Зверев Г.Н.

Теоретическая информатика и ее основания

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 004: 007: 5: 519: 681.5
ББК 22.18
З 43

Зверев Г. Н. **Теоретическая информатика и ее основания.** В 2 т. Т. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 576 с. — ISBN 978-5-9221-1061-7.

Во втором томе представлены методы решения обратных задач исследования, проектирования, управления при искажениях фактической и априорной информации, определяются границы информативности числовых данных и моделей. Предложены эффективные методы обращения линейных систем с неопределенными и случайными матрицами и векторами, нелинейных систем. Вводятся меры связей нечисловых дискретно-логических признаков.

Дано описание теории иерархических материально-информационных систем, в которой развивается системологический подход в структурно-полюсном базисе к проблемам анализа-синтеза материальных иерархий. Строится алгебра материальных и информационных полюсников. Представлены информационная теория интеллекта и методы семиотического моделирования. В заключительной главе исследуются проблемы информатизации гуманитарных наук и создания искусственного гуманитарного интеллекта.

Для студентов, аспирантов, инженеров-когнитологов, системных аналитиков, математиков, логиков, физиков, гуманитариев, интересующихся проблемами информатики и теории интеллекта.

Эскиз обложки: М. М. Ткач

ISBN 978-5-9221-1061-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второй том посвящен развитию идей информационных теорий первого тома. Представлены конкретные формы информационной семантики и общих принципов сенсформики, систематизация методов обработки числовой (количественной) и нечисловой (качественной) информации, основанных на точностном и ценностном обращении функциональных и размытых связей состояний проблемных и решающих систем. Косвенные информационные критерии совпадения или наилучшего согласия теории и эксперимента заменяются фундаментальными критериями наивысшей или приемлемой точности, наибольшей ценности решений при заданной информированности и искаженности знаний субъекта, что позволяет устранить некорректность постановок информационных задач. Проведена систематизация методов обработки дискретно-непрерывной информации, основанных на точностном и ценностном обращении функциональных и размытых преобразований и связей состояний объектов.

Какие строгие методы можно предложить в проблемных ситуациях, в которых все фактические и теоретические знания подвержены искажениям, но кое-что известно об этих искажениях? Подробно изучены простейшие модели связей между двумя свойствами, непрерывными или дискретными, при точной или приближенной априорике. Решение переносится на многомерные модели, линейные и нелинейные, точные и размытые (случайные) системы уравнений, фильтрацию сигналов и пространственно-временных полей, аппроксимацию–интерполяцию, численное интегрирование и дифференцирование. Построена адекватная модель вычислителя с плавающей арифметикой. Для дискретных нечисловых моделей вводятся меры ковариаций, корреляций, импликативности, эквивалентности, информативности нечисловых признаков, информационное расстояние, метрика и гиперкорреляции в пространстве дискретных переменных, Изучены иерархические разбиения, покрытия, накрытия, оптимальные и субоптимальные дискретные решения. Предложены формализмы корреляционной и взвешенной логики.

Дано описание формализованной информационной семантики системного подхода к анализу и синтезу материально-информационных иерархий, основанного на представлении произвольных объектов и систем полюсниками в структурном и ролевом базисах функционально-реляционных связей параметров состояний. Фундаментальные законы природы переводятся в полюсно-узовую форму зависимостей сил-потоков и координат-потенциалов, выраженных через обобщенные чувствительности, проводимости, сопротивления, напряжения, скорости компонентов материальных структур. Формализована композиция материальных систем на основе обобщенных узловых законов Кирхгофа. Строится алгебра линейных информационных и материальных полюсников, приводятся формулы многомерной структурной свертки, прямого и обратного наследования функциональных, реляционных и статусных моделей систем и процессов. Приводится классификация прямых и обратных задач системодинамики при исследовании, проектировании проблемных систем и управлении ими.

Исследуется проблема формализации мыслительных процессов и создания информационной теории интеллекта. Изложены история вопроса и известные модели механизмов мышления. Объективация понятий и моделей мыслительных процессов выполняется на основе фундаментальных законов и критериев информатики. Дано описание унифицированных моделей проблемных иерархий, основных задач проблемологии и теории критериев, их анализа и синтеза, предложены пути решения этих задач, описаны исходные категории и семантические базисы интеллектуальных процессов, классификации математических и семиотических переменных, моделей и видов знакового моделирования, развиваются строгие методы оперирования в информационных процессах размытыми понятиями.

В информационной теории интеллекта центральную роль играет семиотическое моделирование и его основные модели — семиомы и семиопроцессоры, их формализация и алгоритмическое воплощение составляет предмет семиоматики — математики смыслов. Предназначение интеллекта — познание, творчество, сохранение и передача знаний и умений следующему поколению, решению этих проблем посвящены два параграфа, в которых изучаются модели творчества и общая теория проектирования, обучающие и обучаемые системы. В последней главе исследуются вопросы объективации гуманитарных наук на основе информационной методологии, проблемы построения моделей личностей и общностей, предложена схема формализации гуманистического мировоззрения, обсуждаются вопросы создания гуманитарных метатехнологий и систем искусственного гуманитарного интеллекта.

Издание второго тома осуществлено при финансовой поддержке НТФ «Перфорационные технологии», руководству фирмы автор выражает искреннюю благодарность.

Ссылки на литературу первого тома помечаются знаком 1-, скажем, книга [17] здесь имеет ссылку [1-17].

Электронный адрес автора gnzv@mail.ru

Содержание первого тома

Глава 10
ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ СЕНСФОРМИКА

В этой главе продолжается конкретизация информационной семантики моделей и методов сенсформики. В предыдущих главах первого тома в основном был использован дедуктивный подход введения наиболее общих и абстрактных понятий с последующей их детализацией. Здесь мы применим индуктивный путь обобщения, начиная с элементарных информационных ситуаций, которые формализуются в абстрактной числовой (непрерывной) либо логической (дискретной) семантике, и последовательного усложнения постановок и решений типовых информационных задач, целью которых является достижение максимальной или достаточной информированности субъекта в проблемной ситуации с оценкой достоверности в минимальные сроки с наименьшими затратами ресурсов.

Мы начнем с углубленного исследования формализаций простейших непрерывных и дискретных ситуаций в рамках уже построенных и строго формализованных понятий, которым однозначно соответствуют сенсоры и рефоры предметики, служащие их конструктивным определением. При сочленении количественного, непрерывного, и качественного, дискретного, подходов возникают дискретно-непрерывные модели, задачи и соответствующие им преобразования из дискретного представления в непрерывное, например, переход к детальному количественному описанию, континуализация, гомогенизация — размывание, арифметизация и осреднение дискретной модели, и обратный переход от непрерывного к дискретному представлению — дискретизация непрерывной модели и ее иерархическое представление. В последующих параграфах подробно изучены модели связи между двумя свойствами, признаками, непрерывными либо дискретными, при точной и приближенной априорике. Решения обобщаются и переносятся на многомерные модели с произвольным числом параметров, фильтрацию сигналов, интерполяцию, экстраполяцию, численное интегрирование и дифференцирование. Вводятся меры ковариаций, корреляций, импликативности, эквивалентности, информативности нечисловых признаков, информационное расстояние, метрика и гиперкорреляции в пространстве дискретных переменных, описаны иерархические разбиения, покрытия, накрытия, оптимальные и субоптимальные дискретные решения. Предложен аппарат корреляционной логики.

10.1. Простейшая непрерывная числовая модель

Постановка проблемы обработки информации. Процессы получения новых знаний и умений, извлечения ценной информации из исходных данных и априорных моделей при исследовании, проектировании, управлении включают отбор информативных фактов, измерений, полезной теоретической информации о проблемных объектах и ситуациях, преобразование их в соответствующие алгоритмы. Доступная фактическая и априорная информация служит исходным пунктом при постановке стоящей перед субъектом проблемы, выборе методов ее решения, построении алгоритмов и их реализаций в сенсорах и рефорах предметики. Знания и знаковые процессы их преобразований по своей исходной природе дискретны, а непрерывное представление отдельных компонентов знаний о проблемной ситуации появляется в результате далеких абстракций и экстраполяций за границы информационных возможностей. Эти абстракции необходимы для существенного упрощения понятий и моделей предметики, представленных в числовых формах.

Целью информатики, в частности сенсформики, является построение единых семантических, формальных и программно-аппаратных средств количественного и качественного описания реальности. Для этого в первом томе были введены понятия дискретных и непрерывных шкал источников информации, меры неопределенностей элементарных и составных информационных объектов, понятие сигматора дискретно-непрерывных распределений, полиморфные операции сложения, умножения логических и числовых переменных, простейшие числовые и нечисловые модели неклассических логик с информационной семантикой, которые предполагают совместное использование наблюдаемых фактов и априорных теоретических моделей. Выбор подходящей дискретной либо непрерывной формы представления знаний в знаковом процессе до сих пор остается слабо формализованной процедурой, выполняемой специалистами на интуитивном уровне исходя из накопленного практического опыта, который очевидно подчиняется фундаментальным законам ограниченности информационных возможностей субъектов и критериям обобщенной сложности-простоты, что открывает возможности более полной формализации и объективации процедур обработки фактической и модельной информации.

Дискретизация (разбиение) и обратная ей операция **континуализации**, размывания и объединения прообъектов, применяются к числовым и нечисловым fsr-моделям с потерей либо приобретением информативности знаний, представленных в любой из 13 шкал s-объектов (см. гл. 9, т. 1) и соответствующих им функционально-реляционных fr-моделей реальности. Так разбиение или объединение классов объектов с коррекцией контовой семантики возникающих при этом понятий предметики позволяет специалистам согласовать с разрешающей способностью классификатора прообъектов целевую дискретизацию качественных параметров с необходимой различимостью результатов обработки фактов и априорики.

При дискретизации числовых непрерывных параметров информационных ситуаций возникает «вечная» проблема объективного выбора и обоснования граничных значений качественных признаков на входе или на выходе дискретно-непрерывного сенсфора. Переход от числовых к нечисловым, качественным описаниям часто сопровождается дополнительными погрешностями и неопределенностями, которые также необходимо оценить. Следует отметить асимметрию дискретных и непрерывных описаний действительности: любое непрерывно изменяющееся количественное свойство можно приближенно представить в k-значной шкале качественным признаком и, напротив, далеко не всякие качественные характеристики и классификационные признаки прообъектов можно заменить количественными параметрами.

Замкнутая формализация согласованных дискретных и непрерывных описаний информационных ситуаций решаемой проблемы позволяет ставить вопросы о предельных возможностях объективированного субъекта при достижении точности, скорости, компактности основных и адекватных информационных процессов на этапах получения фактической $\widehat{y} = A(u)$, априорной $\widehat{J} = B_a(\widehat{J}_\Pi)$, апостериорной $\widehat{x} = B(\widehat{y}, \widehat{J}_\Pi)$, $\widehat{\nabla} = B^\nabla(\widehat{y}, \widehat{J}_\Pi)$ информации о проблемном объекте и знаковом процессе, где $\widehat{J}_\Pi$ — априорика предметной области, оценить возможные искажения фактов $\Delta y(\widehat{y}, y)$, априорики $\Delta J(\widehat{J}, J)$, апостериорики $\Delta x(\widehat{x}, x)$, $\Delta\Delta(\widehat{\Delta}, \Delta)$ и т. д. Для простейших дискретно-логических задач оценка достижимых уровней точности может быть получена в рамках аппарата частотной логики (см. гл. 6, т. 1). Сложнее этот вопрос решается в непрерывной сенсформике даже при линейных (простейших) связях количественных параметров, поэтому изложение мы начнем с этой простейшей, классической ситуации, но прежде следует описать формальную семантическую схему проблемы обработки информации в задачах исследования, проектирования и управления.

В наиболее общей форме эта проблема решается следующими этапами: 1) получить оценку $\widehat{x}$ целевого свойства x информационной ситуации; 2) оценить точность, погрешность $\widehat{\Delta}$ знания $\widehat{x}$; 3) построить по знанию $\widehat{x}$ и априорике $\widehat{J}$ полную fsr-модель проблемного объекта и ее индефиницию $ind\ (fsr)$; 4) построить упрощенные аппроксимации fsr-модели, более соответствующие эффективному использованию новых знаний, и оценить погрешности, неопределенности, границы применимости построенных аппроксимаций. Для реализации этих этапов необходимо выбрать (синтезировать) единый критерий успешности решения проблемы (см. далее гл. 12), который согласует между собой все стадии процесса решения проблемы.

На первом этапе, чтобы получить оценку $\widehat{x}$, необходимо выбрать или создать новый метод обработки информации, соответствующий выбранному критерию, построить алгоритм (в простых задачах — аналитическое решение) и соответствующий ему рефор $\widehat{x} = B(\widehat{y}, \widehat{J})$. Предваряет решение этой задачи отбор информативных источников фактических данных — сенсоров $\widehat{y}_i = A_i(u)$, $1 \le i \le m$, $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_m)$ и реформ априорики $\widehat{J} = B_a(\widehat{J}_\Pi)$.

На втором этапе, чтобы получить оценку $\widehat{\nabla}$ адекватности знания $\widehat{x}$ истине x, необходимо построить адеквативный процесс, контролирующий основной процесс первого этапа, и соответствующий рефор адекватности $B^\nabla(\widehat{y}, \widehat{J}_\Pi) = \widehat{\nabla}$. Создание и реализация адеквативного процесса является существенно более сложной задачей, чем решение первого этапа, поэтому во многих случаях ограничиваются ссылками на априорные свойства известных средств наблюдений и методов их обработки.

На третьем этапе выполняется совместная обработка апостериорных $\widehat{x}$, $\widehat{\nabla}$ и априорных $\widehat{J}$ знаний, основных и адеквативных, в результате получают согласованные функциональные, реляционные, статусные модели проблемной ситуации, составляющие ее полную *fsr*-модель, а также, возможно, новые понятия предметики, синтезируемые и включаемые в терминосистему предметной области при проведении семиотического анализа новых и ранее полученных знаний. Анализ результатов экспериментально-теоретических исследований, компьютерного (математического, информационного) моделирования проблемных ситуаций непременно должен заканчиваться идеализацией знаний — построением **аналитической** (идеальной) модели в виде формул, алгоритмов, дискретного описания, принимаемых за истину в границах их адекватности.

На четвертом, завершающем этапе решения задачи обработки информации полная *fsr*-модель проблемного объекта обычно трансформируется в набор частных, точных или приближенных, описаний, аппроксимаций с потерями либо без потерь адекватности и компактности представлений, приспособленных для дальнейшего использования в иных информационных ситуациях и для теоретических обобщений. При построении аппроксимаций используются аналитические и численные методы математики, математической статистики (регрессионный, дискриминантный анализ, МНК и т. д.), распознавания образов, нейросетевые и генетические алгоритмы. Знания, полученные на трех предшествующих этапах, приобретают разнообразные формы, ориентированные на последующие обобщения и конкретизации. Построенные аппроксимации являются важным инструментом повышения эффективности информационной деятельности при условии контроля точности приближенных моделей и применимости, выполняемого объективированными средствами наблюдений, обработки информации и оценок последствий принимаемых решений.

