

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

II

Л.Д. ЛАНДАУ
Е.М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Л.Д. ЛАНДАУ и Е.М. ЛИФШИЦ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В десяти томах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2006

Л.Д. ЛАНДАУ и Е.М. ЛИФШИЦ

ТОМ II

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Издание восьмое, стереотипное
Под редакцией Л.П. Питаевского

*Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей университетов*

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2006

УДК 530.1(075.8)

Л22

ББК 22.31

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. **Теоретическая физика:** Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. **Теория поля.** — 8-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 536 с. — ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II).

Второй том курса теоретической физики, заслужившего широкую известность в нашей стране и за рубежом, посвящен классической теории электромагнитных и гравитационных полей. Излагаются основы специальной теории относительности, вывод уравнений электродинамики из принципа наименьшего действия, вопросы распространения и излучения электромагнитных волн. Последние главы книги посвящены общей теории относительности. Параллельно с развитием этой теории излагаются основы тензорного анализа.

Для студентов университетов, студентов физических специальностей вузов, а также для аспирантов соответствующих специальностей.

Рекомендовано министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов физических
специальностей университетов

Ответственный редактор курса «Теоретическая физика» академик
РАН, доктор физико-математических наук *Л. П. Питаевский*

ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II)

ISBN 5-9221-0053-X

© ФИЗМАТЛИТ, 1988, 2001, 2003, 2006.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию	8
Из предисловий к первому и второму изданиям	9
Некоторые обозначения	10
Глава I. Принцип относительности	11
§ 1. Скорость распространения взаимодействий	11
§ 2. Интервал	15
§ 3. Собственное время	20
§ 4. Преобразование Лоренца	22
§ 5. Преобразование скорости	26
§ 6. Четырехмерные векторы	28
§ 7. Четырехмерная скорость	38
Глава II. Релятивистская механика	40
§ 8. Принцип наименьшего действия	40
§ 9. Энергия и импульс	42
§ 10. Преобразование функции распределения	46
§ 11. Распад частиц	48
§ 12. Инвариантное сечение	53
§ 13. Упругие столкновения частиц	55
§ 14. Момент импульса	60
Глава III. Заряд в электромагнитном поле	64
§ 15. Элементарные частицы в теории относительности	64
§ 16. Четырехмерный потенциал поля	66
§ 17. Уравнения движения заряда в поле	68
§ 18. Калибровочная инвариантность	72
§ 19. Постоянное электромагнитное поле	73
§ 20. Движение в постоянном однородном электрическом поле	75
§ 21. Движение в постоянном однородном магнитном поле	76
§ 22. Движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях	80
§ 23. Тензор электромагнитного поля	85
§ 24. Преобразование Лоренца для поля	87
§ 25. Инварианты поля	88
Глава IV. Уравнения электромагнитного поля	91
§ 26. Первая пара уравнений Максвелла	91
§ 27. Действие для электромагнитного поля	93
§ 28. Четырехмерный вектор тока	95
§ 29. Уравнение непрерывности	98
§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла	100
§ 31. Плотность и поток энергии	103

§ 32. Тензор энергии-импульса	105
§ 33. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	109
§ 34. Теорема вириала	114
§ 35. Тензор энергии-импульса макроскопических тел	115
Глава V. Постоянное электромагнитное поле	119
§ 36. Закон Кулона	119
§ 37. Электростатическая энергия зарядов	120
§ 38. Поле равномерно движущегося заряда	123
§ 39. Движение в кулоновом поле	125
§ 40. Дипольный момент	128
§ 41. Мультипольные моменты	130
§ 42. Система зарядов во внешнем поле	134
§ 43. Постоянное магнитное поле	136
§ 44. Магнитный момент	138
§ 45. Теорема Лармора	140
Глава VI. Электромагнитные волны	143
§ 46. Волновое уравнение	143
§ 47. Плоские волны	145
§ 48. Монохроматическая плоская волна	150
§ 49. Спектральное разложение	156
§ 50. Частично поляризованный свет	158
§ 51. Разложение электростатического поля	164
§ 52. Собственные колебания поля	165
Глава VII. Распространение света	171
§ 53. Геометрическая оптика	171
§ 54. Интенсивность	175
§ 55. Угловой эйконал	177
§ 56. Тонкие пучки лучей	180
§ 57. Отображение широкими пучками лучей	186
§ 58. Пределы геометрической оптики	189
§ 59. Дифракция	191
§ 60. Дифракция Френеля	197
§ 61. Дифракция Фраунгофера	201
Глава VIII. Поле движущихся зарядов	207
§ 62. Запаздывающие потенциалы	207
§ 63. Потенциалы Лиенара — Вихерта	210
§ 64. Спектральное разложение запаздывающих потенциалов	213
§ 65. Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка	216
Глава IX. Излучение электромагнитных волн	221
§ 66. Поле системы зарядов на далеких расстояниях	221
§ 67. Дипольное излучение	225
§ 68. Дипольное излучение при столкновениях	229
§ 69. Тормозное излучение малых частот	232
§ 70. Излучение при кулоновом взаимодействии	234
§ 71. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения	243
§ 72. Поле излучения на близких расстояниях	246
§ 73. Излучение быстро движущегося заряда	250
§ 74. Магнитно-тормозное излучение	255
§ 75. Торможение излучением	262
§ 76. Торможение излучением в релятивистском случае	270
§ 77. Спектральное разложение излучения в ультрарелятивистском случае	273

