САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. И. Веремей

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ МНОГОЦЕЛЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Учебное пособие

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. И. Веремей

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ МНОГОЦЕЛЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 517.977:519.71(075)
ББК 22.18я73
В31

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор *В. М. Корчанов* (НПО «Аврора»),
д-р техн. наук, профессор *М. В. Ульянов* (ИПУ РАН)

Рекомендовано в печать
Учебно-методической комиссией факультета ПМ–ПУ
Санкт-Петербургского государственного университета

Веремей Е. И.

В31 Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2016. — 408 с.
ISBN 978-5-288-05662-8

В учебном пособии рассматривается совокупность вопросов, относящихся к проблеме анализа и синтеза математических моделей оптимальных управляющих устройств для динамических объектов, функционирующих в условиях воздействия случайных возмущений и характеризующихся величиной среднеквадратичного функционала. Целью учебного пособия является формирование у обучающихся устойчивых навыков построения алгоритмического и программного обеспечения, предназначенного для реализации соответствующего математического аппарата с использованием современных информационных и компьютерных технологий.

Издание рекомендовано для студентов программ бакалавриата по направлению «Прикладная математика и информатика» и магистратуры по направлению «Фундаментальные информатика и информационные технологии». Представляет значительный интерес для специалистов в области управления подвижными объектами.

ББК 22.18я73

ISBN 978-5-288-05662-8

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития математических методов и моделей, используемых при исследовании, проектировании и практической реализации систем автоматического управления техническими объектами, характеризуется исключительной ориентацией на широкое применение различных средств вычислительной техники. Особое внимание уделяется поиску законов управления, анализу устойчивости и качества динамических процессов в синтезируемых системах, их технической реализации на базе цифровых и аналоговых элементов. В зависимости от круга проблем и от класса вычислительных средств, на которые возлагается их решение, осуществляется необходимая адаптация существующих или разработка новых математических методов и применяемых математических моделей. При этом актуальность соответствующих исследований в первую очередь определяется стремлением к повышению вычислительной эффективности, а следовательно, к уменьшению сроков выполнения необходимых работ и улучшению их качества.

Исключительно широкое распространение в теоретических исследованиях и практических приложениях получила теория аналитического синтеза законов управления (регуляторов) для динамических управляемых объектов. Основы соответствующих подходов были разработаны в трудах А. М. Лётова, В. И. Зубова, А. А. Красовского, В. В. Солодовникова, В. С. Пугачёва, Н. Винера, Р. Калмана и многих других исследователей.

В частности, заслуженной популярностью пользуется теория синтеза оптимальных регуляторов, обеспечивающих минимум среднеквадратичных функционалов для линейных динамических объектов, подверженных воздействию стационарных внешних возмущений случайного характера.

Большой вклад в становление и развитие математических методов по данному направлению внесли В. В. Солодовников [121–123], В. С. Пугачёв [109, 110], А. А. Красовский [79, 80], А. А. Первозванский [102, 103], Ю. П. Петров [104–107], Х. Квакернаак [75, 143].

Существенные результаты в рамках данной проблемы, создавшие почву для дальнейших исследований, приведены в таких известных работах, как [4, 85–87, 125, 61, 74, 95, 100, 101, 132, 133, 137].

Необходимо отметить, что, как и все подходы, находящиеся в рамках линейно-квадратичной гауссовской проблемы, среднеквадратичная оптимизация является сравнительно грубым математическим аппаратом анализа и синтеза динамических систем. Однако этот подход исключительно широко распространён в силу своей достаточной адекватности (как комплекса математических моделей) объективной реальности, что подтверждается богатым опытом его практического применения. Даже в самых сложных случаях среднеквадратичная оптимизация даёт определённую информацию о свойствах объекта, которая может быть полезной при использовании более тонких и глубоких методов теории управления.

Теоретическая и практическая значимости среднеквадратичного оптимального синтеза, при относительной грубости и простоте его математического аппарата, с очевидностью определяют выбор класса средств вычислительной техники для реализации соответствующих методов и вычислительных алгоритмов. В качестве таковых целесообразно применять современные персональные компьютеры, вычислительные ресурсы которых (при соответствующей ориентации математического обеспечения) вполне достаточны для указанной цели. Привлечение компьютеров, которые широко распространены в настоящее время, может позволить с максимальной эффективностью использовать среднеквадратичную оптимизацию в научных исследованиях и конструкторских разработках.