Классическое обращение числовой модели. В информационных процессах исследования, проектирования, управления обычно преобладают количественные подходы, описывающие ситуации предметики числовыми моделями — уравнениями, неравенствами, экстремальными условиями, интегро-дифференциальными соотношениями и т. п. Мы начнем анализ подобных информационных задач с простейшей «школьной» ситуации решения одного линейного алгебраического уравнения с одним неизвестным. Правила «информационной игры» в знания-незнания, получаемые при введении различных неопределенностей в этой простой задаче, очевидным образом переносятся на более сложные ситуации.

Итак, пусть в результате формализации решаемой проблемы построена адекватная количественная модель связи между известным значением переменной y и неизвестной целевой переменной x в виде уравнения $y = Ax + a$, в котором чувствительность A модели связи $x \to y$ и сдвиг a нуля шкалы величины y также точно известны. Константы A, a и переменные x, y есть вещественные числовые характеристики ситуации: при исследовании y — наблюдаемое, x — ненаблюдаемое искомое свойство; при проектировании величина y есть целевая, желаемая характеристика ситуации, x — искомый параметр проектируемой системы или процесса; при управлении переменная y — есть заданное целевое состояние управляемого объекта, x — искомое управление, значение управляющего воздействия, которое обеспечивает достижение цели.

Формализация конкретной ситуации и задачи в ней предполагает вычленение ее из непрерывного во времени материально-информационного процесса, описание отдельных его этапов, учет предшествующих решений, которые формируют исходную информацию J_0 данной задачи, а также учет последующих шагов процесса, определяющих целевые объекты и критерии выделенной ситуации. Исходная информация ситуации J_0 содержит **числовые** данные $\{y, A, a\}$, **модельную** информацию: $\Phi = \{y = Ax+a\}$ о виде реляционного объекта — уравнения связи между параметрами, а также **семантическую** информацию SI, которая включает смысловое описание ситуации и всей проблемы, определения известных либо новых понятий x, y, A, a, Φ, адресацию прообъектов ситуации и ее базисных понятий, их имен, контов и дентов и т. д.

Модельная Φ и семантическая информация SI составляют нечисловые данные задачи, однако в науке более распространено деление исходных данных J_0 на **фактическую**, экспериментальную информацию y — текущие значения наблюдений, фактов, целей проекта, управления, и **априорную** (доопытную) информацию $J = \{A, a, \Phi, SI\}$, а результат решения $\widehat{x}$ — оценка искомого значения x и оценка ее достоверности $\widehat{\nabla}$ называется **апостериорной**, **послеопытной** информацией $(\widehat{x}, \widehat{\nabla})$, тогда процесс решения информационной задачи есть переход от исходных данных $J_0 = (y, J)$ к результату решения — новому знанию $(\widehat{x}, \widehat{\nabla})$.

В соответствии с общими принципами сенсформики всякий информационный объект или процесс, возможно, содержит неопределенности и подвержен искажениям, поэтому при более полной и аккуратной формализации исходную фактическую и априорную информацию следует отличать от истинных, идеально точных знаний: $J_0 \neq \widehat{J}_0$, $y \neq \widehat{y}$, $J \neq \widehat{J} = (\widehat{A}, \widehat{a}, \widehat{\Phi}, \widehat{S}I)$. Однако в «школьной» постановке задачи принципами ограниченной адекватности, расщепления семантики и другими постулатами сенсформики пренебрегают, предварительно упрощая задачу, и (молчаливо) предполагают, что исходные числовые данные известны точно и определенно: $\widehat{y} = y$, $\widehat{A} = A$, $\widehat{a} = a$, линейная модель $\widehat{\Phi} = \{\widehat{y} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{a}\}$ адекватно описывает реальные связи между переменными x и y, т. е. $\widehat{\Phi} = \Phi$, семантические помехи и ошибки отсутствуют, $\widehat{SI} = SI$. При такой идеализации реальных информационных ситуаций оценка $\widehat{x}$ искомого x легко находится путем стандартных алгебраических преобразований уравнения $y = A\widehat{x} + a$, выражающих строгое обращение операций сложения и умножения заменой их, соответственно, на вычитание $A\widehat{x} = y - a$ и деление $\widehat{x} = (y - a)/A = A^{-1}(y - a)$. Слева стоит результат обработки, справа — известные данные о ситуации и, если арифметические операции вычитания и деления выполняются точно, ошибка решения $\Delta = \widehat{x} - x$ равна нулю. В самом деле, подставив справа вместо y его истинное выражение $Ax + a$, получим $\widehat{x} = x$, $\Delta = \nabla^{-1} = 0$, т. е. мера адекватности $\nabla = \infty$.

Приближение к реальным информационным ситуациям. Усложнение постановки данной тривиальной задачи, связанное с попытками учесть в полной мере все возможные неопределенности или ошибки исходных данных и процесса решения, которые возникают в практической информационной деятельности, ведет к принципиальным трудностям концептуального и математического характера. Они связаны с обоснованием и выбором критерия информационной задачи, оперированием моделями неопределенностей, различными для искаженных и вариативных исходных данных и моделей, идентификаций и индефиниций, что находит отражение в различии адекватинвых и вариативных мер информативности (см. гл. 8, т. 1).

Обобщенную постановку задачи строят разными способами. Ниже изложены варианты постановок и решений, которые основаны на методе иерархии неопределенностей — МИН, т. е. на последовательном учете неопределенностей всех компонентов исходных данных информационной задачи и, что не менее важно, они легко переносятся на многомерный случай — основной в практической информатике. Прежде всего необходимо учесть ошибки и неопределенности исследования, проектирования, управления при получении числовой информации, фактической y и априорной A, a, для этого введем в модель связей параметры искажений исходных данных: $\widehat{y} = y + v = Ax + a + v$, $\widehat{A} = A + \Delta A$, $\widehat{a} = a + \Delta a$, где v, ΔA, Δa — величины, описывающие размытие связей и ошибки предваряющего информационного процесса формализации и получения численных значений, в частности, параметр v позволяет учесть ошибки измерений и отклонение от линейной зависимости x и y при $\widehat{\Phi} \neq \Phi$. Семантическую информацию здесь будем считать достоверной: $\widehat{SI} = SI$.

Величины x, $\widehat{y}$, v, $\widehat{A}$, ΔA, $\widehat{a}$, Δa являются переменными, A, a — неизвестными константами, но в последующем константы могут стать переменными. Каждой переменной и каждой неизвестной константе z из перечисленного набора сопоставляется модель вариативности или неопределенности в виде индефиниций — генора Γ_z, траекторной модели T_z, сомножества значений z и соответствующего ему распределения $q(z)$, либо множества Q_z. При построении этих моделей учитываются зависимости между всеми переменными и константами. Далее будет показано, как это выполняется, а пока считаем, что модели неопределенности, скажем, распределение q, построены точно и включены в априорную информацию $\widehat{J} = (\widehat{A}, \widehat{a}, \widehat{\Phi}, SI, q)$, в последующем мы учтем влияние неопределенности: $\widehat{q} \neq q$. При формализации семантической априорной информации необходимо учесть ориентацию причинно-следственных связей: $(x, A, a) \to y$, $(y, v) \to \widehat{y}$, $(A, \Delta A) \to \widehat{A}$, $(a, \Delta a) \to \widehat{a}$, слева стоят причины, справа — следствия. Заметим, что многие информационные задачи состоят в обращении причинно-следственных связей, точном или приближенном восстановлении причин по известным следствиям.

Информационные критерии задачи исследования. Чтобы завершить обобщенную постановку данной информационной задачи необходимо формализовать семантику критерия обращения, основного условия ее решения. Здесь мы используем семантику исследования (критерии проектирования и управления имеют весьма сходный смысл). Итак, пусть в ситуации заданы исследуемый объект с неизвестным свойством x и сенсор $\widehat{y} = A_S(x, v)$, чувствительный к свойству x и помехе измерения v, воздействующие на вход сенсора. Сенсорная функция A_S может быть линейной, как мы предполагали раньше, или нелинейной по x и v. В любом случае необходимо по наблюдению $\widehat{y}$ и априорной информации о сенсоре, изучаемом объекте, искажающих влияниях построить рефор $\widehat{x} = B(y)$ и предсказать свойство x объекта с оптимальной точностью, оперативностью, компактностью с тем, чтобы повысить характеристики обобщенной ценности и уменьшить ожидаемые в последующем потери от неточности результата. Характеристики обобщенной сложности и ценности включаются в априорную информацию $\widehat{J}$ поставленной задачи.

При классическом (эквиальном) обращении предельно упрощают модель ситуации, что обычно ведет к потере точности, но возрастает оперативность и компактность информационного процесса, а обобщенная ценность может при этом упрощении увеличиваться либо уменьшаться по сравнению с максимальным по точности рефором $B_0(\widehat{y})$. Классическое обращение основано на предположении, что сенсорная функция идеальна: функция сенсора A_S известна точно, отсутствуют искажения $v = 0$, она обратима по x, т. е. существует обратная функция $B_{\text{К}0}(\widehat{y})$ — рефор классического обращения, равный $A_S^{-1}(\widehat{y}, 0) = A_C^{-1}(\widehat{y})$. Идеальная сенсорная функция $A_C(x) = A_S(x, 0)$ определяет идеальное наблюдение $y_C = A_C(x)$ — такой выходной объект сенсора, который был бы получен при отсутствии помех, $v = 0$, но поскольку значение x неизвестно, то его заменяют на оценку $\widehat{x}$ и получают теоретическое y_T или расчетное значение показаний идеального сенсора $y_T = A_C(\widehat{x}) = A_S(\widehat{x}, 0)$.

Обратная идеальная сенсорная функция — классический рефор $B_{\text{К}0}$ на входе имеет не идеальное значение y_C, а реальный результат $\widehat{y}$ наблюдения на выходе сенсора, что приводит к отклонению выхода рефора — оценки $\widehat{x}$ от истины x. Чтобы прояснить смысл критерия классического обращения, умножим обе части соотношения $\widehat{x} = B_{\text{К}0}(\widehat{y})$ на прямой оператор идеального наблюдения A_C. Тогда, учитывая его обратимость $A_C B_{\text{К}0} = E$ — единичный оператор, тождественное преобразование, получим уравнение классической обратной задачи обработки наблюдений $A_C(\widehat{x}) = \widehat{y}$. Следовательно, классическому обращению соответствует информационный **критерий равенства теории и эксперимента**, $y_T = \widehat{y}$, хотя слева и справа от знака равенства стоят по разному искаженные значения: $\widehat{y} = y + v$, $y_T = y + v_T$, где v_T — ошибка теории.

Критерий (требования, условия) равенства теоретически вычисленного наблюдения $\widehat{y}_T = A_C(\widehat{x})$ по искомой оценке $\widehat{x}$ и фактического наблюдения $\widehat{y}$ носит название «**эквиальный** (equal — равный) информационный критерий» и формулируется так: найти по заданным величине $\widehat{y}$ и функции A_C оценку искомого свойства $\widehat{x}$, которая удовлетворяет равенству $A_C(\widehat{x}) = \widehat{y}$. Классический критерий обращения в общем случае приводит при синтезе рефора $B_{\text{К}0}$ к алгоритмам решения уравнений и систем уравнений — алгебраических, диофантовых, интегро-дифференциальных, логических, функциональных, символьных и т. д. Однако точное совпадение теории и эксперимента в практической информатике часто является фикцией и признаком подгонки, излишней идеализации и т. п. Искусственное, принудительное уравнивание заведомо неравных, различных объектов ведет к так называемым некорректным обратным задачам [36, 72, 1-117].

Очевидным обобщением эквиального критерия $y_T = \widehat{y}$ является условие наилучшего согласия теории и эксперимента, или критерий **минимальной невязки** $\min\limits_{\widehat{x}} \|y_T - \widehat{y}\|$ **в пространстве наблюдений**, который относится к классу экстремальных критериев минимизации или максимизации характеристик. При такой формализации основного требования задачи условие равенства в эквиальном критерии заменяется условием оптимальности, наилучшего согласования теории и эксперимента в форме минимума **экстремального критерия**. На первый взгляд кажется, что это обобщение устраняет основные недостатки эквиального критерия, однако уменьшение невязки $\Delta_{н} = \widehat{y} - y_T$ ниже уровня искажений, помех наблюдения $v = \widehat{y} - y_C$ и помех формализации и вычисления y_T ведет к таким же некорректностям, как и в случае эквивалентного критерия. Если оператор A_C обратим и на оценку искомого $\widehat{x}$ не накладывается априорных ограничений, то критерий минимальной невязки приводит к точно тем же результатам, что и эквиальный критерий, так как минимум невязки в этом случае равен нулю и $y_T = \widehat{y}$, следовательно, оба критерия порождают одни и те же рефоры, оценки и уровни точности искомых, т. е. эквиальный и экстремальный критерии в этих случаях эквивалентны.

Обобщенное обращение в соответствии с критерием минимальной невязки теории и эксперимента возникает только для переопределенных систем наблюдений $A_C(\widehat{x}) = \widehat{y}$, когда число уравнений больше числа искомых, но этот критерий неприменим к недоопределенным системам с вырожденным или почти вырожденным оператором A_C, при весьма малой чувствительности сенсора к вариациям искомых, значительных искажениях наблюдений и априорной теоретической информации. Критерий и метод минимальной невязки в частных случаях сводится к методу наименьших квадратов, методу наименьших модулей, методу гарантированных оценок минимакса, методу максимального правдоподобия, методу максимальной энтропии [3, 45, 49, 65, 1-75].

Критерии, которые используют эти методы, и требования равенства результатов расчета и наблюдений или их минимального расхождения, максимальной условной вероятности наблюдения при заданной оценке искомого $\widehat{x}$ и подобные им являются **косвенными**, или **смежными** критериями. Они накладывают частные ограничения на информационные процессы и их результаты, не контролируя в полной мере фундаментальных свойств и достижений конечных целей информационной деятельности — оптимальной точности, оперативности, компактности, ценности знакового процесса. В других главах неоднократно разбирались эти свойства в различных аспектах и подходах. Здесь они служат основой **обобщенного** и, прежде всего, **точностного обращения** информационных преобразований. Итак, в качестве базисных информационных критериев обобщенного обращения используются критерии минимальной или **оптимальной сложности** либо **максимальной простоты** — адеквативной, временнóй, объемной, а так же критерии **максимальной ценности**.

Эти критерии и соответствующие им методы оптимальной, наилучшей точности МНТ и наибольшей ценности МНЦ являются естественным обобщением метода Байеса, развитого в середине двадцатого века в математической статистике в форме минимума ожидаемых байесовских рисков (погрешностей) [1-36]. Обобщение в сенсформике состоит в объединении аналитического и статистического подходов, в учете искажений и неопределенностей априорных данных. Отсутствие в теории байесовского метода этих компонентов приводило к бесконечным дискуссиям о применимости байесовских решений, о субъективных вероятностях и т. д.