§ 78. Рассеяние свободными зарядами	277
§ 79. Рассеяние волн с малыми частотами	283
§ 80. Рассеяние волн с большими частотами	284
Глава X. Частица в гравитационном поле	288
§ 81. Гравитационное поле в нерелятивистской механике	288
§ 82. Гравитационное поле в релятивистской механике	290
§ 83. Криволинейные координаты	294
§ 84. Расстояния и промежутки времени	298
§ 85. Ковариантное дифференцирование	303
§ 86. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором	309
§ 87. Движение частицы в гравитационном поле	313
§ 88. Постоянное гравитационное поле	317
§ 89. Вращение	325
§ 90. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля	326
Глава XI. Уравнения гравитационного поля	330
§ 91. Тензор кривизны	330
§ 92. Свойства тензора кривизны	334
§ 93. Действие для гравитационного поля	341
§ 94. Тензор энергии-импульса	345
§ 95. Уравнения Эйнштейна	351
§ 96. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля	358
§ 97. Синхронная система отсчета	365
§ 98. Тетрадное представление уравнений Эйнштейна *	372
Глава XII. Поле тяготеющих тел	376
§ 99. Закон Ньютона	376
§ 100. Центральное-симметричное гравитационное поле	381
§ 101. Движение в центральном-симметричном гравитационном поле	390
§ 102. Гравитационный коллапс сферического тела	393
§ 103. Гравитационный коллапс пылевидной сферы	401
§ 104. Гравитационный коллапс несферических и вращающихся тел	408
§ 105. Гравитационное поле вдали от тел	419
§ 106. Уравнения движения системы тел во втором приближении	427
Глава XIII. Гравитационные волны	437
§ 107. Слабые гравитационные волны	437
§ 108. Гравитационные волны в искривленном пространстве-времени	440
§ 109. Сильная гравитационная волна	443
§ 110. Излучение гравитационных волн	447
Глава XIV. Релятивистская космология	453
§ 111. Изотропное пространство	453
§ 112. Закрытая изотропная модель	458
§ 113. Открытая изотропная модель	463
§ 114. Красное смещение	467
§ 115. Гравитационная устойчивость изотропного мира	475
§ 116. Однородные пространства	482
§ 117. Плоская анизотропная модель	489
§ 118. Колебательный режим приближения к особой точке	494
§ 119. Особенность по времени в общем космологическом решении уравнений Эйнштейна	499
Предметный указатель	503

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги появилось более тридцати лет тому назад. При ряде переизданий за эти десятилетия книга перерабатывалась и дополнялась; к настоящему времени ее объем увеличился по сравнению с первоначальным почти вдвое. Но никогда не возникало необходимости в изменении предложенного Ландау способа построения теории и вдохновенного им стиля изложения, главная черта которого — стремление к ясности и простоте. Всеми силами я стремился сохранить этот стиль и при тех переработках, которые мне пришлось производить уже одному.

По сравнению с предыдущим, пятым, изданием первые девять глав книги, посвященные электродинамике, остались почти без изменений. Главы же, посвященные теории гравитационного поля, переработаны и дополнены. От издания к изданию материал этих глав существенно дополнялся, и в конце концов возникла необходимость в некотором перераспределении и упорядочении его расположения.

Я хотел бы выразить здесь глубокую признательность всем своим товарищам по работе — слишком многочисленным, чтобы я мог их перечислить, — которые своими замечаниями и советами помогли устранить имевшиеся в книге недочеты и внести в нее ряд улучшений. Без этих советов, без той готовности помочь, с которой неизменно встречаются мои вопросы, работа над продолжением изданий этого Курса была бы намного труднее.

Особой благодарностью я обязан Л. П. Питаевскому, с которым я постоянно обсуждал возникавшие вопросы, а также В. А. Белинскому за его помощь в проверке формул и чтении корректуры.

Декабрь, 1972 г.

Е. М. Лифшиц

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ К ПЕРВОМУ И ВТОРОМУ ИЗДАНИЯМ

Предлагаемая книга посвящена изложению теории электромагнитного и гравитационного полей, т. е. электродинамике и общей теории относительности. Полная, логически связанная теория электромагнитного поля включает в себя специальную теорию относительности. Поэтому мы взяли последнюю в качестве основы изложения. За исходный пункт для вывода основных соотношений берутся вариационные принципы, дающие возможность достигнуть наибольшей общности, единства и, по существу, простоты изложения.

Соответственно общему плану нашего Курса теоретической физики (частью которого является эта книга) мы не касались в этом томе вовсе вопросов электродинамики сплошных сред, ограничиваясь изложением «микроскопической» электродинамики — электродинамики вакуума и точечных зарядов.

Для чтения книги необходимо знакомство с электромагнитными явлениями в объеме общих курсов физики. Необходимо также хорошее знание векторного анализа. Не предполагается предварительного знания читателями тензорного анализа, который излагается параллельно с развитием теории гравитационных полей.

Москва, декабрь 1939 г.
Москва, июнь 1947 г.

Л. Ландау, Е. Лифшиц

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Трехмерные величины

Трехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами

Элементы объема, площади и длины dV , df , dl

Импульс и энергия частицы $\mathbf{p}$ и $\mathcal{E}$

Функция Гамильтона $\mathcal{H}$

Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля φ и $\mathbf{A}$

Напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

Плотности зарядов и тока ρ и $\mathbf{j}$

Электрический дипольный момент $\mathbf{d}$

Магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$

Четырехмерные величины

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими буквами $i, k, l, \dots$ и пробегает значения 0, 1, 2, 3

Принята метрика с сигнатурой $(+-----)$

Правило поднятия и опускания индексов — на стр. 28

Компоненты 4-векторов перечисляются в виде $A^i = (A^0, \mathbf{A})$

Антисимметричный единичный тензор 4-го ранга ϵ^{iklm} , причем $\epsilon^{0123} = 1$ (определение — на стр. 32)

Элемент 4-объема $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

Элемент гиперповерхности dS^i (определение на стр. 36)

4-радиус-вектор $x^i = (ct, \mathbf{r})$

4-скорость $u^i = dx^i/ds$

4-импульс $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$

4-вектор тока $j^i = (c\rho, \rho\mathbf{v})$

4-потенциал электромагнитного поля $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$

4-тензор электромагнитного поля $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ (связь компонент

F_{ik} с компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — на стр. 86)

4-тензор энергии-импульса T^{ik} (определение его компонент — на стр. 109)

Ссылки типа I § 18 относятся к тому I, «Механика»

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Скорость распространения взаимодействий

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, *систему отсчета*. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Существуют системы отсчета, в которых свободное движение тел, т. е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью. Такие системы отсчета носят название *инерциальных*.

