

**Студенческие
олимпиады по алгебре
на мехмате МГУ**

МЦНМО

Студенческие олимпиады по алгебре на мехмате МГУ

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 512
ББК 22.14
С88

Авторский коллектив:

И. В. Аржанцев, В. В. Батырев, Е. И. Бунина, Е. С. Голод, А. Э. Гутерман,
М. В. Зайцев, А. И. Зобнин, А. А. Клячко, В. Т. Марков, А. А. Нечаев,
А. Ю. Ольшанский, Е. А. Поршневу, Ю. Г. Прохоров.

Редакционная коллегия:

И. В. Аржанцев, В. А. Артамонов, Е. И. Бунина, Э. Б. Винберг,
С. А. Гайфуллин, Е. С. Голод, А. Э. Гутерман, М. В. Зайцев, А. И. Зобнин,
А. А. Клячко, В. Н. Латышев, В. Т. Марков, О. В. Маркова, А. В. Михалев,
А. Ю. Ольшанский, Ю. Г. Прохоров, Д. А. Тимашев, И. А. Чубаров,
А. Л. Шмелькин.

Студенческие олимпиады по алгебре на мехмате МГУ.

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2015

68 с.

ISBN 978-5-4439-2305-5

Студенческие олимпиады по алгебре проводятся на мехмате МГУ с 2006 г. В книге собраны условия и решения задач этой олимпиады с 2006 по 2010 г. Многие задачи, использованные на олимпиадах, являются оригинальными, другие взяты из книг, научных статей и математического фольклора.

Книга предназначена для школьников старших классов математического профиля, студентов и аспирантов.

Подготовлено на основе книги: *И. В. Аржанцев и др. Студенческие олимпиады по алгебре на мехмате МГУ.* — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2305-5

© Авторский коллектив, 2015.
© МЦНМО, 2015.

О волшебных кольцах и угрюмых элементах

Студенческая олимпиада по алгебре впервые была проведена в 2006 году по инициативе Ивана Владимировича Аржанцева, которого горячо поддерживали все сотрудники кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. На первую же олимпиаду пришло около 140 студентов 1—2 курсов, то есть интерес был проявлен немалый. Тогда на кафедре алгебры решили, что такую олимпиаду нужно проводить каждый год. В декабре 2010 года олимпиада прошла пятый, юбилейный раз. Теперь мы можем называть ее традиционной. С 2009 года параллельно с очным туром проводится интернет-тур, в котором принимают участие студенты из университетов России, а также Армении, Белоруссии, Казахстана и Украины.

Надеемся, что читателям небезынтересно будет узнать «механику» организации и проведения олимпиад. На первом этапе сотрудники и аспиранты кафедры высшей алгебры предлагают задачи, которые кажутся им достойными участия в олимпиаде. В октябре список задач-кандидатов раздается членам кафедры. При работе со списком соблюдается режим секретности, в частности, задачи из списка не обсуждаются со студентами. В результате рейтингового голосования формируется вариант олимпиады, содержащий восемь задач. Коллективу кафедры формирование варианта каждый год дается нелегко. Так, сейчас в списке около семидесяти задач, многие из них нестандартны и сложны. Решить и оценить по достоинству все задачи в середине семестра преподавателям трудно. Отметим самоотверженность Эрнеста Борисовича Винберга: не жалея времени, Эрнест Борисович ежегодно решает все задачи и очень точно формулирует достоинства и недостатки каждой из них.

Многие из задач, использованные на олимпиадах, являются оригинальными, другие взяты из книг, научных статей и математического фольклора. В этом сборнике мы не пытаемся разделить эти категории, а только указываем, кто предложил включить данную задачу в список кандидатов и по возможности ссылаемся на первоисточник. К каждой задаче дано одно или несколько исчерпывающих решений. Многие решения снабжены упражнениями и ссылками на литературу в развитие сюжета задачи.

Оказалось, что для того, чтобы предложить задачу для олимпиады, требуется особый талант. Если вы просмотрите варианты всех пяти лет, собранные в этой книжке, то в каждом из них без труда отличите задачи с оригинальными формулировками: здесь фигуриру-

ют и волшебные кольца, и угрюмые элементы, и нежные матрицы, и пресловутый студент Д. Все эти задачи предложил Антон Александрович Клячко.