Квадратический критерий байесовского обращения. Перечисленные выше косвенные критерии в отличие от байесовского не используют априорную информацию об искомых, которая практически всегда есть и активно используется при исходной формализации и последующем анализе результатов, но ее включение в исходные данные и в алгоритм решаемой задачи у многих исследователей вызывает возражения, обусловленные главным образом неточностью априорики и неясностью последствий такого шага. Развиваемые далее методы информационного моделирования в формализме схемы косвенного обращения СКО позволяют снять подобные возражения в ситуациях с искаженными и размытыми априорными данными.

Итак, возвращаясь к задаче решения размытого и возмущенного уравнения линейного сенсора $\widehat{y} = A_S(x, v) = Ax + a + v$ с искаженными априорными данными о чувствительности $\widehat{A} = A + \Delta A$ и сдвиге $\widehat{a} = a + \Delta a$ и точным априорным распределением $q(u)$ причин $u = (x, A, a, v, \Delta A, \Delta a)$, в качестве критерия данной задачи возьмем простейший и наиболее популярный в научно-технических исследованиях квадратический критерий максимальной точности решения или минимума математического ожидания квадрата ошибки решения $\min\limits_{\widehat{x}} M(\widehat{x} - x)^2$, где M — оператор осреднения, математического ожидания по неизвестным вариативным переменным. Распределение $q(y, \widehat{y}, \widehat{A}, \widehat{a})$ зависимых от u переменных определяется по моделям связей и распределению причин $q(u)$, а оценка $\widehat{x}$ вычисляется по априорным данным $\widehat{J}_0$: $\widehat{x} = B(\widehat{J}_0) = B(\widehat{y}, \widehat{J})$ в такой последовательности: $\widehat{J} \to B \to \widehat{x}$, т. е. вначале по заданной априорной информации строится алгоритм $B(\widehat{y})$ с переменными входным объектом $\widehat{y}$, а затем вычисляется оценка $\widehat{x}$. Такой порядок выполнения операций обусловлен тем, что априорная информация изменяется гораздо реже, чем фактическая, поэтому для уменьшения временной сложности процесса обработки наблюдений и повышения оперативности и компактности решений алгоритм рефора строят для всех возможных фактических данных $\widehat{y} \in Q_y$ при заданной информации J. По той же схеме строится и рефор адекватности B^{∇} и мера точности — общая (глобальная) средняя ошибка Δ_S либо локализованная (условная) средняя: $\Delta_S(\widehat{y})$ или $\Delta_S(\widehat{x})$.

Математическое ожидание квадрата ошибки $\Delta = \widehat{x} - x$ есть условное среднее $\Delta_S^2(\widehat{x}, \widehat{J}_0) = M(\Delta^2) = \int (\widehat{x} - x^2 q(u \,|\, \widehat{J}_0)\, du$, дифференцируя которое по $\widehat{x}$ и приравнивая производную нулю, получаем оптимальный по точности рефор — байесовскую решающую функцию $\widehat{x} = B_0(\widehat{y}, \widehat{J}) = \int xq(u \,|\, \widehat{J}_0)\, du$. К сожалению, этот хорошо известный теоретический результат не оказал какого-либо заметного влияния на разработку практических алгоритмов решения неопределенных (размытых и искаженных) уравнений и систем уравнений со случайными матрицами и правыми частями, так как здесь возникают «неберущиеся» аналитически одномерные и многомерные интегралы почти для всякой функции $q(u)$ с варьируемыми переменными x и $\widehat{A}$ (читатель может убедиться в этом самостоятельно), а численные реализации данного оптимального рефора неэффективны. Все дело в том, что учет априорной информации о варьируемых переменных в силу природных или информационных причин превращает оптимальное решение линейного уравнения в нелинейную функцию $B_0(\widehat{y})$, «в вечную проблему нелинейностей», стоящую перед математикой и информатикой. Временна́я сложность проблемы нелинейностей усугубляется для интегральных выражений байесовского решения $\widehat{x}$ и его ошибки Δ тем, что численное интегрирование необходимо выполнять для каждого наблюдения $\widehat{y}$ — аргумента рефора $B(\widehat{y}, \widehat{J})$, а в практических подходах алгоритм обычно строится для всех значений $\widehat{y}$ и меняется только при изменении априорной информации $\widehat{J}$.

Случай точной априорики. Для задачи оптимального по точности обращения линейного одномерного сенсора существует несколько иная постановка и формализация, во многих практических задачах не менее адекватная реальным ситуациям, чем изложенная выше. Аналитические решения в измененной постановке получаются сравнительно легко для любых распределений $q(u)$ и обобщаются на многомерные задачи, чем снимаются проблемы численного интегрирования и минимизации критериальных функций многих переменных или, во всяком случае, на многие порядки уменьшается их вычислительная — временная и объемная — сложности. Пусть опять уравнение $\widehat{y} = Ax + a + v$ описывает основной процесс наблюдения, результатом которого служит значение переменной $\widehat{y}$, а величины A, a, x, v являются неизвестными. При формализации неизвестные искажения ΔA, Δa, оцениваемые в адекватном процессе наблюдения за чувствительностью A и сдвигом нуля шкалы a сенсора $A(x, v)$, заменим априорной неопределенностью значений A, a в виде распределения $q(A, a)$, т. е. эти параметры сенсора будем считать переменными, а не константами, вариативность которых определяется стандартными моделями Γ, T, q, Q.

Прежняя формализация с определением оценок $\widehat{A} = A + \Delta A$, $\widehat{a} = a + \Delta a$ сводится (обычно приближенно) к новой постановке, используя байесовский подход, следующим образом: зная априорное распределение $q(A, a, \Delta A, \Delta a)$, строят апостериорное распределение $q(\tilde{A}, \tilde{a})$ уточненных оценок $\tilde{A}$, $\tilde{a}$ по наблюдениям $\widehat{A}$, $\widehat{a}$ и априорному распределению. Вопрос о выборе той или иной формализации и постановки информационной задачи является чрезвычайно тонким, и конкретный исследователь, специалист предметики часто не в состоянии обосновать выбор между различными формализациями и приписать неопределенности состояния сенсора смысл природной вариации либо искажение своих знаний, а чаще всего мера $q(A, a)$ либо $q(\tilde{A}, \tilde{a})$ порождается обеими причинами одновременно [24, 1-42]. В вероятностной трактовке данная задача ставится так: неизвестное x, помеха измерения v, чувствительность A и ноль шкалы сенсора a или сдвиг случайно варьируются в соответствии с вероятностной мерой $q(u) = q(A, a, x, v)$, а выход сенсора $\widehat{y}$ есть функция от вектора случайных аргументов $u = (A, a, x, v)$ — вектора причин. Необходимо по заданным исходным данным $J_0 = (\widehat{y}, q)$ найти наилучшую, максимальную по точности оценку искомого x.

Еще одно изменение первоначальной постановки задачи состоит в учете вычислительной сложности данной задачи и замене минимума по оценке $\widehat{x}$, $\min\limits_{\widehat{x}} M(\Delta^2)$ на минимум по рефору B, $\min\limits_{B} M(\Delta^2)$, т. е. минимум по оператору обработки из заданного класса $\{B\}$ реforов с входным объектом $\widehat{y}$ фиксированной, «замороженной» априорной информацией $J = q(u)$, т. е. байесовская решающая функция $B(\widehat{y}, J)$ заменяется преобразованием $\widehat{x} = B(\widehat{y})$, которое имеет явную форму выражения и по возможности изменяемую временную сложность. Для этого достаточно представить класс реforов каким-либо параметрическим классом функций, скажем, в форме линейного разложения реforного преобразования в некотором функциональном базисе $\{\varphi_k(\widehat{y})\}$ в виде $B(\widehat{y}) = \sum\limits_K b_k \varphi_k(\widehat{y})$ и найти минимум по коэффициентам b_k при постоянной априорике $J = \text{const}$. Для упрощения последующих формул временно опустим шляпку над y, так как разделять идеальное y и реальное $\widehat{y}$ значения измерения далее не потребуется, поэтому процесс измерения обозначим так: $y = Ax + a + v$, полагая, что всякий результат измерения искажен и указание на это при выводе последующих формул становится излишним. Прежде всего, найдем оптимальное линейное решение в степенном базисе $\{\varphi_k\} = \{y^k\}$ при степенях $k = 0$ и 1, которое легко переносится на многомерные линейные сенсоры и реforы с произвольной размерностью векторов x, $\widehat{x}$ и y.

В одномерных задачах линейное решение получается просто, в частном случае точного знания чувствительности сенсора A сдвига a оно представлено в гл. 9, т. 1 при иллюстрации метода иерархии неопределенностей — МИН. Пусть оценка искомого $\widehat{x} = By + b$, B — чувствительность линейного реforа, b — сдвиг его выходной шкалы. Средний квадрат ошибки $M(\Delta^2) = \int (By + b - x)^2 q(u)\, du$ представим в виде суммы квадратов регулярной, систематической $\Delta_0 = M(\Delta)$ и нерегулярной, случайной $\Delta_1 = \Delta - \Delta_0$ составляющих. Для этого все переменные, от которых зависит ошибка, также представим в виде суммы систематической, неизменной и вариативной (случайной) составляющих: вектор причин $u = u_0 + u_1$, наблюдение $y = y_0 + y_1$, искомый параметр $x = x_0 + x_1$, оценка искомого $\widehat{x} = \widehat{x}_0 + \widehat{x}_1$, где $u_0 = M(u) = \int uq(u)\, du = (A_0, a_0, x_0, v_0)^\top$ — центр рассеяния (среднее, матожидание) причин, $u_1 = u - u_0 = (A_1, a_1, x_1, v_1)^\top$ — вариативная, нерегулярная составляющая искомого x, чувствительности A, сдвига a, ошибки измерения v. Среднее значение наблюдения $y_0 = \int yq(u)du = \int (Ax+a+v)q(u)\,du = A_0x_0 + a_0 + v_0 + K_{Ax}$, где ковариация K_{Ax} есть один из элементов матрицы ковариаций причин $K_u = \int u_1u_1^\top q(u)\,du$, которая выражает квадратические размеры области вариаций причин и меры частотных, корреляционных связей между причинами. Случайная составляющая наблюдений $y_1 = y - y_0 = A_0x_1 + A_1x_0 + A_1x_1 + a_1 + v_1 - K_{Ax}$.

Следует заметить, что в данном контексте понятия систематической и случайной составляющих вариации некоторой переменной величины имеют семантику, отличную от смысла, вкладываемого в понятия детерминированной и случайной изменчивости в традиционной и алгоритмической теории вероятностей и неопределенностей. Здесь под случайной компонентой понимается принятое в метрологии, измерительной технике и т. д. отклонение $u_1 = u - u_0$ переменной u от типового, среднего значения u_0 и никак не связанное с иррегулярностью, максимальной сложностью по Колмогорову и т. п. (см. гл. 8, т. 1).

Систематическая составляющая ошибки решения $\Delta_0 = \int \Delta{\cdot}q(u)du = By_0+b-x_0$ зависит от B и b, случайная составляющая $\Delta_1 = \Delta-\Delta_0 = By + b - x - \Delta_0 = By_1 - x_1$ зависит только от чувствительности рефора B и не зависит от постоянного сдвига b. Полная среднеквадратическая ошибка $\Delta_S^2 = M(\Delta^2) = \int \Delta^2q(u)\,du = \int(\Delta_0^2+2\Delta_0\Delta_1+\Delta_1^2)q(u)\,du = \Delta_0^2 + K_\Delta$, т. е. она равна сумме квадратов систематической и случайной составляющих, где $K_\Delta = \int(By_1 - x_1)^2q(u)\,du = B^2K_y - 2BK_{xy} + K_x$ — ковариация (дисперсия) ошибки решения, ковариация наблюдения,

$$\begin{aligned}K_y = \int y_1^2q(u)\,du = A_0^2K_x + K_a + K_v + K_Ax_0^2 + K_{A^2x^2} - K_{ax}^2 + {}\\ + 2x_0(A_0K_{Ax} + K_{A^2x} + K_{Aa} + K_{Av}) + 2A_0(K_{Ax^2} + K_{ax} + K_{xv}) + {}\\ + 2(K_{Axa} + K_{Axv} + K_{av}),\end{aligned}$$

где $K_{A^2x^2} = M(A_1^2x_1^2)$ — центрированный момент четвертого порядка, при независимости A и x равный K_AK_x, ковариации $K_{A^2x} = M(A_1^2x_1)$, $K_{Ax^2} = M(A_1x_1^2)$, $K_{Axa} = M(A_1x_1a_1)$ — центрированные моменты третьего порядка, равные нулю, если вариации независимы, поэтому при отсутствии корреляционных связей это выражение упрощается: $K_y = A_0^2K_x + K_v + K_A(x_0^2 + K_x) + K_a$. Взаимная ковариация $K_{xy} = \int x_1y_1q(u)\,du = A_0K_x + K_{Ax}x_0 + K_{ax} + K_{xv} + K_{Ax^2}$, а если частотные связи отсутствуют, то $K_{xy} = A_0K_x$.

Минимум полной ошибки Δ_S^2 можно представить в виде $\min\limits_{B,b}\Delta_S^2 = \min\limits_{B,b}\Delta_0^2 + \min\limits_{B}K_\Delta$ и найти его раздельно по чувствительности B и сдвигу b, так как систематическую ошибку можно подавить полностью выбором сдвига при любой чувствительности B: $\Delta_0 = By_0 + b - x_0 = 0$, отсюда оптимальный сдвиг $b_0 = x_0 - By_0 = x_0 - B(A_0x_0 + a_0 + v_0 + K_{Ax})$, следовательно, оптимальный сдвиг зависит от центра рассеяния u_0 и только от одной ковариации K_{Ax} — частотной связи между чувствительностью сенсора A и искомым свойством x. Обычно эта связь слабая и ею пренебрегают. В данной постановке задачи систематическая ошибка считается полностью устранимой, а случайная — принципиально неустранимой. Минимум среднего квадрата случайной составляющей ошибки легко найти дифференцированием параболы $K_\Delta(B)$ и приравниванием производной нулю: $dK_\Delta/dB = 2BK_y - 2K_{xy} = 0$, отсюда оптимальная чувствительность $B_0 = K_{xy}/K_y = K_{xy}K_y^{-1}$, а минимальный уровень полной ошибки равен минимуму случайной составляющей $K_\Delta^0 = B_0^2K_y + 2B_0K_{xy} + K_x = K_x - B_0K_{xy} = K_x - K_{xy}^2K_y^{-1} = \min \Delta_S^2$. Подставим оптимальные выражения сдвига и чувствительности в формулу оценки искомого, восстановив значок искажения результата наблюдения, и получим: $\widehat{x} = B_0\widehat{y} + b_0 = x_0 + B_0(\widehat{y} - y_0)$, и если нули шкал искомого x и наблюдения y сдвинуть в *центры рассеяния* x_0 и y_0, то в новых системах отсчета получим *центрированную* форму оптимального решения: $\widehat{x} = B_0\widehat{y}$, $B_0 = K_{xy}K_y^{-1}$, $\Delta_0 = 0$, $K_\Delta^0 = K_x - B_0K_{xy}$, а нецентрированное решение отличается первой формулой: $\widehat{x} - x_0 = B_0(\widehat{y} - y_0)$.