Если две системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно и если одна из них инерциальная, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной (всякое свободное движение и в этой системе будет прямолинейным и равномерным). Таким образом, имеется сколько угодно инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно-поступательно.

Опыт показывает, что справедлив так называемый *принцип относительности*. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах отсчета, имеет один и тот же вид.

Взаимодействие материальных частиц описывается в обычной механике посредством потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Легко видеть, что этот способ описания взаимодействий включает в себя предположение о мгновенности распространения взаимодействий. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны остальных частиц, в каждый момент зависят, при таком описании, только от положения частиц в этот же момент времени.

Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключается в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Разделив расстояние между обоими телами на этот промежуток времени, мы найдем «скорость распространения взаимодействий».

Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть максимальной скоростью распространения взаимодействий. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого изменение, происходящее с одним телом, начинает проявляться на другом. Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой. Действительно, если бы такое движение могло происходить, то посредством него можно было бы осуществить взаимодействие со скоростью, превышающей наибольшую возможную скорость распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой, часто говорят как о «сигнале», отправляющемся от первой частицы и «дающем знать» второй об изменении, которое испытала первая. О скорости распространения взаимодействий говорят тогда как о «скорости сигнала».

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной.

Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют *скоростью света*. Она обозначается обычно буквой c , а ее численное значение

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с.} \quad (1,1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что на практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика. Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько малы по сравнению со скоростью света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется *принципом относительности Эйнштейна* (он был сформулирован А. Эйнштейном в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется *релятивистской*. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействий; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу $c \rightarrow \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике пространство относительно, т. е. пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. Утверждение, что два одновременных события происходят в одном и том же месте пространства или, вообще, на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются не зависящими от системы отсчета — время одно для всех систем отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Измерения, произведенные впервые

Майкельсоном (в 1881 г.), обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем согласно классической механике скорость света в направлении движения Земли должна была бы быть отличной от скорости в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события,

одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с осями координат соответственно x, y, z и x', y', z' , причем система K' движется относительно K вправо вдоль осей x и x' (рис. 1).

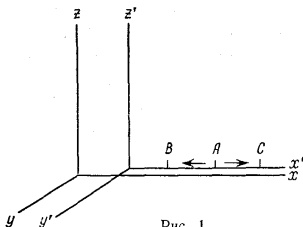


Рис. 1.

Пусть из некоторой точки A на оси x' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K' , как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c , то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K').

Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K . Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c , и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C .

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

§ 2. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием *события*. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.

Часто полезно из соображений наглядности пользоваться воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются *мировыми точками*. Всякой частице соответствует некоторая линия (*мировая линия*) в этом четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета K и K' , движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и z были параллельны осям y' и z' ; время в системах K и K' обозначим через t и t' .

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе K в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы K распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2 . Сигнал распространяется со скоростью c ; пройденное им расстояние равно поэтому $c(t_2 - t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$. Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе K :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (2,1)$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы K' . Пусть координаты первого события в системе K' : x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 , а второго: x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 . Поскольку скорость света в системах K и K' одинакова, то, аналогично (2,1), имеем:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0. \quad (2,2)$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (2,3)$$

называется *интервалом* между этими двумя событиями.

Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то для интервала ds между ними имеем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2,4)$$

Форма выражения (2,3) или (2,4) позволяет рассматривать интервал, с формальной математической точки зрения, как расстояние между двумя точками в воображаемом четырехмерном пространстве (на осях которого откладываем x , y , z и произведение ct). Имеется, однако, существенное отличие в правиле составления этой величины по сравнению с правилом обычной геометрии: при образовании квадрата интервала квадраты разностей координат по различным осям суммируются не с одинаковыми, а с различными знаками ¹⁾.

Как было показано выше, если $ds=0$ в некоторой инерциальной системе отсчета, то $ds'=0$ и в другой системе. С другой стороны, ds и ds' — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что ds^2 и ds'^2 должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds^2 = a ds'^2,$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства.

Рассмотрим три системы отсчета K , K_1 , K_2 и пусть V_1 и V_2 — скорости движения систем K_1 и K_2 относительно K . Тогда имеем:

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2.$$

С тем же основанием можно написать:

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2,$$

где V_{12} — абсолютная величина скорости движения K_2 относительно K_1 . Сравнивая друг с другом эти соотношения, найдем,

¹⁾ Четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой (2,4), называют *псевдоевклидовой* в отличие от обычной, евклидовой, геометрии. Эта геометрия была введена в связи с теорией относительности Г. Минковским.

что должно быть:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (2,5)$$

Но V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов V_1 и V_2 , но и от угла между ними. Между тем последний вообще не входит в левую часть соотношения (2,5). Ясно поэтому, что это соотношение может быть справедливым лишь, если функция $a(V)$ сводится к постоянной величине, равной, как это следует из того же соотношения, единице.

Таким образом,

$$ds^2 = ds'^2, \quad (2,6)$$

а из равенства бесконечно малых интервалов следует равенство также и конечных интервалов: $s = s'$.

