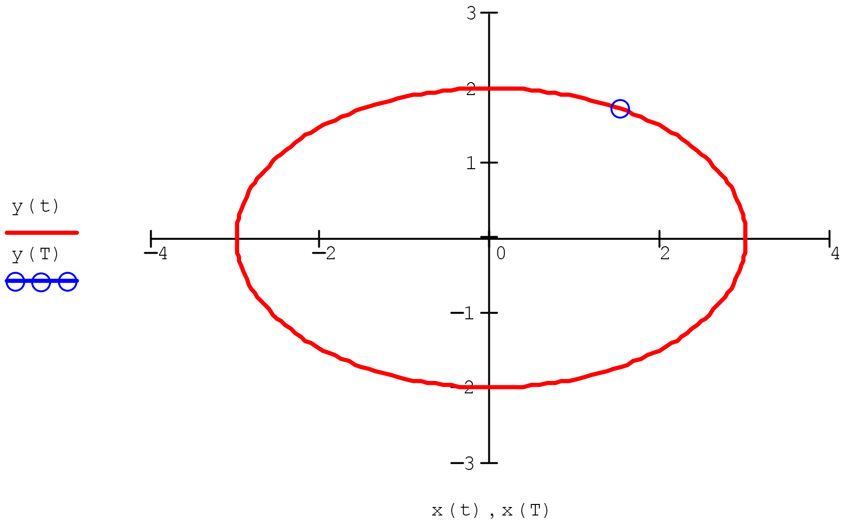


Рис. 1.10. Траектория точки и ее положение в момент времени $t = T$

Далее приведен пример решения данной задачи с применением функций-подпрограмм пользователя.

Введем исходные данные задачи и подключим файл с пользовательскими подпрограммами-функциями:

$T := \frac{1}{3}$ $\qquad \omega := \pi$ $\qquad y(t) := 2\sin(\omega t)$

Подключение файла с подпрограммами-функциями осуществляем командой **Insert | Reference** главного меню.

Reference:C:\Program Files\Mathsoft\user fun.mcd

Зададим с помощью трехэлементной матрицы-столбца вектор $\overline{r}(t)$, который определяет закон движения точки, и вычислим его компоненты в момент времени $t = T$.

$$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r(T) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.732 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{angle}\left(r(T)_0, r(T)_1\right)}{\mathrm{deg}} = 49.107$$

Для дифференцирования вектора $\bar{r}(t)$, определяющего движение точки, воспользуемся подпрограммой-функцией Diff_v, находящейся в файле user_fun.mcd, листинг которой представлен в *разд. П1.9 приложения 1.* Найдем вектор скорости точки и его направление относительно оси Ox в произвольный момент времени.

$$v(t) := \mathrm{Diff\_v}(r,t,1) \qquad v(t) \rightarrow \begin{pmatrix} -3\cdot\sin(\pi\cdot t)\cdot\pi \\ 2\cdot\cos(\pi\cdot t)\cdot\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_v(t) := \frac{\mathrm{angle}\left(v(T)_0, v(T)_1\right)}{\deg}$$

Вычисляем вектор скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в момент времени $t = T$.

$$v(T)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.162 \\ 3.142 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|v(T)| \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 31^{\frac{1}{2}}\cdot\pi = 8.746 \qquad \alpha_v(T) = 158.948$$

Найдем вектор ускорения точки и его направление относительно оси Ox в произвольный момент времени.

$$a(t) := \mathrm{Diff\_v}(r,t,2) \qquad a(t) \rightarrow \begin{pmatrix} -3\cdot\cos(\pi\cdot t)\cdot\pi^2 \\ -2\cdot\sin(\pi\cdot t)\cdot\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_a(t) := \frac{\mathrm{angle}\left(a(T)_0, a(T)_1\right)}{\deg}$$

Вычисляем вектор ускорения точки, его модуль и направление относительно оси Ox в момент времени $t = T$.

$$a(T)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\cdot\pi^2 \\ -3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.804 \\ -17.095 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|a(T)| \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 21^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^2 = 22.614 \qquad \alpha_a(T) = 229.107$$

Величины тангенциального a_τ и нормального a_n ускорений найдем как проекции вектора ускорения на направления единичных векторов касательной $\overline{\tau}$ и главной нормали $\overline{n}$, которые задаются подпрограммами-функциями Tau и Normal (*см. разд. П1.9 приложения 1*) в заданной точке траектории.