Свойства оптимального рефора. Изучим свойства оптимального по точности обращения линейного сенсора в линейном приближении при точном знании априорной информации о влияющих причинах: $\widehat{q}(u) = q(u)$. Ограничимся простейшими ситуациями, в которых отсутствуют корреляционные связи между причинами и матрица ковариаций K_u станет диагональной. Ненулевые элементы в ее диагонали равны дисперсиям K_x, K_A, K_a, K_v — квадратическим мерам вариативности всех влияющих на сенсор природных факторов. Влиянием информационных факторов на этапах построения частотной модели $q(u)$ и вычисления u_0, K_u, y_0, $\widehat{x}$ мы пока пренебрегаем и считаем, что все модели и величины определяются информационным процессом точно.

Чтобы прояснить смысл взаимосвязей величин и повысить наглядность формул полученного оптимального решения введем группирование влияющих факторов, основанное на одной из интерпретаций общего формализма. Эта интерпретация относится к предельно точным реальным измерениям и вычислениям, для которых пока нет возможности реализовать более точную (прецизионную, эталонную) систему — аккуратор. В таких случаях за истинный сенсор принимается среднее состояние предельно точной системы, оно характеризуется параметрами A_0, a_0, v_0, и критерий точности заменяется в этом случае воспроизводимостью, которая оценивается нерегулярными случайными отклонениями наблюдений $\widehat{y}$ одних и тех же контролируемых условиях, обусловленных отклонениями от средних чувствительности A_1, нуля шкалы сенсора или сдвига a_1 и помехи измерения v_1.

Необходимость замены точности воспроизводимостью измерений является следствием обобщенного принципа относительности Пуанкаре и принципа вынуждения (см. гл. 9, т. 1). Учитывая эту замену, определим случайное отклонение измерения $A_1 x + a_1 + v_1$ неизменного свойства x как полную ошибку измерения $v_{\text{п}} = v_{\text{м}} + v_{\text{ad}}$, где $v_{\text{м}} = A_1 x$ — **мультипликативная** помеха измерения, пропорциональная искомой величине x, определяющая точность — воспроизводимость измерения и число верных знаков больших вариаций величин $\widehat{y}$, ошибка $v_{\text{ad}} = a_1 + v_1$ — **аддитивная** помеха, определяющая границу измерения малых вариаций измеряемых величин $\widehat{y}$. Кроме деления полной ошибки на аддитивный и мультипликативный источники вариаций наблюдения, в информационной практике погрешности подразделяют также на внутренние по отношению к сенсору помехи измерения — шум сенсора $A_1 x + a_1$, и внешние помехи v_1, обусловленные исследуемым объектом и внешней средой. Учитывая эти соображения представим результат $\widehat{y}$ и ковариацию наблюдения K_y как сумму трех слагаемых — полезного измерительного сигнала $A_0 x$ и его ковариации $A_0^2 K_x$, мультипликативной помехи измерения $A_1 x$ и ее ковариации $K_A M(x^2) = K_A(x_0^2 + K_x)$, аддитивной помехи $a_1 + v_1$ и ее ковариации $K_{\text{ad}} = K_a + K_v$, ковариация полной ошибки $v_{\text{п}}$ есть $K_{v\text{п}} = K_A M(x^2) + K_{\text{ad}}$ итак, $K_y = A_0^2 K_x + K_A M(x^2) + K_{\text{ad}} = A_0^2 K_x + K_{v\text{п}}$. Подставим эти выражения в формулы оптимальной чувствительности и минимума случайной (полной) ошибки:

$$B_0 = \frac{A_0 K_x}{A_0^2 K_x + K_{v\text{п}}}, \quad K_\Delta^0 = \frac{K_x K_{v\text{п}}}{A_0^2 K_x + K_{v\text{п}}}.$$

Точное решение $K_\Delta^0 = 0$ возникает в двух случаях: $K_x = 0$ — «априорное зажатие» оптимальной оценки $\widehat{x}$, $K_{v\text{п}} = 0$ — идеальное наблюдение при исключении источников неопределенности — вариативности чувствительности A — мультипликативной помехи, вариативности сдвига a и помехи измерения v, т.е. аддитивная ошибка $K_{\text{a}} + K_v = 0$. В первом случае $B_0 = 0$, во втором $B_0 = A_0^{-1}$ — классическое обращение. Следовательно, полученное решение есть оптимальное «сочленение» фактической $\widehat{y}$ и априорной информации $q(u)$. В частном случае обобщенное решение содержит и классическое обращение по эквиальному критерию при $K_{v\text{п}} \to 0$.

В соответствии с этими предельными ситуациями возникают две ветви решения:

1) при $A_0^2 K_x \gg K_{v\text{п}}$ — «энергия» вариаций полезного сигнала намного выше «шума» — «энергии» вариаций помехи измерения, поэтому $K_y \approx A_0 K_x$, $B_0 \approx A_0^{-1}$, $K_\Delta^0 \approx K_{v\text{п}}/A_0^2$;

2) высокий уровень помех $K_{v\text{п}} \gg A_0^2 K_x$, в таком случае $K_y \approx K_{v\text{п}}$, $A_0 K_x / K_{v\text{п}}$, $K_\Delta^0 \approx K_x$ — априорной неопределенности.

Таким образом, пренебрежение влиянием искажающих вариаций в приближении (1) и принятие гипотезы об идеальном наблюдателе и сенсоре ($v_{\text{п}} = 0$) приводит к обратной пропорциональности чувствительностей сенсора и рефора $B_0 \sim A_0^{-1}$ и, в общем случае, к некорректным обратным задачам, скажем, при $A_0 \to 0$ ошибка $K_\Delta = K_{v\text{п}}/A_0^2$ становиться больше априорной вариации K_x, а в другом крайнем случае при априорном зажатии решения в приближении (2) обобщенное обращение ведет к пропорциональности прямого и обратного преобразования $B_0 \sim A_0$ (см. §9.7, т. 1). Оптимальное линейное решение выведено для произвольной функции распределения и, что важно для практики, эту априорную информацию не нужно знать во всех деталях. Как видно из полученных формул для анализа и синтеза сенсора и рефора достаточно определить первые два момента влияющих вариаций, т. е. сенсор априорики должен как можно точнее оценить лишь центр рассеяния u_0 и ковариационную матрицу генора K_u, другие свойства генора Γ_u, траектории T_u, распределения $q(u)$, области вариаций Q_u, связность ее границ и т. п. не влияют на линейный рефор $B(\widehat{y})$ и рефор адекватности B^∇.

Несколько иная интерпретация оптимального по точности решения с более простой семантикой состоит в предположении, что чувствительность A и сдвиг a являются точно известными константами ($K_A = K_a = 0$), а переменные искомое x и помеха v являются неизвестными задачи, но с точно известной моделью неопределенности $q(u) = q(x, v)$ или точной, необходимой и достаточной, априорикой $J = (x_0, K_x, v_0, K_v, A, a)$, тогда имеем центр рассеяния наблюдения $y_0 = Ax_0 + a + v_0$, его ковариация $K_y = A^2 K_x + K_v$, взаимная ковариация $K_{xy} = AK_x$, оптимальное линейное решение $\widehat{x} = x_0 + B_0(y - y_0)$, $B_0 = \dfrac{AK_x}{A^2K_x + K_v} = \dfrac{A}{1+z}$, $z = \dfrac{K_v}{A^2K_x}$ — отношение средних «энергий» шум/сигнал, минимальная дисперсия ошибки $K_\Delta^0 = \dfrac{K_xK_v}{A^2K_x + K_v} = \dfrac{K_xz}{1+z}$, систематическая погрешность $\Delta_0 = 0$.

Оптимальная чувствительность B_0 — коэффициент преобразования рефора при обработке наблюдений, как и в общем случае, рассмотренном выше, помимо чувствительности сенсора A зависит только от отношения z сигнал/помеха, а минимум ошибки еще зависит от одной из двух мер неопределенности K_x или K_v [1-42]. Зависимость чувствительности рефора B_0 от чувствительности сенсора при $A > 0$ немонотонная, она имеет один максимум при $A^2K_x = K_v$ — полезный сигнал равен помехе, и чувствительность B_0 уменьшается до нуля при $A \to 0$ и $A \to \infty$. Ошибка K_Δ^0 монотонно уменьшается от K_x до нуля с ростом чувствительности A от 0 до ∞. При увеличении неопределенности искомого $K_x \to \infty$ отношение $z \to 0$, чувствительность B_0 монотонно возрастает до величины A^{-1}, также монотонно растет ошибка K_Δ^0 (при постоянном уровне помех, $K_v = \text{const}$) до величины K_v/A^2. А при неизменной неопределенности искомого K_x увеличение уровня вариаций и неопределенности помех наблюдения K_v монотонно уменьшает значение оптимальной чувствительности до нуля и увеличивает уровень ошибок решения до априорной неопределенности $K_\Delta^0 \to K_x$, но при любом отношении сигнал/помеха и чувствительности сенсора мера ошибок $K_\Delta^0 \le K_x$ — априорной неопределенности искомого.

10.2. Квазиоптимальные решения. Границы информативности искаженных фактов и априорики

Реальный наблюдатель и идеальный аналитик. Выше был осуществлен переход от предельно идеализированной ситуации абсолютно точного сенсора $\widehat{y} \approx y = Ax + a$ и рефора классического обращения $\widehat{x} = B_{\text{КО}}\widehat{y} + b_{\text{КО}}$ с чувствительностью $B_{\text{КО}} = A^{-1}$ и сдвигом $b_{\text{КО}} = -B_{\text{КО}}a$ к более реалистичному описанию информационных процессов, которое учитывает ожидаемую изменчивость и ошибки оценок исходных данных $\{\widehat{y}, \widehat{A}, \widehat{a}\}$ и результаты обработки $\widehat{x}, \Delta_S$, используя критерий МНТ — максимума точности обобщенного обращения, в предположении, что фактические данные $\widehat{y}$ искажены, а априорная информация о вариациях x, v, $\widehat{A}$, $\widehat{a}$ задана точно. Следующим шагом повышения адекватности решения этой простейшей задачи реального информационного процесса является учет искажений априорики, ее неполноты, оценка последствий ошибочных гипотез при построении приближенных формализмов и аппроксимаций прямых и обратных преобразований [24].

Итак, пусть реальный наблюдатель обладает искаженной и возможно неполной априорной информацией $\widehat{J} = (\widehat{A}, \widehat{a}, \widehat{\Phi}, \widehat{q})$ и строит по априорике $\widehat{J} \to B, B^\nabla$ алгоритм обработки фактических наблюдений — основной рефор $\widehat{x} = B(\widehat{y})$ и рефор адекватности B^∇. Искаженные данные, как и прежде, помечены сверху шляпкой, неполная информация — частичное представление информационного объекта отмечается кавычками, например, задание распределения $q(x)$ первыми двумя моментами запишется так «$q(x)$» $= (x_0, K_x)$, а иерархию моделей неопределенности, в частности, можно представить так: «Γ_x» $= T_x$, «T_x» $= q(x)$, «$q(x)$» $= Q_x$, «Q_x» $= (x_0, K_x)$ и т. п. При отсутствии каких-то существенных данных постановка информационной задачи становиться некорректной. По Ж. Адамару задача поставлена некорректно, если: 1) решения не существует — постановка **противоречива**, это, как правило, переопределенная формализация, или 2) решение **не единственное** — постановка недоопределенная, либо 3) решение **неустойчиво** — малые изменения данных приводят к значительным вариациям характеристик ситуации и решение не может быть получено с требуемой точностью [72, 1-117]. Так, при отсутствии данных о каком-либо компоненте центра рассеяния причин u_0 или ковариации K_u оптимальное по точности решение становится недоопределенным, а вот незнание модальностей распределения $q(u)$ или факта связности области вариативности Q_u никак не отразится на полученном выше решении. Примером противоречивости служит несогласованность фактической $\widehat{y}$ и априорной информации при $\widehat{y} \overline{\in} Q_{\widehat{y}}$, скажем, $q(\widehat{y}) = 0$. Примерами неустойчивости преобразований служат алгоритмы псевдослучайных чисел, решения систем линейных уравнений, у которых матрица почти вырождена и ее определитель близок к нулю.

Существуют разные способы исправления некорректной формализации — изменить критерий, построить новые сенсфоры априорики и с их использованием получить недостающие данные, либо изменить постановку задачи и алгоритм решения в границах имеющейся информации, скажем, построить размытые решения и класс-функции обработки исходных данных, получить оценки искомых и мер адекватности снизу и сверху, либо перейти к условным, гипотетическим решениям в предположении справедливости различных непротиворечивых гипотез и альтернативных дополнительных условий.

Далее изучаются точностные свойства решений независимо от способов формализации, конструирования алгоритмов B, $B^{\Delta} : (\widehat{y}, \widehat{J}) \to (\widehat{x}, \widehat{\Delta})$ и получения оценок искомых $\widehat{x}$ и ошибок $\widehat{\Delta}$ о фактическому $\widehat{y}$ априорной информации $\widehat{J}$. Начнем с линейной теории точности (другое название — линейная теория ошибок обратных задач) в предположении, что сенсор A и рефор B являются линейными (аффинными) преобразованиями. Независимо от способа перехода от искаженной или неполной априорики $\widehat{J}$ к алгоритму B будем считать, что задан линейный рефор $\widehat{x} = B(\widehat{y}) = B\widehat{y} + b$, соответствующий произвольному (свободному) способу обращения линейного сенсора $\widehat{y} = Ax + a + v$, и необходимо оценить ошибку решения. Аккуратная и семантически строгая оценка точности возможна лишь в однозначно заданных условиях, поэтому, исходя из сенсформного принципа расщепления семантики информационных объектов, введем в формальную схему очередное различие и расщепление априорики на априорные данные **наблюдателя** $\widehat{J}$, описывающие его реальную информированность, и неискаженную истинную априорику J идеального наблюдателя, он занимается анализом действий реального наблюдателя и называется **аналитиком** (сверхинформированным наблюдателем, экспертом, эталонной системой), который владеет предельно точной априорной информацией.

Расщепление смысла и его знакового выражения представим в двух видах: априорики наблюдателя $\widehat{J}$ и априорики аналитика J, им соответствует расщепление сенсора априорики на **сенсфор априорики наблюдателя** $\widehat{B}_a$, порождающий $\widehat{J}$, и **сенсфор априорики аналитика** B_a, порождающий на выходе истинные априорные данные J об универсуме информационных ситуаций решаемой проблемы. Такое различение семантики и явное представление двух видов априорики вполне соответствует исходному в теории точности расщеплению искомого на истину x и ее оценку $\widehat{x}$, а также различению порождающих их операторов на аккуратор C и реальный сенсфор AB, тем самым, введенное расщепление априорики формализует второй уровень иерархии неопределенностей МИН.