Мы приходим, следовательно, к важнейшему результату: интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты двух событий в некоторой системе отсчета K . Спрашивается, существует ли такая система отсчета K' , в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе K :

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе K' :

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

причем в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l_{12}' = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$, т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют *временеподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями времениподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое

пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t'_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \quad (2,7)$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12} , так как скорость тела не может быть больше c . Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. По-прежнему мы имеем в системах K и K' : $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Мы хотим, чтобы $t_{12}' = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчета можно найти только в том случае, когда интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют *пространственноподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между точками, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}. \quad (2,8)$$

Подразделение интервалов на времениподобные и пространственноподобные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным не зависит от системы отсчета.

Возьмем какое-нибудь событие — назовем его событием O — в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. Другими словами, в четырехмерной системе координат, на осях которой откладываются x , y , z и t , мировая точка события O будет началом координат. Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время, откладывая их на двух осях (рис. 2). Прямолиней-

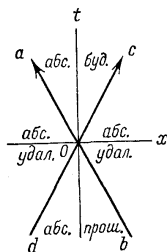


Рис. 2.

ное равномерное движение частицы, проходящей точку $x=0$ при $t=0$, изобразится прямой линией, проходящей через O и наклоненной к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая возможная скорость равна c , то

существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t . На рис. 2 изображены две прямые, изображающие распространение двух сигналов (со скоростью света) в противоположных направлениях, проходящих через событие O (т. е. проходящих $x=0$ при $t=0$). Все линии, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb . На прямых ab и cd , очевидно, $x=\pm ct$. Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области aOc . Легко сообразить, что во всех точках этой области $c^2t^2 - x^2 > 0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O — времениподобные. В этой области $t > 0$, т. е. все события этой области происходят «после» события O . Но два события, разделенных времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило «до» события O , т. е. когда было бы $t < 0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O , и притом во всех системах отсчета. Эту область можно поэтому назвать «абсолютно будущей» по отношению к событию O .

Совершенно аналогично все события области bOd являются «абсолютно прошедшими» по отношению к O , т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события O .

Наконец, рассмотрим еще области dOa и cOb . Интервал между любым событием этой области и событием O — пространственноподобный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать «абсолютно удаленными» по отношению к O . Понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события O , системы, где оно происходит раньше O , и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O .

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы «конус» $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ в четырехмерной системе координат x, y, z, t , ось которого совпадает с осью t (этот конус называют *световым конусом*). Области «абсолютно будущего» и «абсолютно прошедшего» изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже», что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx' = dy' = dz' = 0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

откуда

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3,1)$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $t_2 - t_1$:

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3,2)$$

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем* этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени

в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета K движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчета K' , связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами. И наоборот, с точки зрения системы K' отстают часы в системе K . Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того чтобы установить, что часы в системе K' отстают относительно часов в системе K , надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы K' пролетают мимо часов в K , и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов K и K' надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов K' с часами в K . Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в K — с теми, мимо которых часы K' пролетают в другой момент. При этом обнаружится, что часы K' будут отставать по сравнению с часами в K , с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчета необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обеим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчета.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные, теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, не движутся равномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчета не является инерциальной.

Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчета, то системы отсчета, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправильно.

Промежуток времени, показываемый часами, равен интегралу $\frac{1}{c} \int ds$, взятому вдоль мировой линии этих часов. Если часы неподвижны, то их мировая линия является прямой, параллельной оси времени; если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой мировой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения. С другой стороны, мы видели, что покоящиеся часы показывают

всегда больший промежуток времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int ds$, взятый между двумя заданными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берется по прямой мировой линии, соединяющей эти точки¹⁾.

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K , можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K' .

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t=t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси x и x' совпадают, оси y, z параллельны осям y', z' , движение вдоль осей x и x'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z' , а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройденное одной системой относительно другой; если начало отсчета времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V , то это расстояние есть Vt . Таким образом,

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (4,1)$$

Эти формулы называются *преобразованием Галилея*. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало, не удовлетворяет требованию теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские же формулы преобразования мы будем искать исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве x, y, z, ct . Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат.

¹⁾ Предполагается, разумеется, что эти точки и соединяющие их линии таковы, что все элементы ds вдоль линий времени подобны.

Указанное свойство интеграла связано с псевдоевклидовостью четырехмерной геометрии. В евклидовом пространстве интеграл был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.

нат и изменению момента начала отсчета времени. Таким образом, искомое преобразование должно математически выражаться как вращение четырехмерной системы координат x, y, z, t .

Всякое вращение в четырехмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, tx, ty, tz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy и xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости tx ; координаты y и z при этом не меняются. Это преобразование должно оставлять неизменной, в частности, разность $(ct)^2 - x^2$ — квадрат «расстояния» от точки (ct, x) до начала координат. Связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании дается в наиболее общем виде формулами

$$x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi, \quad ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi, \quad (4,2)$$

где ψ — «угол поворота»; простой проверкой легко убедиться, что при этом действительно будет $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$. Формулы (4,2) отличаются от обычных формул преобразования при повороте осей координат заменой тригонометрических функций гиперболическими. В этом проявляется отличие псевдоевклидовой геометрии от евклидовой.

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчета K к системе K' , которая движется относительно K со скоростью V вдоль оси x . При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координата x и время t . Поэтому это преобразование должно быть вида (4,2). Остается определить угол ψ , который может зависеть только от относительной скорости V ¹⁾.

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы отсчета K' . Тогда $x' = 0$ и формулы (4,2) принимают вид

$$x = ct' \operatorname{sh} \psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch} \psi,$$

или, разделив одно на другое,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th} \psi.$$

Но x/t есть, очевидно, скорость V системы K' относительно K . Таким образом,

$$\operatorname{th} \psi = \frac{V}{c}.$$

¹⁾ Во избежание недоразумений заметим, что через V мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчета, а через v — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Отсюда

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставив это в (4,2), находим:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4,3)$$

Это и есть искомые формулы преобразования. Они носят название формул *преобразования Лоренца* и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t , проще всего получают заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (4,3) относительно x', y', z', t' .