На заседании кафедры перед первой олимпиадой обсуждался вопрос о формах поощрения победителей, например, экзамен по алгебре «автоматом». Когда такие предложения были отвергнуты, возникли сомнения: а придут ли студенты на олимпиаду? Оказалось, что придут, — ежегодно в олимпиаде участвуют более 100 студентов. Помимо мехматян, решать задачи приходят представители других факультетов МГУ, в 2009 году два диплома второй степени получили студенты Высшей школы экономики, а в 2010-м первую премию получил студент МФТИ.

В олимпиаде могут принять участие все желающие. Все студенты решают одни и те же задачи, но результаты первокурсников оцениваются отдельно. Во время решения задач не обходится без курьезов. Так, в 2006 году через два часа после начала олимпиады один из участников сдал работу со словами «Да разве это олимпиада...» и ушел. На присутствующих преподавателей это не произвело особого впечатления, им часто приходится сталкиваться с уверенными в себе студентами. Однако после того, как работы победителей были раскодированы, оказалось, что ушедший Александр Ефимов и в самом деле решил все задачи. Этот опыт был учтен при составлении варианта следующего года. С тех пор Саша сам олимпиады по алгебре не пишет, зато активно помогает нам при проверке работ. Когда на второй олимпиаде выяснилось, что студенты написали заметно хуже, мы очень ругали Сашу (в шутку, конечно), поскольку задания второй олимпиады были сделаны значительно более трудными во многом из-за Сашиной «слишком хорошей» работы. В 2009 году Саша стал лауреатом федеральной премии «Прорыв». Сейчас он уже защитил диссертацию и является сотрудником Математического института имени Стеклова Российской академии наук.

Четыре часа, отведенные на решение задач, пробегают быстро, и теперь дело за малым — надо проверить более сотни работ и выбрать из них работы-победители. Учтите, что большинство участников увлечены поиском решений и уделяют мало внимания их оформлению. Благодаря самоотверженной работе сотрудников, аспирантов и студентов кафедры алгебры и организационному таланту Елены Игоревны Буниной все работы удастся проверить за один день. Обычно все желающие участвовать в проверке встречаются в какой-нибудь свободной аудитории мехмата в субботу

днем и до самого вечера проверяют работы. В проверке участвуют человек 30 — это и преподаватели кафедры алгебры, и аспиранты, и студенты старших курсов, которые учатся на кафедре, чаще всего призеры олимпиад прошлых лет. Проверка олимпиады — это работа хоть и сложная, но приятная: она очень объединяет коллектив кафедры. Ещё более приятной и радостной эту работу позволяют сделать пицца, соки, орехи и другая полезная еда, закупаемая на средства, любезно предоставляемые ООО «Яндекс». Чтобы избежать невольной необъективности, работы проверяются в «зашифрованном» виде, то есть проверяющие не знают, чьи работы они проверяют. Однако к неудовольствию Ивана Владимировича выяснилось, что преподаватели нередко способны узнать своих студентов по почерку, а может, даже и по образу мышления.

А потом — награждение победителей, поздравления заведующего кафедрой Виктора Николаевича Латышева, грамоты и ценные призы. В качестве призов мы используем математические книги, часть из которых нам предоставляет бесплатно Московский центр непрерывного математического образования, а часть покупается на средства, выделяемые международной компанией Mentor Graphics Corporation, которая спонсирует и другие мелкие расходы (тетрадки, рассылку призов в другие города). Мы искренне надеемся, что олимпиада помогает студентам отвлечься от рутины семестра и оценить красоту нашей науки.

Но почему бы не дать такую возможность и другим? Идея предложить решать задачи олимпиады дистанционно и высылать решения через Интернет возникла еще в начале 2009 года. Ее поддержал Александр Васильевич Михалев. Для успешного проведения интернет-тура много сделали Александр Эмилевич Гутерман и Алексей Игоревич Зобнин. Учитывая, что участники тура живут в разных часовых поясах, решения принимались с момента начала очного тура до 9 утра следующего дня.

Подробнее узнать об олимпиаде можно на сайте

<http://mech.math.msu.su/algebra/Olympiad>

Условия задач

Первая олимпиада (8 декабря 2006 года)

1. Элементов какого порядка в группе S_n больше: четного или нечетного?