Гипотеза истинности априорной информации аналитика $J = (A, a, \Phi, q)$ позволяет выразить условно точное знание $(x, \widehat{x}, \Delta, \widehat{\Delta})$, а отрицание этой гипотезы выражает необходимость построить третий и последующие уровни иерархии неопределенностей — аналитика второго и последующих уровней, контролирующих точность нижних уровней условно истинными оценками искомого, моделей связей и преобразований, мер их адекватности. Излагаемое далее приближение основано на истинности этой гипотезы, поэтому иерархия неопределенностей в данном случае обрывается на информации аналитика, а затем введем ее размытие в полном соответствии с методом иерархии неопределенностей.

Итак, пусть аналитику известны истинные состояния изучаемого объекта x и помехи v сенсора наблюдателя $\widehat{y} = Ax + a + v$ и вариативность состояний в универсуме в виде распределения $q(u) = q(x, A, a, v)$, а также состояние рефора наблюдателя $\widehat{x} = B\widehat{y} + b + v_{\text{в}}$, где $v_{\text{в}}$ — вычислительная ошибка рефора, зависящая в общем случае от $\widehat{y}$, B, b и модели вычислителя, на котором реализован рефор (см. §10.6). Ограничимся простейшим решением при постоянных A, a, B, b, пренебрегая частотными связями между вариациями влияющих причин: $q(u) = q(x, v, v_{\text{в}}) = q(x)q(v)q(v_{\text{в}})$. Ошибка решения $\Delta = \widehat{x} - x = (BA-1)\times$ $\times x + B(a+v) + b + v_{\text{в}}$ оценивается аналитиком, она является линейной функцией переменных x, v, $v_{\text{в}}$ — параметров состояний линейной модели исследования, как и систематическая ошибка $\Delta_0 = (BA-1)x_0+$ $+ B(a+v_0) + b + v_{\text{в}0}$, которая линейно зависит от положения центра рассеяния причин $u_0 = (x_0, v_0, v_{\text{в}0})$. Выражение $BA - 1 = D_m$ называется **мультипликативным дефектом обращения**, выражение $B(a+v_0) + b = D_a$ называется **аддитивным дефектом обращения**, тогда систематическая ошибка $\Delta_0 = D_m x_0 + D_a + v_{\text{в}0}$ есть истинная оценка аналитика.

Случайная ошибка $\Delta_1 = \Delta - \Delta_0 = D_m x_1 + Bv_1 + v_{\text{в}1}$ имеет ковариацию $K_\Delta = D_m^2 K_x + B^2 K_v + K_{v\text{в}}$, полная квадратическая ошибка произвольного линейного сенсфора AB равна сумме квадратов систематической и случайной ошибок $M(\Delta^2) = \Delta_S^2 = \Delta_0^2 + K_\Delta$, которые в свою очередь, слагаются из дефекта обращения, преобразованной ошибки измерения, усиленной или ослабленной чувствительностью B рефора, и ошибки вычисления. Эти три слагаемых описывают вклады в результирующую неточность трех этапов: априорного, предваряющего информационного процесса, этапа наблюдения и этапа обработки результатов наблюдения.

Кроме интегральных характеристик точности Δ_S^2, Δ_0, K_Δ для всего универсума — сомножества ситуаций, строят также локальные характеристики $\Delta_S(x)$, $\Delta_S(y)$ и т. п., например, зависимость среднего квадрата ошибки от искомого x есть квадратическая функция $\Delta_S^2(x) = (D_m(x - x_0) + \Delta_0)^2 + B^2 K_v + K_{v\text{в}}$, следовательно, мультипликативная и полная ошибка $\Delta_S(x)$, осредненная по помехам измерения и вычисления, при значительном удалении от центра неопределенности x_0 неограниченно, а точнее, почти линейно возрастают для произвольного линейного сенсора с ненулевым дефектом мультипликативного обращения, $D_m \neq 0$.

Квазиоптимальное обращение и границы информативности прямых наблюдений. Полученные оценки точности относятся к прерогативе эксперта — аналитика, который обладает истинной априорной информацией и контролирует точность реального наблюдателя, владеющего искаженными априорными данными. Наблюдатель, полагая, что его информация $\widehat{J}$ является точной или ее искажениями можно пренебречь, также может воспользоваться полученными формулами при построении, выборе или оптимизации сенсоров, но результаты наблюдателя, очевидно, будут отличаться от результатов аналитика, не отягощенных искажениями априорики. Оценки и оптимальные решения наблюдателя, полученные по точным формулам, но искаженной априорной информации $\widehat{J} = (\widehat{A}, \widehat{a}, \widehat{\Phi}, \widehat{q})$, называются **квазиоптимальными решениями**. У наблюдателя есть возможность использовать разные критерии и привлекать все доступные фактические и априорные данные, которые при значимых искажениях могут улучшать либо ухудшать качество решения — точность, оперативность и т. д. Найдем границы искажений информационных объектов, при которых их использование в информационном процессе не ухудшает точности решения. Подобного типа оценки допустимых предельных искажений называются **границами информативности** или **границами дезинформации** [24].

Начнем с элементарной ситуации. Модели прямого наблюдения $\widehat{y} = x + v$ соответствует точное знание параметров состояния сенсора: чувствительность $A = 1$, сдвиг $a = 0$ — полагаем, что это неискаженная априорная информация наблюдателя. Для классического обращения по эквиальному критерию $\widehat{y} = y_T$ при корректной постановке необходима дополнительная априорика о помехе измерения, скажем, искажениями этапа наблюдения можно пренебречь: $v \approx 0$, тогда $B = A^{-1} = 1$, $b = -Ba = 0$ — рефор, как и сенсор, имеет единичную чувствительность и нулевой сдвиг, поэтому искомая оценка равна наблюдаемому значению $\widehat{x} = \widehat{y}$. Если же известна априорная оценка $\widehat{v}_0 = v_0 + \Delta v_0$, равная сумме систематической погрешности прямых измерений v_0 и ошибки ее априорной оценки Δv_0, то реформный сдвиг $b = -\widehat{v}_0$ и оценка $\widehat{x} = \widehat{y} - \widehat{v}_0$. Методы максимального правдоподобия $\max\limits_{\widehat{x}} q(\widehat{y} \,|\, \widehat{x})$, наименьших квадратов $\min\limits_{\widehat{x}} (\widehat{y} - y_T)^2$ или минимальной невязки, хотя и включают в общем случае априорное знание о систематической v_0 и случайной составляющей ошибки измерения, например, оценку ковариации K_v, но результат обработки будет тот же, так как оценка искомого x не зависит от значения ковариации помехи K_v и ее искажений ΔK_v, но от этих величин зависит оценка рефором адекватности наблюдателя уровня погрешности решения: $\widehat{K}_\Delta = \widehat{K}_v/A^2 = \widehat{K}_v = K_v + \Delta K_v = K_\Delta + \Delta K_\Delta$.

Очевидно, искаженная априорная информация о погрешностях прямых измерений может быть полезной либо вредной, т.е. дезинформацией, ухудшающей решение в зависимости от уровня ее искажений Δv_0, ΔK_v и выбранных прототипов сравнения реформ. В данном примере пока имеется лишь два прототипа: $\widehat{x}_1 = \widehat{y}$ и $\widehat{x}_2 = \widehat{y} - \widehat{v}_0$. Ошибка первого решения, точно оцениваемая аналитиком, есть полная погрешность наблюдения $\Delta^2_{S1} = v_0^2 + K_v$, а ошибка второго решения $\Delta^2_{S2} = \Delta v_0^2 + K_v$, отсюда граница дезинформации искаженных значений о систематической ошибке измерения $\widehat{v}_0$ определяется равенством $\Delta^2_{S1} = \Delta^2_{S2}$ или $v_0^2 = \Delta v_0^2$ и область целесообразного учета систематической погрешности наблюдений определяется соотношением $v_0^2 \geq \Delta v_0^2$ — искажение априорной оценки меньше самого значения систематической ошибки измерения. В противном случае учет этой информации в среднем ухудшает точность результата при $M(\Delta v_0^2) \geq v_0^2$, так как при внесении поправки ошибка решения $\Delta = \widehat{x} - x = v - v_0 - \Delta v_0 = v_1 - \Delta v_0$ — она равна разности случайной и остаточной систематической погрешности измерения. Вместо найденной точной границы дезинформации широко используются также приближения. Так, в данном примере случайная составляющая ошибки может быть значительно больше систематической и априорная информация $\widehat{v}_0$ обесценивается, поэтому более простое решение $\widehat{x}_1$ при $K_v \gg v_0^2 + \Delta v_0^2$ становится предпочтительнее решения $\widehat{x}_2$ практически независимо от уровня искажений Δv_0.

Привлечем теперь априорную информацию об искомом при обработке прямых наблюдений и воспользуемся методом наибольшей точности — МНТ. Для линейного сенсора и квадратического критерия точности оптимальное решение аналитика $\widehat{x} = x_0 + B_0(\widehat{y} - y_0) = \dfrac{x_0 z}{1+z} + \dfrac{\widehat{y} - v_0}{1+z}$ есть взвешенное сочетание априорного значения искомого x_0 (наилучшего по квадратическому критерию точности) и исправленного на систематическую ошибку v_0 наблюдения $\widehat{y}$, преобразованного с оптимальной чувствительностью $B_0 = 1/(1+z)$. Предельная точность оценки x по $\widehat{y}$, достигаемая аналитиком, характеризуется нулевым уровнем систематической ошибки $\Delta_0 = 0$ и минимальным уровнем случайной ошибки $K^0_\Delta = \dfrac{K_v}{1+z} = \dfrac{K_x z}{1+z} = B_0 K_v$, зависящей не только от уровня случайных помех наблюдения K_v, но и от соотношения z между вариациями помехи и искомого, где $z = K_v/K_x$ — отношение шум/сигнал.

Квазиоптимальное решение наблюдателя, полученное по тем же правилам, но по возмущенной априорной информации $\widehat{J} = (\widehat{x}_0, \widehat{K}_x, \widehat{v}_0, \widehat{K}_v)$, имеет тот же вид формул и другие величины в них: $\widehat{x} = \widehat{x}_0 + \widehat{B}_0(y - \widehat{y}_0)$,

$\widehat{y}_0 = \widehat{x}_0 + \widehat{v}_0$, $\widehat{B}_0 = \dfrac{1}{1+\widehat{z}}$, $\widehat{z} = \dfrac{\widehat{K}_v}{\widehat{K}_x}$, $\widehat{\Delta}_0 = 0$, $\widehat{K}^0_\Delta = \dfrac{\widehat{K}_v}{1+\widehat{z}}$. Заметим, что при анализе последствий искажений априорики нельзя непосредственно сопоставлять оценки ошибок аналитика и наблюдателя, полученные соответственно по точным и искаженным данным, например, оценки систематической погрешности у них совпадут: $\Delta_0 = \widehat{\Delta}_0 = 0$, а оценка случайной ошибки $\widehat{K}^0_\Delta$ наблюдателем может быть как больше, так и меньше истинной оптимальной оценки аналитика K^0_Δ, поэтому необходимо воспользоваться приведенными выше формулами оценки точности, полученными для произвольного рефора $\widehat{y} = By + b$.

Эти формулы можно упростить, так как в данном анализе можно не раскрывать полную структуру ошибки и, кроме того, пренебречь вычислительными погрешностями наблюдателя и аналитика, полагая их независимыми от априорной информации, поэтому при таком предположении уровень вычислительных ошибок не влияет на сравнительный анализ точности. С этой целью найдем приращение случайной и систематической ошибок при отклонениях $\Delta B = B - B_0$, $\Delta b = b - b_0$ чувствительности и сдвига произвольного рефора наблюдателя $\widehat{x}_{\text{Н}} = B\widehat{y} + b$ от оптимального решения рефора аналитика $\widehat{x}_a = B_0\widehat{y} + b_0$. Для этого выделим в оценке наблюдателя $\widehat{x}_{\text{Н}}$ слагаемые, связанные с отклонениями ΔB и Δb, порождающими квазиоптимальность решения и увеличение уровня ошибок наблюдателя за счет искажений априорики: $\widehat{x}_{\text{Н}} = (B_0 + \Delta B)\widehat{y} + b_0 + \Delta b = \widehat{x}_a + \Delta B\widehat{y} + \Delta b$. Сдвиг квазиоптимального решения $b = \widehat{x}_0 - B\widehat{y}_0 = x_0 + \Delta x_0 - B(y_0 + \Delta y_0) = b_0 + \Delta b$, где отклонение от оптимального сдвига $b_0 = x_0 - B_0 y_0$ равно $\Delta b = \Delta x_0 - \Delta B y_0 - B\Delta y_0$, следовательно, различие в оценках искомого свойства x наблюдателем и аналитиком оценивается величиной $d_{\text{на}} = \widehat{x}_{\text{н}} - \widehat{x}_a = \Delta B(\widehat{y} - y_0) + \Delta x_0 - B\Delta y_0 = \Delta B\widehat{y} + \Delta b$.

Среднее значение этой величины $M(d_{\text{на}}) = \Delta B y_0 + \Delta b = \Delta x_0 - B\Delta y_0$ определяет систематическую ошибку наблюдателя $\Delta_0 = M(d_{\text{на}})$, так как систематическая ошибка аналитика равна нулю, следовательно, систематическая погрешность квазиоптимального решения есть сумма априорных ошибок в сдвиге Δb и чувствительности ΔB, умноженной на y_0 — центр рассеяния наблюдения. Приращение случайной ошибки квазиоптимального решения, как и любого другого рефора, отличного от оптимального, есть величина $d_1^{\text{на}} = d_{\text{на}} - \Delta_0 = \Delta B(\widehat{y} - y_0)$, которая зависит только от отклонения чувствительности ΔB и не зависит от сдвигов рефоров, а ее средний квадрат есть приращение ковариации ошибки решения, обусловленной квазиоптимальностью: $d(K_\Delta) = M(d_1^2) = \Delta B^2 K_y$, а полная случайная ошибка квазиоптимального решения есть $K_\Delta = K^0_\Delta + \Delta B^2 K_y$.