Легко видеть из (4,3), что при предельном переходе $c \rightarrow \infty$ к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При $V > c$ в формулах (4,3) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Невозможно даже использование системы отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (4,3) обратились бы в нуль.

Для скоростей V , малых по сравнению со скоростью света, вместо (4,3) можно пользоваться приближенными формулами

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2} x'. \quad (4,4)$$

Пусть в системе K покоится линейка, параллельная оси x . Длина ее, измеренная в этой системе, пусть будет $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 и x_1 — координаты обоих концов линейки в системе K). Найдем теперь длину этого стержня, измеренную в системе K' . Для этого надо найти координаты обоих концов стержня (x'_2 и x'_1) в этой системе в один и тот же момент времени t' . Из (4,3) находим:

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе K' есть $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; вычитая x_2 из x_1 ,

находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Собственной длиной стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Обозначим ее через $l_0 = \Delta x$, а длину того же стержня в какой-либо системе отсчета K' — через l . Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (4,5)$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью V , уменьшается в отношении $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Этот результат теории относительности называется *лоренцевым сокращением*.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объем $\mathcal{V}$ тела сокращается по аналогичной формуле:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (4,6)$$

где $\mathcal{V}_0$ есть *собственный объем* тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 3). Пусть в системе K' покоятся часы. В качестве двух событий возьмем два события, происшедших в одном и том же месте x' , y' , z' пространства в системе K' . Время в системе K' между этими событиями есть $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Найдем теперь время Δt , которое прошло между этими же событиями в системе отсчета K . Из (4,3) имеем:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (3,1).

Наконец, отметим еще одно общее свойство преобразований Лоренца, отличающее их от преобразований Галилея. Последние обладают, как говорят, свойством коммутативности, т. е. совместный результат двух последовательных преобразований Галилея (с различными скоростями V_1 и V_2) не зависит от порядка, в котором эти преобразования производятся. Напротив, результат двух

последовательных преобразований Лоренца зависит, вообще говоря, от их последовательности. Чисто математически это видно уже из использованного выше формального истолкования этих преобразований как вращений четырехмерной системы координат: как известно, результат двух поворотов (вокруг различных осей) зависит от порядка их осуществления. Исключением являются лишь преобразования с параллельными векторами V_1 и V_2 (эквивалентные поворотам четырехмерной системы координат вокруг одной и той же оси).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси x . Пусть $v_x = dx/dt$ есть компонента скорости в системе K , а $v'_x = dx'/dt'$ — компонента скорости той же частицы в системе K' .

Из (4,3) мы имеем:

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое и введя скорости

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad v' = \frac{dr'}{dt'},$$

находим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5,1)$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c \rightarrow \infty$ они переходят в формулы классической механики $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

В частном случае движения частицы параллельно оси x $v_y = v_z = 0$. Тогда $v'_y = v'_z = 0$, а $v'_x = v'$, причем

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}. \quad (5,2)$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть снова скорость, не бóльшая скорости света.

Для скоростей V , значительно меньших скорости света (скорость v может быть любой), имеем приближенно с точностью до членов порядка V/c :

$$v_x = v'_x + V \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2} \right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Эти три формулы можно записать в виде одной векторной формулы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \mathbf{v}') \mathbf{v}'. \quad (5,3)$$

Обратим внимание на то, что в релятивистский закон сложения скоростей (5,1) две складываемые скорости $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}$ входят несимметричным образом (если только обе они не направлены вдоль оси x). Это обстоятельство естественным образом связано с упомянутой в предыдущем параграфе некоммутативностью преобразований Лоренца.

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости xy . Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, а в системе K' имеем $v'_x = v' \cos \theta'$, $v'_y = v' \sin \theta'$ (v , v' и θ , θ' — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями x и x' соответственно в системах K и K'). С помощью формул (5,1) находим тогда:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}. \quad (5,4)$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчета, — явление, называемое *абберацией* света. В этом случае $v = v' = c$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{\frac{V}{c} + \cos \theta'}. \quad (5,5)$$

Из тех же формул преобразования (5,1) легко получить аналогичную зависимость для $\sin \theta$ и $\cos \theta$:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}. \quad (5,6)$$

В случае $V \ll c$ находим из (5,6) с точностью до членов порядка V/c :

$$\sin \theta - \sin \theta' = -\frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c} \sin \theta', \quad (5,7)$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырехмерные векторы

Совокупность координат события (ct, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i , где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четыремерным вектором* (4-вектором) A^i называется совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3 , которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i . При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (6,1)$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (6,2)$$

Величины A^i называют *контравариантными*, а A_i — *ковариантными* компонентами 4-вектора. Квадрат 4-вектора представится тогда в виде

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Такие суммы принято записывать просто как $A^i A_i$, опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ обозначения суммирования по, как говорят, *немым* индексам, очень удобен и значительно упрощает запись формул.

В этой книге мы будем обозначать четырехмерные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, латинскими буквами $i, k, l, \dots$

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде $A^i B_i$, так и в виде $A_i B^i$, — результат от этого не меняется. Вообще во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхний и нижний индексы ¹⁾.

Произведение $A^i B_i$ является 4-скаляром — оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно ²⁾, но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^i A_i$) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону.

Компоненту 4-вектора A^0 называют временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 — пространственными (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трех случаях говорят соответственно

¹⁾ В современной литературе часто опускают вообще индексы у четырехмерных векторов, а их квадраты и скалярные произведения записывают просто как A^2, AB . В этой книге, однако, мы не будем пользоваться таким способом обозначений.