$a_\tau(t) := a(t) \cdot \mathrm{Tau}(r, t)$ $\qquad a_n(t) := a(t) \cdot \mathrm{Normal}(r, t)$

$$\beta(t) := \frac{\mathrm{angle}\left(a_n(t), a_\tau(t)\right)}{\mathrm{deg}} \qquad \rho(t) := \frac{v(t) \cdot v(t)}{a_n(t)}$$

Вычисляем значения тангенциального и нормального ускорений точки, а также радиус кривизны траектории в момент времени $t = T$.

$a_\tau(T) = 7.676$ $\qquad a_n(T) = 21.272$

$\beta(T) = 19.842$ $\qquad \rho(T) = 3.596$

Вычисляем проекцию вектора скорости точки на единичный вектор касательной к траектории V_τ.

$V_\tau(t) := v(t) \cdot \mathrm{Tau}(r, t)$ $\qquad V_\tau(T) = 8.746$

Строим графики зависимостей найденных величин от времени в интервале $0 \le t \le 2$ [c] (рис. 1.11—1.13).

Зададим переменную t в виде дискретной переменной

$t := 0, 0.01 .. 2$.

Для отображения векторов скорости и ускорения точки воспользуемся подпрограммой-функцией vector# (файл user_fun.mcd), листинг которой представлен в *разд. П1.9 приложения 1*.

Формируем вектор скорости V_v точки для произвольного момента времени:

$Vv(t) := \mathrm{vector7}\left(x(t), y(t), v(t)_0, v(t)_1, 0.25\right)$.

Формируем вектор ускорения V_a точки для произвольного момента времени:

$Va(t) := \mathrm{vector5}\left(x(t), y(t), a(t)_0, a(t)_1, 0.1\right)$.

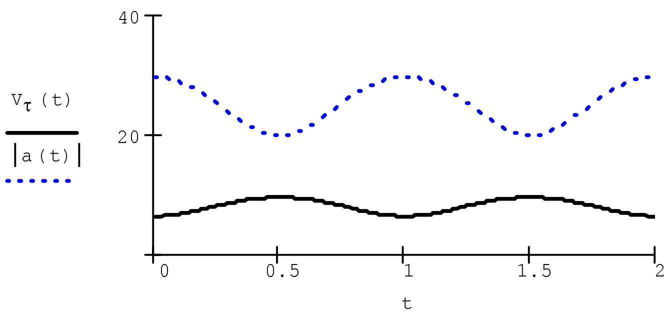


Рис. 1.11. График зависимостей проекции вектора скорости на единичный вектор касательной к траектории и модуля ускорения от времени t

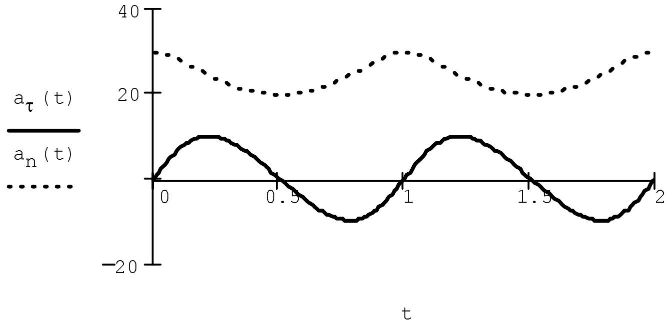


Рис. 1.12. Графики зависимостей тангенциального
и нормального ускорений от времени