Полученные формулы позволяют оценить границы дезинформации возмущенной априорики $\widehat{J} = (\widehat{A}, \widehat{a}, \widehat{x}_0, \widehat{K}_x, \widehat{v}_0, \widehat{K}_v)$ линейного сенсора и легко переносятся на многомерные ситуации (см. далее), а здесь мы вернемся к простейшему примеру прямых наблюдений, для которых точно выполняются соотношения $A = 1$, $a = 0$. Остальные априорные данные в этом примере могут быть известными точно либо искажены сенсфором априорики. В последнем случае возникает дополнительное приращение полной ошибки решения, по сравнению с оптимальным решением аналитика, имеющее минимальный уровень искажений решения $\Delta_S^2 = K_\Delta^0$, $\Delta_0 = 0$, и это приращение ошибок равно $d(\Delta_S^2) = \Delta_0^2 + d(K_\Delta) = (\Delta B y_0 + \Delta b)^2 + \Delta B^2 K_y$. Итак, наблюдатель имеет фактическую $\widehat{y}$ и априорную информацию $\widehat{I}$, по которой выбирает метод и строит процесс обработки информации. Расширение априорики увеличивает разнообразие методов обработки $\widehat{x} = B(\widehat{y})$ и число возможных альтернатив. Перечислим наиболее интересные варианты, широко распространенные в информационной практике:

— **тривиальный** рефор $\widehat{x}_{\text{Т}} = B_{\text{Т}}(\widehat{y}) = \widehat{y}$, используя который наблюдатель утверждает или принимает гипотезу, что наблюденное значение $\widehat{y}$ есть свойство реальности x или это приближенная оценка $\widehat{x}_{\text{Т}} = x + v$;

— **тривиальный** рефор с **исправлением** систематических ошибок наблюдения $\widehat{x}_{TC} = B_{TC}(\widehat{y}) = \widehat{y} - \widehat{v}_0$; как и предыдущий вариант он соответствует классическому обращению и эквиальному критерию равенства теории и эксперимента;

— **априорный** рефор $\widehat{x}_{\text{АП}} = B_{\text{АП}}(\widehat{y}) = \widehat{x}_0$ порождает априорную оценку искомого свойства при отсутствии наблюдения $\widehat{y}$ или когда оно отбрасывается в предположении, что $\widehat{y}$ содержит грубые или большие ошибки и наблюдение несет дезинформацию;

— **квазиоптимальный** рефор $\widehat{x}_{\text{КВ}} = B_{\text{КВ}}(\widehat{y}) = \widehat{x}_0 + \widehat{B}_0(\widehat{y} - \widehat{y}_0)$;

— **эвристический** рефор $\widehat{x}_{\text{Э}} = B_{\text{Э}}(\widehat{y})$, построенный наблюдателем из неформальных соображений, не укладывающихся в существующую теорию и основанных на опыте, известных эвристиках, интуиции, субъективных представлениях и прежних творческих удачах наблюдателя.

К этому перечню добавляется предельный по точности оптимальный линейный рефор аналитика $\widehat{x}_{\text{ОПТ}} = B_{\text{ОПТ}}(\widehat{y}) = x_0 + B_0(\widehat{y} - y_0)$, построенный по полной и неискаженной априорной информации. Чтобы облегчить сравнительный анализ точности рефоров прямых наблюдений, сведем их характеристики в таблицу, используя полученные выше формулы, и поскольку эвристический рефор не формализован, то для него используются обозначения и формулы произвольного рефора.

Границы дезинформации и допустимые уровни искажений априорики наблюдателя устанавливает аналитик по последним трем колонкам — систематической, случайной и полной ошибкам решения, зная конкретные значения помехи v и ее осреднений, v_0, K_v, а также искажений априорики Δx_0, ΔK_x, Δv_0, ΔK_v либо их средние значения и ковариации и сравнивая по точности результаты пяти прототипов рефоров, при этом эвристический рефор $B_{\text{Э}}(\widehat{y})$ может иметь произвольную точность, приближаясь к наилучшим оценкам аналитика либо выходя за пределы допустимых ошибок, поэтому фактически четвертая строка таблицы в последующем сравнительном анализе не используется.

Таблица 10.1

$B(\widehat{y})$	$\widehat{x}$	B	ΔB	b	Δb	Δ_0	K_Δ	Δ_S^2
$B_{\text{Т}}$	$\widehat{y}$	1	$B_0 z$	0	$-b_0$	v_0	K_v	$v_0^2 + K_v$
B_{TC}	$\widehat{y} - \widehat{v}_0$	1	$B_0 z$	$-\widehat{v}_0$	$-\widehat{v}_0 - b_0$	$-\Delta v_0$	K_v	$\Delta v_0^2 + K_v$
$B_{\text{АП}}$	$\widehat{x}_0$	0	$-B_0$	$\widehat{x}_0$	$\widehat{x}_0 - b_0$	Δx_0	K_x	$\Delta x_0^2 + K_x$
$B_{\text{Э}}$	$B\widehat{y} + b$	B	$B - B_0$	b	$b - b_0$	$\Delta B y_0 + {}$ $+ \Delta b$	$(B-1)^2 K_x + {}$ $+ B^2 K_v$	$\Delta_0^2 + K_\Delta$
$B_{\text{КВ}}$	$\widehat{B}_0 \widehat{y} + \widehat{b}_0$	$\widehat{B}_0$	$\widehat{B}_0 - B_0$	$\widehat{x}_0 - \widehat{B}_0 \widehat{y}_0$	$\widehat{b}_0 - b_0$	$\Delta x_0 - {}$ $- \widehat{B}_0 \Delta y_0$	$B_0 K_v + {}$ $+ \Delta B^2 K_y$	$\Delta_0^2 + K_\Delta$
$B_{\text{ОПТ}}$	$B_0 \widehat{y} + b_0$	B_0	0	$x_0 - B_0 y_0$	0	0	$B_0 K_v$	$B_0 K_v$

В общем случае прямых или косвенных наблюдений в соответствии с методом координатного анализа (см. далее) **предельные границы информативности** какого-либо фактического или априорного информационного объекта $\widehat{x}$, $\widehat{v}_0$, $\widehat{K}_v$, $\widehat{K}_x$, $\widehat{A}$, $\widehat{a}$ и т. п. обычно определяются при условии, что остальные объекты заданы точно (данные наблюдателя и аналитика совпадают), и производится сравнение уровней погрешностей двух наилучших по точности реформ наблюдателя, один из которых использует данный информационный объект ($\widehat{x}$ или $\widehat{v}_0$ и т. д.), а другой рефор эту информацию не использует. Очевидно, при использовании в обработке нескольких искаженных объектов границы их информативности, как правило, сужаются.

Начнем с простейшей ситуации неискаженной априорики наблюдателя $\widehat{J} = J$ и его полной априорной информированности. Обозначим ошибки Δ_S^2 (последняя колонка) рефоров $B_{\text{Т}}$, $B_{\text{ТС}}$, $B_{\text{АП}}$, $B_{\text{КВ}}$, $B_{\text{ОПТ}}$, соответственно, через $\Delta_{\text{Т}}^2 = v_0^2 + K_v$, $\Delta_{\text{ТС}}^2 = K_v$, $\Delta_{\text{АП}}^2 = K_x$, $\Delta_{\text{КВ}}^2 = \Delta_{\text{ОПТ}}^2 = B_0 K_v = \dfrac{K_x K_v}{K_x + K_v} = \dfrac{K_v}{1+z}$ — квазиоптимальное решение совпадает с оптимальным. Отсюда следует соотношение $\Delta_{\text{Т}}^2 = \Delta_{\text{ТС}}^2 + v_0^2$ — при точном знании систематической ошибки измерения рефор $B_{\text{ТС}}$ лучше $B_{\text{Т}}$ по точности при значительном влиянии систематической погрешности по сравнению со случайной погрешностью. Квадратическая точность $T_S = \Delta_S^{-2}$ оптимального и квазиоптимального решения $T_{\text{ОПТ}}$ равна сумме оптимальной точности $T_{\text{АП}} = K_x^{-1}$ и случайной точности измерения $T_v = K_v^{-1} = \Delta_{\text{ТС}}^{-2}$, следовательно, $\Delta_{\text{ОПТ}}^{-2} = \Delta_{\text{АП}}^{-2} + \Delta_{\text{ТС}}^{-2} = T_{\text{АП}} + T_v$ — **закон сложения квадратических точностей**, т. е. оптимальное решение обеспечивает аддитивное накопление точности, сложение априорной и фактической информативности. Полезность точной априорной информации о вариациях переменных определяется соотношением между вариациями K_x и K_v — отношением $z = K_v / K_x$.

Итак, при точном знании центров рассеяния x_0 и v_0 и вариаций K_x, K_v, т. е. расположение и размеры области неопределенности переменных x и v известны точно, соотношения между ошибками таковы: $\Delta_{\text{ОПТ}} = \Delta_{\text{КВ}} < \Delta_{\text{ТС}}$ и $\Delta_{\text{АП}}$, $\Delta_{\text{ТС}} < \Delta_{\text{Т}}$, т. е. рефор $B_{\text{КВ}}$ лучше $B_{\text{ТС}}$ и $B_{\text{АП}}$, а $B_{\text{ТС}}$ лучше по точности, чем $B_{\text{Т}}$. Сравнение по точности классических реформ $B_{\text{Т}}$ и $B_{\text{ТС}}$ с априорным решением позволяет найти границы применимости наблюдения $\widehat{y}$. Так, тривиальное решение $\widehat{x} = \widehat{y}$ лучше априорной оценки $\widehat{x} = x_0$, если квадрат полной ошибки измерения $v_0^2 + K_v < K_x$, а рефор $B_{\text{Т}}$ лучше $B_{\text{АП}}$, рефор $B_{\text{ТС}}$ лучше $B_{\text{АП}}$ при $K_v < K_x$, $z < 1$, в противном случае классические реформы $B_{\text{Т}}$ и $B_{\text{ТС}}$ ухудшают априорное решение и результат измерения $\widehat{y}$ несет дезинформацию, если не воспользоваться при синтезе рефора дополнительными априорными данными (x_0, K_x) и иными критериями обращения, отличными от классического эквиального критерия.

Искажение Δx_0, Δv_0, ΔK_x, ΔK_v априорики $J = (x_0, v_0, K_x, K_v)$ причудливым образом влияет на точность квазиоптимального решения наблюдателя. Для упрощения оценок последствий неравенства $\widehat{J} \neq J$ воспользуемся **методом координатного анализа** — МКА влияющих факторов, аналогом метода координатного спуска минимизации критериальных функций. МКА состоит в последовательном искажении компонентов априорной информации наблюдателя. Пусть $\Delta v_0 \neq 0$, остальные элементы $\widehat{J}$ известны точно, тогда реформы $B_{\text{Т}}$, $B_{\text{АП}}$ и их точности не изменятся, а точности $B_{\text{ТС}}$ и $B_{\text{КВ}}$ уменьшатся на величину приращения ошибки $d(\Delta_S^2)$ и, соответственно, $d_{TC} = \Delta v_0^2$ и $d_{\text{КВ}} = B_0^2 \Delta v_0^2 = \dfrac{\Delta v_0^2}{(1+z)^2}$, так как $z > 0$, то $d_{\text{КВ}} < d_{\text{ТС}}$ — квазиоптимальное решение уменьшает влияние систематических ошибок по сравнению с классическим обращением. То же можно утверждать и относительно влияния случайных ошибок $\dfrac{K_v}{1+z} < K_v$, поэтому при искажении оценки систематической погрешности квазиоптимальный рефор $B_{\text{КВ}}$ заведомо лучше классического $B_{\text{ТС}}$, так как $\Delta_{\text{КБ}}^2 = \dfrac{K_v}{1+z} + \dfrac{\Delta v_0^2}{(1+z)^2} < K_v + \Delta v_0^2$, следовательно, при оценках предельных границ и искажений оценки $\widehat{v}_0$ достаточно сравнить точности реформ $B_{\text{КО}}$ и $B_{\text{АП}}$, не использующих $\widehat{v}_0$, с точностью $B_{\text{КВ}}$. Здесь возникает две ветви решения:

1) при малом уровне ошибок измерения $v_0^2 + K_v < K_x$ — априорной вариации искомого имеем $\Delta_{\text{Т}} < \Delta_{\text{АП}}$, поэтому граница дезинформации определяется равенством $\Delta_{\text{Т}} = \Delta_{\text{КВ}}$ и область информативности оценки $\widehat{v}_0$ выражается неравенством $\Delta_{\text{КВ}}^2 < \Delta_{\text{Т}}^2$ или в явном виде $\Delta v_0^2 < (1+z)^2 v_0^2 + z(1+z)K_v$, следовательно, при переходе от эквиального критерия рефора $B_{\text{Т}}$ к точностному критерию и квазиоптимальному рефору $B_{\text{КВ}}$ граница дезинформации смещается и область применимости оценки $\widehat{v}_0$ расширяется;

2) при высоком уровне помех измерения $v_0^2 + K_v > K_x$ квазиоптимальное решение сравнивается с априорным $\Delta_{\text{КВ}} < \Delta_{\text{АП}}$, отсюда область информативности $\widehat{v}_0$ и допустимых искажений этой априорной

информации определяется неравенством $\dfrac{K_x z}{1+z} + \dfrac{\Delta v_0^2}{(1+z)^2} < K_x$, иначе $\Delta v_0^2 < K_x(1+z)$, т. е. допускаются искажения, большие чем «априорное зажатие» K_x, так как $z > 0$. А при малых v_0 отношение шум/сигнал больше единицы и граница $\Delta v_0^2 < 2K_x$ и более.

Искажение Δx_0 априорной оценки центра рассеяния искомого свойства $\widehat{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$ не влияет на точности рефоров $B_{\text{Т}}$ и $B_{\text{ТС}}$, но вызывает приращения ошибок рефоров $B_{\text{АП}}$ и $B_{\text{КВ}}$ (см. табл. 10.1): $d_{\text{АП}} = \Delta x_0^2$, $d_{\text{КВ}} = (1-B_0)^2 \Delta x_0^2 = \dfrac{K_v \Delta x_0^2}{K_x + K_v}$, а ошибки определяются выражениями $\Delta_{\text{АП}}^2 = \Delta x_0^2 + K_x$, $\Delta_{\text{КВ}}^2 = \dfrac{(\Delta x_0^2 + K_x)K_v}{K_x + K_v}$ сравнивая которые, заключаем, что квазиоптимальный рефор подавляет и систематическую Δx_0, и случайную ошибку решения с коэффициентом подавления $\dfrac{K_v}{K_x + K_v} = \dfrac{z}{1+z} < 1$, и тем больше подавляется их сумма, чем меньше отношение шум/сигнал.

Итак, в ситуации с искаженной информацией о центре рассеяния и точными другими априорными данными достаточно сравнить ошибки рефоров $B_{\text{КВ}}$ и $B_{\text{ТС}}$, так как $\Delta_{\text{КВ}}^2 = \dfrac{(\Delta x_0^2 + K_x)\cdot z}{1+z} < \Delta_{\text{АП}}^2 = \Delta x_0^2 + K_x \Delta_{\text{ТС}}^2 = K_v < \Delta_{\text{Т}}^2 = v_0^2 + K_v$. Следовательно, область информативности объекта $\widehat{x}_0$ определяется условием $\Delta_{\text{КВ}} < \Delta_{\text{ТС}}$, отсюда $\Delta x_0^2 < K_v$ — ошибка в знании центра рассеяния должна быть меньше случайной ошибки наблюдения.