²⁾ При этом надо помнить, что закон преобразования 4-вектора, выраженный через ковариантные компоненты, отличается (в знаках) от того же закона, выраженного в контравариантных компонентах. Так, вместо (6,1) будем, очевидно, иметь:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3.$$

о времениподобных, пространственноподобных и нулевых 4-векторах (снова по аналогии с терминологией для интервалов)¹⁾.

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^i составляют трехмерный вектор $\mathbf{A}$. Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, мы часто будем записывать их как

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора: $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$, а квадрат 4-вектора: $A^i A_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^i x_i = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2.$$

У трехмерных векторов (в координатах x, y, z) нет, конечно, необходимости различать контра- и ковариантные компоненты. Везде (где это не сможет привести к недоразумениям) мы будем писать их компоненты A_α ($\alpha = x, y, z$) с индексами внизу, обозначая эти индексы греческими буквами. В частности, по дважды повторяющимся греческим индексам будет подразумеваться суммирование по трем значениям x, y, z (например, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность 16 величин A^{ik} , которые при преобразовании координат преобразуются как произведение компонент двух 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные A^{ik} , ковариантные A_{ik} и смешанные A^i_k (в последнем случае надо, вообще говоря, различать A^i_k и A_i^k , т. е. следить за тем, какой именно — первый или второй — индекс стоит сверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак компоненты. Так:

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, & A_{01} &= -A^{01}, & A_{11} &= A^{11}, & \dots, \\ A^0_0 &= A^{00}, & A^0_1 &= A^{01}, & A^1_1 &= -A^{01}, & A^1_1 &= -A^{11}, \dots \end{aligned}$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент $A^{11}, A^{12}, \dots$ составляют трехмерный тензор. Три компоненты A^{01}, A^{02}, A^{03} и три компоненты A^{10}, A^{20}, A^{30} составляют трехмерные векторы, а компонента A^{00} является трехмерным скаляром.

Тензор A^{ik} называется симметричным, если $A^{ik} = A^{ki}$, и антисимметричным, если $A^{ik} = -A^{ki}$. У антисимметричного тензора все

¹⁾ Нулевые 4-векторы называют также *изотропными*.

диагональные компоненты (т. е. компоненты $A^{00}, A^{11}, \dots$) равны нулю, так как, например, должно быть $A^{00} = -A^{00}$. У симметричного тензора A^{ik} смешанные компоненты A^i_k и A_k^i очевидно, совпадают; мы будем писать в таких случаях просто A^i_k , располагая индексы один над другим.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, т. е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров «незаконно»; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора A^{ik} можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(при этом, конечно, $A^i_i = A_i^i$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра $A^i B_i$ из тензора $A^i B_k$. Вообще всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, A^i_{ki} есть тензор 2-го ранга, $A^i_k B^k$ — 4-вектор, A^{ik}_{ik} — скаляр и т. д.

Единичным 4-тензором называется тензор δ^k_i , для которого имеет место равенство

$$\delta^k_i A^i = A^k \quad (6,3)$$

при любом 4-векторе A^i . Очевидно, что компоненты этого тензора равны

$$\delta^k_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (6,4)$$

Его след: $\delta^i_i = 4$.

Поднимая у тензора δ^k_i один или опуская другой индекс, мы получим контра- или ковариантный тензор, который обозначают как g^{ik} или g_{ik} и называют *метрическим тензором*. Тензоры g^{ik} и g_{ik} имеют одинаковые компоненты, которые можно представить в виде таблицы:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6,5)$$

(индекс i нумерует строки, а индекс k — столбцы в порядке значений 0, 1, 2, 3). Очевидно, что

$$g_{ik}A^k = A_i, \quad g^{ik}A_k = A^i. \quad (6,6)$$

Скалярное произведение двух 4-векторов можно поэтому записать в виде

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \quad (6,7)$$

Тензоры δ_k^i , g_{ik} , g^{ik} исключительны в том отношении, что их компоненты одинаковы во всех системах координат. Таким же свойством обладает и совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга e^{iklm} . Так называется тензор, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все четыре индекса различны. Положим

$$e^{0123} = +1 \quad (6,8)$$

(при этом $e_{0123} = -1$). Тогда все отличные от нуля компоненты e^{iklm} равны $+1$ или -1 , смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 0, 1, 2, 3. Число таких компонент равно $4! = 24$. Поэтому

$$e^{iklm} e_{iklm} = -24. \quad (6,9)$$

По отношению к поворотам системы координат величины e^{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако при изменении знака у одной или трех координат компоненты e^{iklm} , будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e^{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. Псевдотензоры любого ранга, в частности псевдоскаляры, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Произведения $e^{iklm} e_{prst}$ образуют 4-тензор 8-го ранга, причем уже тензор истинный; упрощением по одной или нескольким парам индексов из него получаются тензоры 6-го, 4-го и 2-го рангов. Все эти тензоры имеют одинаковый вид во всех координатных системах. Поэтому их компоненты должны выражаться в виде комбинаций произведений компонент единичного тензора δ_k^i — единственного истинного тензора, компоненты которого во всех системах одинаковы. Эти комбинации легко составить, исходя из свойств

симметрии по отношению к перестановкам индексов, которыми они должны обладать ¹⁾).

Если A^{ik} — антисимметричный тензор, то тензор A^{ik} и псевдотензор $A^{*ik} = \frac{1}{2} \epsilon^{iklm} A_{lm}$ называются *дуальными* друг другу. Аналогично $\epsilon^{iklm} A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-го ранга, дуальный вектору A^i . Произведение $A^{ik} A_{ik}^*$ дуальных тензоров есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным напомним некоторые аналогичные свойства трехмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Отличны от нуля лишь компоненты e_{xyz} с тремя различными индексами. При этом полагаем $e_{xyz} = 1$; остальные же равны 1 или -1 , смотря по тому, четным или нечетным числом транспозиций можно привести последовательность α, β, γ к последовательности x, y, z ²⁾).