2. Студенту Д. задали на дом решить все системы из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными над полем из пяти элементов (всего 5^{30} систем). Сколько из этих систем являются совместными? Сколько являются определенными?

3. Пусть F — поле, $M_n(F)$ — пространство матриц размера $n \times n$ над F и

$$T: M_n(F) \rightarrow M_n(F)$$

— линейное отображение, такое, что $\det(A) = \det(T(A))$ для любой $A \in M_n(F)$. Докажите, что отображение T обратимо.

4. Студент Д. называет квадратную вещественную матрицу A *практически обратимой*, если найдется такая матрица B , что элементы матрицы $C = AB$ отличаются от соответствующих элементов единичной матрицы не более чем на 10^{-10} :

$$|c_{ij} - \delta_{ij}| \leq \frac{1}{10000000000} \quad \text{для всех } i, j.$$

Существуют ли практически обратимые необратимые матрицы?

5. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — однородный многочлен степени k с комплексными коэффициентами. Докажите, что для некоторого натурального m найдутся такие линейные многочлены $L_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$, $j = 1, \dots, m$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = L_1^k + \dots + L_m^k.$$

6. Студент Д. называет поле *практически алгебраически замкнутым*, если в этом поле каждый многочлен положительной степени, не превосходящей 10000000000, имеет корень. Может ли практически алгебраически замкнутое поле

а) быть конечным?

б) не быть алгебраически замкнутым?

7. Пусть конечная группа G транзитивно действует на конечном множестве X , содержащем более одного элемента. Может ли каждый элемент группы G иметь в X неподвижную точку?

8. Для каких натуральных n существует группа из n элементов, у которой ровно четыре силовские (неединичные) подгруппы?

Решения задач

Первая олимпиада

2006-1. Элементов какого порядка в группе S_n больше: четного или нечетного? (Предложил А. Э. Гутерман.)

РЕШЕНИЕ. При $n = 2, 3$ легко убедиться, что подстановок четного и нечетного порядка одинаковое число. Пусть $n \geq 4$. Заметим, что все нечетные подстановки имеют четный порядок: действительно, нечетная подстановка в нечетной степени нечетна, следовательно, не может быть равна тождественной — четной подстановке. Кроме того, существуют четные подстановки четного порядка, например, $(12)(34)$. Так как четных и нечетных подстановок одинаковое количество, отсюда следует, что при $n \geq 4$ подстановок четного порядка больше.

УПРАЖНЕНИЕ. Каких подстановок в S_n больше: являющихся квадратами или не являющихся квадратами?

2006-2. Студенту Д. задали на дом решить все системы из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными над полем из пяти элементов (всего 5^{30} систем). Сколько из этих систем является совместными? Сколько является определенными? (Предложил А. А. Клячко.)

РЕШЕНИЕ. Пусть

b_k — число упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов в $\mathbb{Z}_5^5$;

b'_k — число упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов в $\mathbb{Z}_5^k$;

p_k — число подпространств размерности k в $\mathbb{Z}_5^5$;

R_V — число матриц в $M_5(\mathbb{Z}_5)$, у которых линейная оболочка столбцов порождает подпространство V в $\mathbb{Z}_5^5$;

r_k — число матриц ранга k в $M_5(\mathbb{Z}_5)$;

s_k — число совместных систем ранга k из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными над $\mathbb{Z}_5$.

Тогда

$$b_k = \prod_{i=0}^{k-1} (5^5 - 5^i).$$

(Здесь и везде произведение пустого множества сомножителей считается равным единице.)

В самом деле, первый вектор линейно независимого набора может быть любым ненулевым вектором ($5^5 - 1$ возможность); вто-

Оглавление

О волшебных кольцах и угрюмых элементах	3
Условия задач	
Первая олимпиада (8 декабря 2006 года)	6
Вторая олимпиада (26 ноября 2007 года)	7
Третья олимпиада (14 ноября 2008 года)	8
Четвертая олимпиада (2 декабря 2009 года)	9
Пятая олимпиада (3 декабря 2010 года)	10
Решения задач	
Первая олимпиада	12
Вторая олимпиада	19
Третья олимпиада	31
Четвертая олимпиада	46
Пятая олимпиада	55
Победители и призеры олимпиад	63
Статистика решений задач	66