Следующий шаг анализа и оценки границ допустимых искажений априорики наблюдателя состоит в учете ошибок оценок ковариаций $\widehat{K}_x = K_x + \Delta K_x$ и $\widehat{K}_v = K_v + \Delta K_v$. Их влияние проще оценить совместно, так как эти априорные данные использует только квазиоптимальный рефор $B_{\text{КВ}}$, притом в виде отношения $\widehat{z} = \widehat{K}_v / \widehat{K}_x = z + \Delta z$, остальные рефоры от этих априорных данных не зависят. В данной ситуации при $\Delta v_0 = \Delta x_0 = 0$ достаточно сравнить $B_{\text{КВ}}$ с $B_{\text{ТС}}$ при $K_v < K_x$, так как в этом случае $B_{\text{ТС}}$ лучше $B_{\text{АП}}$, и в противном случае сравнить $B_{\text{КВ}}$ с $B_{\text{АП}}$ так как при $K_v > K_x$ $B_{\text{АП}}$ лучше по точности, чем $B_{\text{КВ}}$. Из выражений $\widehat{z} = \dfrac{\widehat{K}_v}{\widehat{K}_x}$, $\Delta z = \dfrac{(\Delta K_v K_x - \Delta K_x K_v)}{\widehat{K}_x}$ и квазиоптимальной чувствительности $\widehat{B}_0 = \dfrac{1}{1+\widehat{z}}$ видно, что ошибки априорики ΔK_x и ΔK_v в принципе могут быть сколь угодно велики, не изменяя равенства $\widehat{z} = z$, для этого они должны удовлетворять соотношению $\dfrac{\Delta K_x}{\Delta K_v} = \dfrac{K_x}{K_v}$, при котором $\Delta z = 0$, $\widehat{B}_0 = B_0$, $\Delta_{\text{КВ}} = \Delta_{\text{ОПТ}}$. Найдем выражения ошибки квазиоптимального решения в данной ситуации: систематическая ошибка $\Delta_0 = 0$, случайная ошибка $K_\Delta = (\widehat{B}_0 - 1)^2 K_x + \widehat{B}_0^2 K_v = \dfrac{K_x(z + \widehat{z}^2)}{(1+z)^2} = \Delta_{\text{КВ}}^2(\widehat{z})$.

Выделим из полной ошибки квазиоптимального решения приращение, связанное с искажениями априорики наблюдателя:

$$d_{\text{КВ}}(\widehat{z}) = K_\Delta - \Delta^2_{\text{ОПТ}} = \frac{K_x \Delta z^2}{(1+z)(1+\widehat{z})^2} = K_x B_0 \widehat{B}_0^2 \Delta z^2.$$

Легко убедиться, что зависимость $\Delta_{\text{КВ}}(\widehat{z})$ от априорной оценки отношения ковариации $\widehat{z} = \widehat{K}_v/\widehat{K}_x$ имеет единственный минимум при $\widehat{z} = z$, равный $\Delta^2_{\text{ОПТ}}$, один максимум при $\widehat{z} = 0$, соответствующий классическому обращению, и еще асимптотический максимум при $\widehat{z} \to \infty$, соответствующий априорному решению $\widehat{x} = x_0$ и равный априорной неопределенности $\Delta^2_{\text{КВ}}(\infty) = \Delta^2_{\text{АП}} = K_x$.

Минимум этой функции в точке $\widehat{z} = z$ слегка асимметричен $\dfrac{d^3\Delta_{\text{КВ}}}{dz^3} < 0$, т. е. $\Delta_{\text{КВ}}(z+\Delta z) < \Delta_{\text{КВ}}(z-\Delta z)$, следовательно, наблюдателю «выгоднее» ошибаться в сторону завышения случайных ошибок измерения K_v и занижения оценок ковариации K_x, которая выражает априорную неопределенность искомого, например, полагая ошибку априорики $\Delta z = \pm z$, получаем $\Delta_{\text{КВ}}(2z) < \Delta_{\text{КВ}}(0) = \Delta_{\text{ТС}}$, т. е. 100-процентная ошибка оценки отношения шум/сигнал в сторону его завышения приводит к более точному результату, чем ошибка с противоположным знаком и принятие предположения $z = 0$, которое соответствует истинности хотя бы одной из двух гипотез — отсутствию случайных ошибок измерения $K_v \to 0$ или бесконечной неопределенности искомого $K_x \to \infty$ [1-42].

Найдем границы дезинформации оценки $\widehat{z}$ отношения шум/сигнал. Оценка этого отношения может изменяться в интервале от 0 до ∞, при этом на одном конце интервала $\Delta^2_{\text{КВ}}(0) = K_v$ — квадратическая неточность рефора $B_{\text{ТС}}$, а на другом $\Delta^2_{\text{КВ}}(\infty) = K_x$ — неточность априорного рефора $B_{\text{АП}}$. В ситуации $z < 1$, $K_v < K_x$, рефор $B_{\text{ТС}}$ лучше $B_{\text{АП}}$ и область допустимых искажений определяется сравнением точностей $B_{\text{КВ}}$ и $B_{\text{ТС}}$ — неравенством $\Delta^2_{\text{КВ}} = \dfrac{K_x(z+\widehat{z}^2)}{(1+\widehat{z})^2} < K_v = \Delta^2_{\text{ТС}}$ следовательно, $z + \widehat{z}^2 < (1+\widehat{z})^2 z$ или $\widehat{z} < \dfrac{2z}{1-z}$, т. е. при малых уровнях искажений $z \approx 0$ априорная оценка $\widehat{z}$ не должна превышать $2z$ и относительная ошибка $\dfrac{\Delta z}{z} \le 100\%$, при $z = 0{,}5$ граница дезинформации $\widehat{z}_{\text{ГР}} = 4z = 2$, т. е. предельная ошибка $\Delta z_{\Gamma} = 1{,}5$, а приближение z к единице и далее вообще устраняет ограничения на оценку $\widehat{z}$, т. е. она должна быть в интервале $0 \le \widehat{z} \le \infty$. В самом деле при $z > 1$ необходимо сравнить $B_{\text{КВ}}$ и $B_{\text{АП}}$, но неравенство $\Delta_{\text{КВ}} < \Delta_{\text{АП}}$ выполняется в этом случае при любом $\widehat{z} \ge 0$ и любом сколь угодно большом искажении Δz.

Подведем итоги. При полной и точной информированности наблюдателя, модели и данные которого совпадают с информацией аналитика, ошибки рефоров удовлетворяют соотношениям: $\Delta_{\text{ОПТ}} = \Delta_{\text{КВ}} \le \Delta_{\text{ТС}}$, $\Delta_{\text{АП}}, \Delta_{\text{ТС}} \le \Delta_{\text{Т}}$. Границы дезинформации для наблюдения $\widehat{y} = y + v$

отсутствуют, т. е. результат $\widehat{y}$ всегда информативен и не несет дезинформации, если наблюдатель имеет точную априорику и пользуется точностным критерием обращения сенсора, при этом о распределении наблюдателю достаточно знать точно два первых момента «$q(x, v)$» $= (x_0, K_x, v_0, K_v)$ — достаточная априорика, если рефор линейный, а критерий квадратический. Другие свойства области вариаций и помехи измерения на точности решения наблюдателя не сказываются.

При неполной информированности наблюдателя, скажем, «$q(x, v)$» $= (x_0, v_0, K_v)$, и неизвестной вариации искомого K_x либо при «$q(x, v)$» $= (v_0)$ центр рассеяния x_0, отношение шум/сигнал $z = K_v/K_x$ не известны или же наблюдатель использует классический критерий равенства $y_{\text{Т}} = \widehat{y}$ теории и эксперимента, приводящий к схеме классического обращения и рефору $B_{\text{ТС}}$, вместо точностного обращения, возникает граница дезинформации для данных наблюдения, а именно, результат измерения $\widehat{y}$ несет дезинформацию, т. е. ухудшает решение по сравнению с априорной оценкой $\widehat{x} = x_0$ при $z > 1$, $K_v > K_x$.

Предельные границы дезинформации и допустимых искажений при полных, неточных априорных данных, когда отягощен ошибками лишь один априорный параметр, а другие параметры точно известны наблюдателю, сведены в таблицу.

Таблица 10.2

№	**Искаженные данные**	**Допустимые искажения**
1.	Оценка систематической ошибки измерения: $\widehat{v}_0 = v_0 + \Delta v_0$	$\Delta v_0^2 < (K_v z + v_0^2(1+z))(1+z)$ при $K_x > v_0^2 + K_v$ $\Delta v_0^2 < K_x(1+z)$ при $K_x > \Delta v_0^2 + K_v$
2.	Оценка центра рассеяния цели: $\widehat{x}_0 \neq x_0 + \Delta x_0$	$\Delta x_0^2 < K_v$
3.	Оценка отношения шум/сигнал вариаций причин: $\widehat{z} = z + \Delta z = \dfrac{\widehat{K}_v}{\widehat{K}_x}$	$\Delta z < z\dfrac{1+z}{1-z}$, $\widehat{z} < \dfrac{2z}{1-z}$ при $z < 1$, Δz произвольное при $z > 1$ и $0 \leq \widehat{z} \leq \infty$

Полученные выше формулы позволяют оценить предельные искажения априорных данных $\widehat{J} = J \pm \Delta J = (\widehat{x}_0, \widehat{K}_x, \widehat{v}_0, \widehat{K}_v)$ классического и обобщенного обращения прямых измерений, когда эти искажения возникают по отдельным компонентам априорных данных, но в реальных информационных ситуациях априорика искажена по всем компонентам. При более полном анализе квазиоптимальных решений, чем результаты, полученные МКА, вводят систематические и случайные уровни ошибок совокупных априорных данных и получают численным экспериментом уровни приращений ошибок для альтернативных реforов и по ним выбирают наилучшие результаты, по которым определяют совокупные границы дезинформации, которые, очевидно, будут у́же предельных границ, если отсутствует взаимная компенсация искажений, а в первом приближении решение находится в предположении независимости ошибок квадратическим суммированием приращений погрешностей, скажем, для квазиоптимального решения $d_{\text{КВ}} = d(\Delta x_0) + d(\Delta v_0) + d(z)$.

Квазиоптимальность косвенных наблюдений. Теперь перейдем к косвенным измерениям $\widehat{y} = Ax + a + v$. Все предыдущие рассуждения и выкладки с незначительной коррекцией переносится на косвенные наблюдения и добавляется учет априорных ошибок в оценках чувствительности $\Delta A = \widehat{A} - A$ и сдвига $\Delta a = \widehat{a} - a$. Вместо тривиальных рефоров $B_{\text{Т}}$ и $B_{\text{ТС}}$ в качестве прототипов здесь выступают два рефора классического обращения $\widehat{x}_{\text{КО}} = B_{\text{КО}}(\widehat{y}) = (\widehat{y} - \widehat{a})/\widehat{A}$ и $\widehat{x}_{\text{КОС}} = B_{\text{КОС}}(\widehat{y}) = B_{\text{КО}}(\widehat{y} - \widehat{v}_0) = (\widehat{y} - \widehat{a} - \widehat{v}_0)/\widehat{A}$ соответственно без учета и с учетом систематической погрешности наблюдений. Эти рефоры имеют одинаковую чувствительность $B = \widehat{A}^{-1}$, а сдвиги их отличаются на величину $B\widehat{v}_0$.

Систематические ошибки $\Delta_0 = \widehat{x}_0 - x_0$ результатов $\widehat{x}$ обработки измерений $\widehat{y}$ рефорами $B_{\text{КО}}$, $B_{\text{КОС}}$, $B_{\text{КВ}}$, $B_{\text{АП}}$ таковы:

$$\Delta_0^{KO} = \frac{v_0 - \Delta a}{\widehat{A}} - \gamma_A x_0,$$

$\gamma_A = \Delta A/\widehat{A}$ — **соотносительная** ошибка оценки чувствительности сенсора,

$$\Delta_0^{\text{КОС}} = -\frac{\Delta v_0 - \Delta a}{\widehat{A}} - \gamma_A x_0,$$

$$\Delta_0^{\text{КВ}} = \Delta x_0 - \widehat{B}_0 \Delta y_0 = \frac{\widehat{z}\Delta x_0 - \gamma_A x_0 - (\Delta v_0 + \Delta a)/\widehat{A}}{1 + \widehat{z}},$$

$\widehat{z} = \dfrac{\widehat{K}_v}{\widehat{A}^2 \widehat{K}_x}$ — оценка отношения шум/сигнал, $\Delta_0^{\text{АП}} = \Delta x_0$. Для прямых измерений величина Δa определяет точность задания нуля шкалы, а ΔA характеризует точность задания единицы шкалы сенсора.

Уровни случайных ошибок рефоров определяются выражениями:

$$K_\Delta^{\text{КО}} = K_\Delta^{\text{КОС}} = \gamma_A^2 K_x + \frac{K_v}{\widehat{A}^2}, \quad K_\Delta^{\text{АП}} = K_x, \quad K_\Delta^{\text{КВ}} = K_x \frac{(1 - \gamma_{\text{А}})^2 z + (\widehat{z} + \gamma_A)^2}{(1 + z)^2}.$$

Если априорная информация точно известна, то систематическая ошибка рефоров $B_{\text{КВ}}$, $B_{\text{КОС}}$, $B_{\text{АП}}$ косвенных наблюдений, как и прямых, равна нулю, а обратная величина меры случайной составляющей ошибки оптимального решения — предельной квадратической точности $T_x = \Delta_{\text{ОПТ}}^{-2} = (K_\Delta^0)^{-1}$ равна сумме априорной точности $\Delta_{\text{АП}}^{-2} = K_x^{-1} = T_{ax}$ и точности классического обращения $\Delta_{\text{КОС}}^{-2} = A^2 K_v^{-1} = A^2 T_v$ — преобразованной точности измерений — это свойство называется **аддитивностью точностей** линейных систем или законом сложения информативностей: $T_x = T_{ax} + A^2 T_v$, иначе $\Delta^{-2}_{\text{ОПТ}} = \Delta^{-2}_{\text{АП}} + \Delta^{-2}_{\text{КОС}}$, $(K^0_\Delta)^{-1} = K_x^{-1} + A^2 K_v^{-1}$. Закон выполняется и в многомерном случае [1-54].

Зависимость точности косвенных наблюдений от искажений априорики Δx_0, Δv_0, ΔA, Δa, Δz носит «овражный» характер, при котором может возникать взаимная компенсация влияний априорных ошибок. Дно оврага определяет предельный уровень погрешности решения K^0_Δ моделей аналитика, так как для любого линейного рефора B погрешность $K_\Delta(B) \geq K^0_\Delta$. Легко проверить, что при любом уровне искажений априорных данных, удовлетворяющих соотношениям: $\Delta z = -\gamma_A(1+z)$, $\Delta a + \Delta v_0 + A x_0 = \widehat{A}(z + \Delta z)\Delta x_0$, квазиоптимальное решение остается оптимальным и обладает наивысшей точностью: систематическая погрешность $\Delta^{\text{КВ}}_0 = 0$, а случайная $K^{\text{КВ}}_\Delta = K^0_\Delta = \dfrac{K_x z}{1+z} = \Delta^2_{\text{КВ}}$ — равна полной квадратической погрешности решения.

При потере чувствительности сенсора и уменьшении ее оценки $\widehat{A} \to 0$ случайные и систематические ошибки классического обращения неограниченно растут, а ошибки квазиоптимального решения и обобщенного обращения ограничены оценками Δx_0 и $\widehat{K}_x$. Заметим, что отличие от нуля соотносительной ошибки γ_A, равной дефекту классического обращения, не позволяет вводить в сравнительный анализ гипотезу бесконечной неопределенности искомого, $K_x = \infty$, так как в данном случае случайные погрешности $K^{\text{КО}}_\Delta = K^{\text{КОС}}_\Delta = \infty$ при любых K_v, $A \neq \widehat{A}$.