Произведения $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu}$ составляют истинный трехмерный тензор 6-го ранга и потому выражаются в виде комбинаций произведений компонент единичного трехмерного тензора $\delta_{\alpha\beta}$ ³⁾).

¹⁾ Приведем здесь для справок соответствующие формулы:

$$\epsilon^{iklm} e_{prst} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix}, \quad \epsilon^{iklm} e_{prsm} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix},$$

$$\epsilon^{iklm} e_{prlm} = -2(\delta_p^i \delta_r^k - \delta_r^i \delta_p^k), \quad \epsilon^{iklm} e_{pklm} = -6\delta_p^i.$$

Общие коэффициенты в этих формулах проверяются по результату полного свертывания, которое должно дать (6.9).

Как следствие первой из этих формул имеем:

$$\epsilon^{prst} A_{ip} A_{kr} A_{ls} A_{mt} = -A \epsilon_{iklm}, \quad \epsilon^{iklm} \epsilon^{prst} A_{ip} A_{kr} A_{ls} A_{mt} = 24A,$$

где A — определитель, составленный из величин A_{ik} .

²⁾ Неизменность компонент 4-тензора ϵ^{iklm} по отношению к вращениям 4-системы координат и неизменность компонент 3-тензора $e_{\alpha\beta\gamma}$ по отношению к вращениям пространственных осей координат являются частными случаями общего правила: всякий совершенно антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства, в котором он определен, инвариантен при вращениях системы координат в этом пространстве.

³⁾ Приведем для справок соответствующие формулы:

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Упрощая этот тензор по одной, двум и трем парам индексов, получим:

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

При отражении системы координат, т. е. при изменении знака всех координат, компоненты обычного трехмерного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют *полярными*. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются *аксиальными*. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным, а псевдоскаляром: при отражении координат оно меняет знак. Аксиальный вектор является псевдовектором, дуальным антисимметричному тензору. Так, если $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$, то

$$C_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad \text{где } C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

Вернемся к 4-тензорам. Пространственные ($i, k, \dots = 1, 2, 3$) компоненты антисимметричного 4-тензора A^{ik} составляют по отношению к чисто пространственным преобразованиям трехмерный антисимметричный тензор; согласно сказанному выше его компоненты выражаются через компоненты трехмерного аксиального вектора. Компоненты же A^{01}, A^{02}, A^{03} составляют, по отношению к тем же преобразованиям, трехмерный полярный вектор. Таким образом, компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы:

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (6,10)$$

причем по отношению к пространственным преобразованиям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$ — полярный и аксиальный векторы. Перечисляя компоненты антисимметричного 4-тензора, мы будем записывать их в виде

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

тогда ковариантные компоненты того же тензора

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных и интегральных операциях четырехмерного тензорного анализа.

4-градиент скаляра ϕ есть 4-вектор

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right).$$

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$$

тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и очевидно сделанное утверждение.

Вообще операторы дифференцирования по координатам x^i , $\partial/\partial x^i$, должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора — выражение $\partial A^i/\partial x^i$, в котором дифференцируются контравариантные компоненты A^i ¹⁾.

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве соответственно возможны четыре рода интегрирований.

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве. Элементом интегрирования является элемент длины, т. е. 4-вектор dx^i .

2) Интеграл по поверхности (двухмерной) в 4-пространстве. Как известно, в трехмерном пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, на координатные плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Аналогично в 4-пространстве бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором второго ранга $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$; его компоненты равны проекциям площади элемента на координатные плоскости. В трехмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности используется вектор df_α , дуальный тензору $df_{\alpha\beta} : df_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырехмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор

¹⁾ Если же производить дифференцирования по «ковариантным координатам» x_i , то производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\nabla \varphi \right)$$

составляют контравариантные компоненты 4-вектора. Мы будем пользоваться такой записью лишь в исключительных случаях (например, для записи квадрата 4-градиента $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$).

Упомянем, что в литературе часто используется краткая запись частных производных по координатам производных с помощью символов

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

В этой форме записи операторов дифференцирования явно проявляется контрариантный характер образуемых с их помощью величин. Таким же преимуществом обладает и другой применяемый способ краткой записи производных — посредством индексов после запятой:

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi^{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

df^{*ik} , дуальный тензору df^{ik} , т. е.

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \quad (6,11)$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и «нормальный» элементу df^{ik} ; все лежащие на нем отрезки ортогональны ко всем отрезкам на элементе df^{ik} . Очевидно, что $df^{ik} df_{ik}^* = 0$.

3) Интеграл по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию. В трехмерном пространстве объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен, как известно, определителю третьего порядка, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве аналогичным образом выражаются проекции объема «параллелепипеда» (т. е. «площади» гиперповерхности), построенного на трех 4-векторах dx^i, dx'^i, dx''^i ; они даются определителями

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

составляющими тензор 3-ранга, антисимметричный по трем индексам. В качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться 4-вектором dS^i , дуальным тензору dS^{ikl} :

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = e_{nklm} dS^n. \quad (6,12)$$

При этом

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \dots$$

Геометрически dS^i — 4-вектор, по величине равный «площади» элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (т. е. перпендикулярный ко всем прямым, проведенным в элементе гиперповерхности). В частности, $dS^0 = dx dy dz$, т. е. представляет собой элемент трехмерного объема dV — проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость $x^0 = \text{const}$.

4) Интеграл по четырехмерному объему; элементом интегрирования является произведение дифференциалов:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV. \quad (6,13)$$

Этот элемент является скаляром: очевидно, что объем участка 4-пространства не меняется при повороте системы координат¹⁾.