Тем не менее известные методы среднеквадратичного оптимального синтеза не ориентированы на широкое применение в условиях вычислительной поддержки средствами малой мощности. Привлечение классической среднеквадратичной оптимизации при выполнении реальных научных и технических проектов в значительной мере затрудняется (а в ряде случаев становится невозможным) из-за ряда объективных трудностей, которые можно разделить на две группы:

- трудности реализации методов (алгоритмов) оптимального синтеза на базе современных средств вычислительной техники;

- трудности реализации результатов оптимального синтеза (математических моделей оптимальных регуляторов) с помощью реальных технических устройств.

Эти трудности обусловлены определёнными недостатками существующих подходов к решению проблем среднеквадратичной оптимизации, основными из которых, на взгляд автора, являются следующие.

1. Несовершенство формы представления (чаще всего — алгоритмического) результата синтеза — передаточной матрицы оптимального регулятора, что существенно затрудняет проведение аналитических исследований свойств оптимальных решений.
2. Относительная сложность расчётных схем, обеспечивающих поиск оптимальных решений даже в простейших случаях задания множества допустимых альтернатив. Это значительно препятствует широкому внедрению этих схем в практические разработки, требующему многократного уточнения математических моделей, перебора возможных вариантов ситуаций и, соответственно, многократного повторения решения задачи синтеза. Особо значимы вопросы, связанные с применением расчетных алгоритмов при адаптивной перенастройке законов управления в режиме реального времени, требующие всемерной экономии вычислительных ресурсов.
3. Отсутствие аналитического решения (в частотной области) задач оптимизации с возмущениями, матрицы спектральных плотностей которых имеют неполный ранг. Как известно, к этим задачам сводится большое количество проблем управления подвижными объектами.
4. Недостаточная изученность возможности неединственности оптимальных регуляторов — общих условий, которым они удовлетворяют, и связей между ними, что затрудняет процесс поиска наиболее простых решений, обеспечивающих экстремум среднеквадратичных функционалов.
5. Неполная исследованность вопроса о поиске решения задачи среднеквадратичного синтеза на множестве альтернатив с неполной информацией, отсутствие условий совпадения экстремумов при наличии и отсутствии полной информации о векторе состояния объекта.

6. Сложность проведения анализа структурных особенностей оптимальных регуляторов по исходным данным без непосредственного решения задачи синтеза, недостаточная исследованность вопроса о физической реализуемости передаточных матриц оптимальных регуляторов.
7. Недостаточная разработанность оценочного подхода к среднеквадратичной оптимизации, отсутствие легко вычисляемых оценок сверху и снизу как для экстремума функционала в целом, так и для его отдельных слагаемых. Как известно, в ряде ситуаций такие оценки могут играть весьма важную роль в повышении практической эффективности оптимизации.
8. Отсутствие легко реализуемых алгоритмов синтеза на допустимых множествах, определяемых дополнительными (по отношению к устойчивости) требованиями и ограничениями, которые задают многоцелевую направленность среднеквадратичной оптимизации.
9. Наличие объективной возможности потери устойчивости оптимальной замкнутой системы при сколь угодно малых вариациях ее параметров, что в соответствующих ситуациях делает невозможной практическую реализацию решения задачи синтеза.
10. Отсутствие достаточно разработанных подходов (исключая параметрический синтез) к поиску оптимальных варьируемых элементов в передаточных матрицах регуляторов частично фиксированной структуры.
11. Недостаточная исследованность вопроса об учёте особенностей среднеквадратичного синтеза в конкретных приложениях, в частности при проектировании и исследовании систем управления морскими подвижными объектами.

Перечисленные недостатки известных подходов к решению проблем, связанных со среднеквадратичным синтезом, определяют потребность в дальнейшем развитии теории и построении на её основе соответствующего алгоритмического и программного обеспечений. Эти же недостатки можно отнести и к учебно-методической литературе, посвященной теории среднеквадратичной оптимизации и ее приложениям для решения практических задач аналитического проектирования систем управления.

В связи с отмеченными обстоятельствами целью данного учебного пособия служит доступное представление исследований, направленных на развитие математических методов среднеквадратичной оптимизации динамических объектов. Эти методы априорно ориентированы на выполнение комплекса требований, предъявляемых к синтезируемым регуляторам, исходя из позиций необходимости реализации на базе технических устройств, описываемых найденными в процессе синтеза математическими моделями. Целью пособия является также предоставление алгоритмического обеспечения полученных методов, предназначенного для реализации соответствующего математического аппарата в виде программ для современных персональных компьютеров малой мощности.

При этом основное внимание в учебном пособии уделяется следующим вопросам.