Используя метод координатного анализа, найдем предельные границы допустимых погрешностей априорных данных при косвенных измерениях, последовательно по одному искажая компоненты точной априорики A, a, x_0, v_0, z и полагая остальные компоненты точно известными. Начнем с анализа влияний ошибки в знании чувствительности сенсора $\Delta A = \widehat{A} - A$, которая влияет на точность реформ $B_{\text{КО}}$, $B_{\text{КОС}}$, $B_{\text{КВ}}$ и не влияет на $B_{\text{АП}}$, но при точном знании v_0 нам достаточно сравнить ошибки результатов $B_{\text{КОС}}$, $B_{\text{КВ}}$, $B_{\text{АП}}$, так как $B_{\text{КОС}}$ лучше $B_{\text{КО}}$ во всем диапазоне всевозможных ошибок оценок чувствительности сенсора $-\infty < \Delta A < \infty$.

Систематические ошибки в данной ситуации таковы: $\Delta^{\text{КОС}}_0 = -\gamma_A x_0$, $\Delta^{\text{КВ}}_0 = -\dfrac{\gamma_A x_0}{1+\widehat{z}}$, $\Delta^{\text{АП}}_0 = 0$, т. е. $\Delta^{\text{АП}}_0 \leq |\Delta^{\text{КВ}}_0| \leq |\Delta^{\text{КОС}}_0|$ и, если ситуация центрирована, $x_0 = 0$, то систематические ошибки исчезают $\Delta^{\text{КВ}}_0 = \Delta^{\text{КОС}}_0 = \Delta^{\text{АП}}_0 = 0$ и их можно не рассматривать. Сравнительный анализ случайных и полных ошибок представляет значительные трудности из-за весьма причудливой зависимости ковариации K_Δ от ΔA. Для упрощения этого анализа введем четыре относительные меры искажения ΔA априорных данных о чувствительности сенсора A: прямое и обратное отношения: $\beta = \alpha^{-1} = \widehat{A}/A$, $\alpha = A/\widehat{A}$, **относительная** $\delta = \Delta A/A$ и **соотносительная** ошибка $\gamma = \Delta A/\widehat{A}$ — эта мера была использована выше. Соотношения между α, β, γ, δ такие: $\alpha = \beta^{-1} = 1 - \gamma = \dfrac{1}{1+\delta}$, $\delta = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}$, $\gamma = \dfrac{\delta}{1+\delta}$.

Так как в анализируемой ситуации ковариации K_x и K_v известны точно, то оценка отношения шум/сигнал искажается только из-за ошибки ΔA, поэтому $\widehat{z} = \dfrac{K_v}{\widehat{A}^2 K_x} = \alpha^2 z$, $\Delta z = \widehat{z} - z = \gamma(\gamma - 2)z$. Введем также относительную меру погрешности решения $\eta^2 = \dfrac{K_\Delta}{K_x} = \dfrac{\Delta^2}{\Delta^2_{\text{АП}}}$ — последнее равенство справедливо при нулевом уровне систематических ошибок. Вместо средних квадратических отклонений часто берут отношения предельных отклонений, умножая числитель и знаменатель η на пикфактор t_q (см. гл. 8, т. 1). Подставляя введенные обозначения в формулы случайных погрешностей рефоров $B_{\text{КО}}$ и $B_{\text{КВ}}$, получим:

$$\eta^2_{\text{КО}} = \gamma^2 + \alpha^2 z = (1-\alpha)^2 + \alpha^2 z = \frac{\delta^2 + z}{(1+\delta)^2},$$

$$\eta^2_{\text{КВ}} = \frac{\alpha^2 z + (1 + \alpha^2 z - \alpha)^2}{(1+\alpha^2 z)^2} = \frac{z(1+\delta)^2 + (z + \delta(1+\delta))^2}{(z + (1+\delta)^2)^2} = \frac{\beta^2 z + (z + \beta^2 - \beta)}{(z+\beta^2)^2}.$$

Используя формулу $K_\Delta = K^0_\Delta + (B - B_0)^2 K_y$, в которой ковариация наблюдения $K_y = A^2 K_x + K_v$, можно представить выражения ошибок в иной форме:

$$\eta^2_{\text{КО}} = \frac{1}{(1+z)}\left(z + \frac{(\delta - z)^2}{(1+\delta)^2}\right), \quad \eta^2_{\text{КВ}} = \frac{1}{1+z}\left(z + \frac{\delta^2(1+\delta-z)^2}{(z+(1+\delta)^2)^2}\right).$$

Из этих формул непосредственно следует, что при любых ошибках $\delta = \Delta A/A$ случайные погрешности решений ограничены снизу предельным значением $\dfrac{K^0_\Delta}{K_x} = \dfrac{z}{1+z}$, которое достигается квазиоптимальным решением при двух значениях априорной ошибки $\delta_1 = 0$ и $\delta_2 = z - 1$ и им соответствуют две оптимальные оценки чувствительности: точная $\widehat{A} = A$ и квазиточная $\widehat{A} = Az$, при которой

$$\widehat{B}_0 = \frac{1}{\widehat{A}(1+\widehat{z})} = \frac{1}{Az(1+1/z)} = \frac{1}{A + Az} = B_0.$$

Функция точности классического обращения $\eta_{\text{КО}}(\delta, z)$ не достигает предельного минимального значения погрешности при $\delta = 0$, она обращается в минимум при $\delta = z$, $\Delta A = Az$, оптимальная оценка чувствительности $\widehat{A} = A(1+z)$, т. е. при классическом обращении выгодно априорную оценку чувствительности завышать даже при точном знании A на величину Az. Здесь и далее для простоты рассуждений мы полагаем чувствительность положительной, а при $A < 0$ смысл завышения или занижения определяется знаком произведения $A\Delta A$.

Эффект повышения точности классического рефора при положительном смещении ΔA оценки чувствительности $\widehat{A}$ до значений ошибки $\Delta A = Az$ связан с понижением оценки чувствительности рефора до оптимального уровня по критерию точностного обращения, и дальнейшее понижение чувствительности рефора при неограниченном росте оценки $\widehat{A}$ и $x_0 = 0$ решение $\widehat{x}$ не выводит решение в область дезинформации, а напротив, приближает его к центру области вариации искомого $x_0 = 0$. Если же ситуация не центрирована, $x_0 \neq 0$, то область информативности классического обращения сужается за счет влияния систематической ошибки, равной $-\gamma_A x_0$.

Таким образом, функция $\eta_{\text{КО}}$ имеет один минимум и неограниченно растет при $\delta \to -1$, когда оценка $\widehat{A} \to 0$ (рис. 10.1). Неограниченный рост априорной ошибки $\Delta A \to +\infty$ ведет к ограниченному увеличению погрешности решения от минимального уровня до априорного: $\eta_{\text{КО}} \to 1$, $\Delta_{\text{КО}} < \Delta_{\text{АП}}$, а увеличение отрицательных значений ΔA и $\widehat{A} \to -\infty$ уменьшает ошибку решения от бесконечного значения в полюсе $\delta = -1$ до априорного уровня $\eta_{\text{КО}} \to 1$, и в этом диапазоне ошибка $\Delta_{\text{КО}} > \Delta_{\text{АП}}$. Граница дезинформации информационного объекта $\widehat{A}$ и, следовательно, результата измерения $\widehat{y}$ при классическом обращении определяется уравнением $\eta_{\text{КО}}(\delta, z) = 1$ или $\delta^2 + z = (1+\delta)^2$, отсюда $\delta_{\text{ГР}} = (z-1)/2$ и область информативности оценки $\widehat{A}$ выражается неравенством $(Az - A)/2 < \Delta A < \infty$, т. е. для прецизионных ситуаций $z \approx 0$ отрицательная ошибка должна быть меньше, чем $-A/2$, т. е. 50-процентный уровень отрицательных ошибок является предельным. С увеличением отношения z отрицательные значения априорной ошибки ΔA выводят в область дезинформации, скажем, при $z = 1$ граничное значение $\Delta A_{\text{ГР}} = 0$.

Рис. 10.1. Зависимость относительной погрешности классического обращения линейной модели от уровня искажений ΔA чувствительности A

Итак, функция точности классического обращения $\eta_{\text{КО}}(\delta, z)$ имеет один минимум при $\delta = z$, соответствующий предельной точности оптимального решения, один полюс (максимум) $\eta = \infty$ при $\delta = -1$, один асимптотический максимум при $\delta \to \infty$ и один асимптотический минимум при $\delta \to -\infty$, по z функция $\eta_{\text{КО}}$ линейно возрастает. Отрицательные ошибки $-\infty < \Delta A < 0$ всегда ухудшают результат классического обращения, положительные ошибки $0 < \Delta A < \infty$ при $z > 1$ заведомо улучшают точность решения, а при $z < 1$ решение не ухудшается при искажении оценки $\widehat{A}$, если $\eta_{\text{КО}}(\delta) < \eta_{\text{КО}}(0) = z$, $\dfrac{\delta^2 + z}{(1+\delta)^2} < z$ или $0 < \Delta A < \dfrac{2zA}{1-z} = \dfrac{2AK_v}{A^2K_x - K_v}$, т.е. с ростом уровня шума $K_v \to A^2K_x$ верхняя граница допустимых искажений априорных данных о чувствительности A, повышающих точность решения, сдвигается в бесконечность.

Более сложный характер имеет функция точности квазиоптимального решения $\eta_{\text{КВ}}(\delta, z)$ (рис. 10.2). Использование точностного критерия приводит к устранению полюса, если $z > 0$. Действительно, при $\delta = -1$ и любых допустимых значениях $z > 0$ функция $\eta_{\text{КВ}} = 1$. Найдем экстремумы этой функции, приравнивая производную $d\eta/d\alpha$ нулю, в результате получим уравнение: $\alpha^4z^2 - \alpha^3z^2 - \alpha^3z + \alpha z + \alpha - 1 = 0$, левая часть которого легко преобразуется в произведение: $(\alpha - 1) \times$ $\times\, (\alpha z - 1)(\alpha^2 z - 1) = 0$, отсюда получим четыре корня уравнения: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/z$, $\alpha_3 = 1/\sqrt{z}$, $\alpha_4 = -1/\sqrt{z}$, для относительной погрешности: $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = z - 1$ — точки минимума функции $\eta_{\text{КВ}}$, найденные выше, $\delta_3 = \sqrt{z} - 1$, $\delta_4 = -\sqrt{z} - 1$ — точки максимума ошибок квазиоптимального решения.

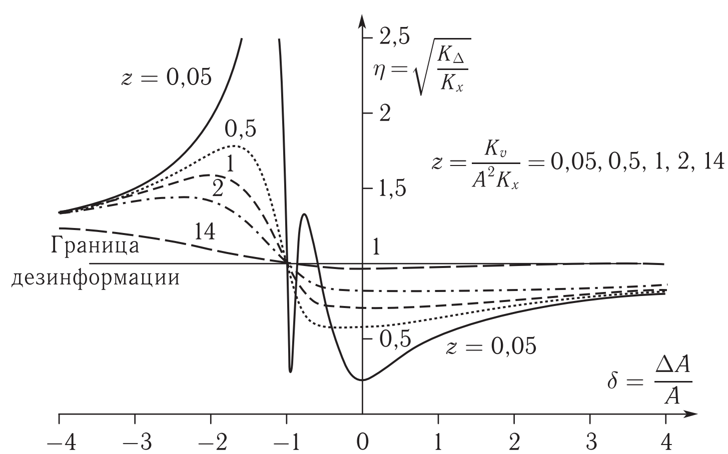

Рис. 10.2. Зависимость относительной погрешности квазиоптимального обращения линейной модели от уровня искажений ΔA чувствительности A

Помимо четырех экстремумов функция $\eta_{\text{КВ}}$ имеет асимптотический минимум при $\delta, \beta \to -\infty$ и асимптотический максимум при $\delta, \beta \to +\infty$. Действительно, при больших β^2 асимптотика функции $\eta_K \sim 1 - \frac{2}{\beta} = 1 - \frac{2}{1+\delta}$. Функция $\eta_{\text{КВ}}(\delta, z)$ непрерывна по своим аргументам, поэтому минимумы и максимумы чередуются, а их взаимное расположение и слияние зависит от z: при $0 < z < 1$ имеем $-\infty < \delta_4 < -1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_1 = 0 < \infty$ и, соответственно, экстремальные значения функции удовлетворяют цепочке попарных неравенств: $1 < \eta_4 > 1 > \eta_2 < \eta_3 > \eta_1 < 1$, при $z > 1$ расположение экстремумов: $-\infty < \delta_4 < -1 < \delta_1 = 0 < \delta_3 < \delta_2 < \infty$ и соотношения экстремальных значений: $1 < \eta_4 > 1 > \eta_1 < \eta_3 > \eta_2 < 1$. При $z = 0$ сливаются экстремумы $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = -1$ и образуется полюс-максимум $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \infty$, при $z = 1$ сливается другая тройка экстремумов $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ и образуется единственный минимум $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = 1/2$ и единственный максимум $\eta_4 = \sqrt{10}/2 > 1$.

В самом деле, подставим полученные значения δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 в выражение $\eta_{\text{КВ}}(\delta, z)$ и найдем экстремальные значения функции: $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \frac{z}{1+z}$ — уровень предельной точности; $\eta_3^2 = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2$ — первое максимальное значение ошибки, определяющее границы дезинформации правее полюса $\delta = -1$; $\eta_4^2 = \frac{1}{4} + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2$ — второе максимальное значение левее полюса, так как $\delta_4 < -1$, которое лежит в области дезинформации: $\eta(\delta, z) > 1$ при $\delta < -1$ и любых z, что очевидно из выражения $\eta_4 > 1$.

В зависимости от отношения z «энергии» шума к «энергии» полезного сигнала максимум ошибки η_3 может быть меньше либо больше единицы и, соответственно, включаться либо исключаться из области информативности априорной оценки $\widehat{A}$ и наблюдения $\widehat{y}$ при оптимальном по точности обращении. Найдем значения z, при которых максимум $\eta_3 = 1$. Этих значений два: $z_1 = (2 - \sqrt{3})^2 \approx 1/14$ и $z_2 = (2 + \sqrt{3})^2 \approx 14$, поэтому интервал возможных значений $0 < z < \infty$ разбивается на три подинтервала малых $z < 1/14$, средних $1/14 < z < 14$ и больших $z > 14$ отношений шум/сигнал. В малом и большом интервале максимальное значение $\eta_3 > 1$, в среднем интервале $\eta_3 < 1$ и поэтому диапазон ошибок $-1 < \delta < \infty$ или $-A < \Delta A < \infty$ является областью информативности $\widehat{A}$ и $\widehat{y}$, а при $\delta < -1$ или $\Delta A < -A$, когда A и $\widehat{A}$ имеют разные знаки чувствительности $\widehat{A}A < 0$, информационные объекты $\widehat{A}$, $\widehat{y}$ превращаются в дезинформацию.

Найдем границы области информативности при различных отношениях шум/сигнал, решая неравенство $\frac{\beta^2 z + (z + \beta^2 - \beta)^2}{(z + \beta^2)^2} \leq 1$. Граничные значения отношения $\beta = \widehat{A}/A$ определяются этим неравенством