¹⁾ При преобразовании переменных интегрирования x^0, x^1, x^2, x^3 к новым переменным x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 элемент интегрирования $d\Omega$ заменяется, как известно, на $J d\Omega'$, где $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$, а

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

— якобиан преобразования. Для линейного преобразования вида $x'^i = a^i_k x^k$ якобиан J совпадает с определителем $|\alpha^i_k|$ и равен (для поворотов системы координат) единице; в этом и проявляется инвариантность $d\Omega$.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трехмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы.

Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования dS_i на оператор:

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (6,14)$$

Например, для интеграла от вектора A^i имеем:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \quad (6,15)$$

Эта формула является обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по двумерной поверхности преобразуется в интеграл по «охватываемой» ею гиперповерхности заменой элемента интегрирования df_{ik}^* на оператор:

$$df_{ik}^* \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (6,16)$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A^{ik} имеем:

$$\frac{1}{2} \int A^{ik} df_{ik}^* = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \quad (6,17)$$

Интеграл по четырехмерной замкнутой линии преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путем замены

$$dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6,18)$$

Так, для интеграла от вектора имеем:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right), \quad (6,19)$$

что является обобщением теоремы Стокса.

Задачи

1. Найти закон преобразования компонент симметричного 4-тензора A^{ik} при преобразовании Лоренца (6,1).

Решение. Рассматривая компоненты 4-тензора как произведения двух компонент 4-вектора, получим:

$$A^{00} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{00} + 2 \frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{11} \right),$$

$$A^{11} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{11} + 2 \frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{00} \right),$$

$$A^{22} = A'^{22}, \quad A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02} \right),$$

$$A^{01} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[A'^{01} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{V}{c} A'^{00} + \frac{V}{c} A'^{11} \right],$$

$$A^{02} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12} \right)$$

и аналогичные формулы для A^{33} , A^{13} , A^{03} .

2. То же для антисимметричного тензора A^{ik} .

Решение. Поскольку координаты x^2 , x^3 не меняются, то не меняется и компонента тензора A^{23} , а компоненты A^{12} , A^{13} и A^{02} , A^{03} преобразуются как x^1 и x^0 :

$$A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

и аналогично для A^{13} , A^{03} .

По отношению к поворотам двумерной системы координат в плоскости $x^0 x^1$ (каковыми являются рассматриваемые преобразования) компоненты $A^{01} = -A^{10}$, $A^{00} = A^{11} = 0$ составляют антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства. Поэтому (см. примечание на стр. 33) при преобразованиях эти компоненты не меняются:

$$A^{01} = A'^{01}.$$

§ 7. Четырехмерная скорость

Из обычного трехмерного вектора скорости можно образовать и четырехмерный вектор. Такой *четырёхмерной скоростью* (4-скоростью) частицы является вектор

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (7,1)$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3,1)

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где v — обычная трехмерная скорость частицы. Поэтому

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и т. п. Таким образом:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (7,2)$$

Отметим, что 4-скорость есть величина безразмерная.

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx^i dx^i = ds^2$, имеем:

$$u^i u_i = 1. \quad (7,3)$$

Геометрически u^i есть единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы.

Аналогично определению 4-скорости, вторую производную

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

можно назвать 4-ускорением. Дифференцируя соотношение (7,3), найдем:

$$u_i w^i = 0, \quad (7,4)$$

т. е. 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

Задача

Определить релятивистское равноускоренное движение, т. е. прямолинейное движение, при котором остается постоянной величина ускорения w в собственной (в каждый данный момент времени) системе отсчета.

Решение. В системе отсчета, в которой скорость частицы $v=0$, компоненты 4-ускорения равны $w^i = (0, w/c^2, 0, 0)$ (w — обычное трехмерное ускорение, направленное вдоль оси x). Релятивистски инвариантное условие равноускоренности должно быть представлено в виде постоянства 4-скаляра, совпадающего с w^2 в собственной системе отсчета:

$$w^i w_i = \text{const} = -\frac{w^2}{c^4}.$$

В «неподвижной» системе отсчета, относительно которой рассматривается движение, раскрытие выражения $w^i w_i$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = w, \quad \text{или} \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = wt + \text{const}.$$

Полагая $v=0$ при $t=0$, имеем $\text{const}=0$, так что

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}}}.$$

Интегрируя еще раз и полагая $x=0$ при $t=0$, получим:

$$x = \frac{c^2}{w} \left(\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

При $wt \ll c$ эти формулы переходят в классические выражения $v = wt$, $x = wt^2/2$.

При $wt \rightarrow \infty$ скорость стремится к постоянному значению c .

Собственное время равноускоренно движущейся частицы дается интегралом

$$\int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{c}{w} \text{Arsh} \frac{wt}{c}.$$

При $t \rightarrow \infty$ оно растет по значительно более медленному чем t закону $\frac{c}{w} \ln \frac{2wt}{c}$.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 8. Принцип наименьшего действия

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Этот принцип заключается в том, что для всякой механической системы существует такой интеграл S , называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS которого, следовательно, равна нулю ¹⁾.

Определим интеграл действия для свободной материальной частицы, т. е. частицы, не находящейся под действием каких-либо внешних сил.

Для этого заметим, что этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. он должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или αds , где α — некоторая постоянная.

Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где интеграл берется вдоль мировой линии между двумя заданными событиями a и b — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты времени t_1 и t_2 , т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу. Легко видеть, что для всех частиц α должна

¹⁾ Строго говоря, принцип наименьшего действия утверждает, что интеграл S должен быть минимален лишь вдоль малых участков линии интегрирования. Для линий произвольной длины можно утверждать только, что S имеет экстремум, не обязательно являющийся минимумом (см. I § 2).