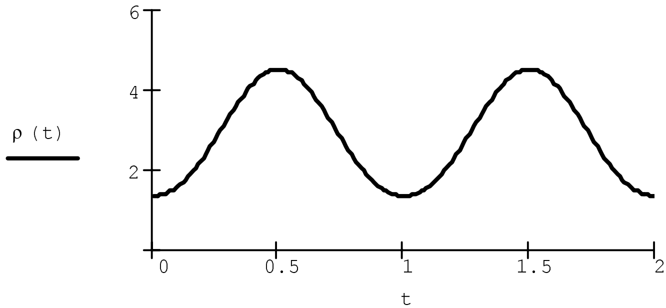


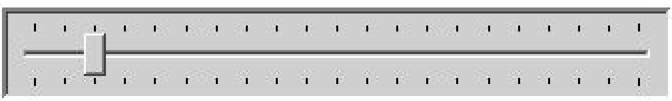
Рис. 1.13. График зависимости радиуса кривизны траектории от времени

Подпрограмма-функция L_* обеспечивает формирование требуемого символа на графике:

M(T) := L_M(x(T) + 0.1, y(T) + 0.1, 0.04) .

Для отображения на графике (рис. 1.14) векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени внутри заданного интервала воспользуемся элементом управления **Slider.** Максимальное значение переменной T, которая определяется внутри данного элемента, зададим равным 300 (*см.* разд. *П1.10.2 Приложения 1*).

T :=



$$T := \frac{T}{100} \quad *$$

T = 0.333

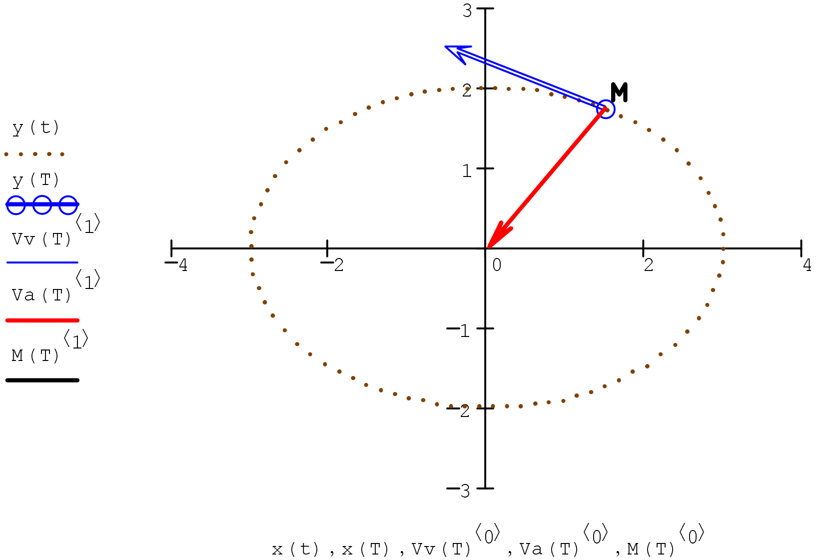


Рис. 1.14. Отображение траектории точки, векторов скорости и ускорения в момент времени $t = T$

Примечание

При построении в Mathcad графиков, в которых необходимо обеспечить одинаковый масштаб по обеим осям координат, следует в контекстном меню графика выбрать опцию **Format**, а затем на вкладке **X-Y-Axes** поставить флажок напротив строки **Equal Scales** (*см. разд. П1.6 Приложения 1*).

Формируем вектор скорости, и его проекций на оси декартовой системы координат Vx и Vy в момент времени $t = T$.

$M_V := 0.3$ Задаем масштаб векторов скоростей точки.

$Vv(t) := \mathrm{vector7}\left(x(t), y(t), v(t)_0, v(t)_1, M_V\right)$

$Vx(t) := \mathrm{vector5}\left(x(t), y(t), v(t)_0, 0, M_V\right)$

$Vy(t) := \mathrm{vector5}\left(x(t), y(t), 0, v(t)_1, M_V\right)$

Формируем вектор ускорения и его проекций на оси декартовой системы координат Vax и Vay в момент времени $t = T$.

$Ma := 0.15$ Задаем масштаб векторов ускорений точки.

$Va(t) := \mathrm{vector7}\left(x(t), y(t), a(t)_0, a(t)_1, Ma\right)$

$Vax(t) := \mathrm{vector5}\left(x(t), y(t), a(t)_0, 0, Ma\right)$

$Vay(t) := \mathrm{vector5}\left(x(t), y(t), 0, a(t)_1, Ma\right)$