1. Представление новой техники поиска оптимального решения задачи в классической постановке (на множестве устойчивости замкнутой линейной системы), позволяющей построить эффективные вычислительные алгоритмы и представить решение в удобной для исследований форме.
2. Изучение (на базе принятого представления) особенностей и свойств оптимальных регуляторов для малоисследованных вариантов постановки задачи синтеза с возмущениями неполного ранга и разработка методов поиска этих регуляторов.
3. Построение системы оценок экстремального значения среднеквадратичного функционала сверху и снизу, позволяющих судить об эффективности оптимизации без непосредственного решения задачи синтеза и принимать необходимые меры по её повышению.
4. Разработка комплекса методов и реализующих их алгоритмов, предназначенных для решения задачи среднеквадратичного синтеза в многоцелевой постановке, определяемой различными вариантами (локальными и комплексными) сужения допустимого множества регуляторов по сравнению с их стабилизирующей совокупностью.
5. Рассмотрение общих принципов и конкретных вариантов применения предлагаемого математического и алгоритмического аппарата в интегрированных комплексах автоматизации научных исследований и проектирования систем управления.
6. Адаптация подхода, принятого в работе, к решению задач управления движением морских подвижных объектов различ-

ных типов с модификацией методов и алгоритмов, учитывающей специфику конкретной ситуации.

Учебное пособие состоит из введения, десяти глав, заключения и списка литературы, включающего 167 наименований.

Глава 1 является вводной. Она посвящена обсуждению двух центральных проблем, рассматриваемых в учебном пособии, связанных с реализуемостью методов поиска и искомого результата. Приводится краткий обзор научных публикаций по теме исследований и дается общая формулировка решаемых в учебном пособии задач.

В *главе 2* рассматривается задача среднеквадратичного оптимального синтеза в классической постановке, когда решение ищется на множестве передаточных матриц регуляторов, обеспечивающих гурвицевость характеристического полинома замкнутой системы. Основу главы составляет обоснование предлагаемого спектрального подхода к технике поиска оптимального решения и его конкретизация для различных вариантов постановок задачи.

Глава 3 посвящена исследованию проблемы среднеквадратичного синтеза на множестве обратных связей с неполной информацией о векторе состояния объекта управления. Особое внимание уделяется задаче синтеза со скалярным возмущением, для которой подробно рассматривается вопрос о возможности совпадения экстремумов на множестве решений с полной и неполной информацией.

В *главе 4* исследуются структурные особенности передаточных матриц оптимальных регуляторов. Для задач синтеза с единственным решением выводятся формулы для степеней числителей и знаменателей компонент этих матриц. В случае неединственности решения рассматривается вопрос об ограничениях на выбор степеней, назначаемых априорно.

Глава 5 учебного пособия содержит материал, связанный с оценочными подходами к среднеквадратичной оптимизации. Основное внимание уделяется разработке методов построения оценок оптимума минимизируемого функционала снизу, гарантированных оценок в условиях неопределённости спектра возмущения и оценок качества аппроксимации алгоритмически заданной спектральной плотности.

В *главе 6* рассматриваются предельные возможности среднеквадратичной оптимизации. Исследуется зависимость точности оптимальных замкнутых систем от интенсивности работы управления. Выводятся формулы для оценок сверху и снизу указанных характеристик, позволяющие без непосредственного решения задачи синтеза провести анализ динамических свойств системы.

Глава 7 посвящена ряду вопросов, касающихся оптимизации нестационарных режимов движения динамических объектов. Соответствующие исследования формируют основу для учёта ограничений, определяемых нестационарными режимами, в среднеквадратичном многоцелевом синтезе.

Глава 8 посвящена минимизации среднеквадратичных функционалов на допустимых множествах, которые сужены по отношению к области устойчивости за счёт введения дополнительных локальных требований к свойствам синтезируемой системы. В центре внимания находится учёт модальных ограничений, динамических ограничений на качество нестационарных режимов, требований физической реализуемости и сохранения устойчивости при малых вариациях параметров.

В *главе 9* на примере конкретных проблем управления морскими подвижными объектами рассматриваются общие концепции и разрабатываются отдельные методы и алгоритмы среднеквадратичного синтеза в многоцелевой постановке. В известной мере главу можно трактовать как итоговую, поскольку в ней используются все основные результаты теоретических исследований и разработок, проведенных в учебном пособии.

Глава 10 посвящена формированию идеологии автоматизированного синтеза законов управления морскими судами, движущимися в горизонтальной плоскости (авторулевыми) в условиях морского волнения. Алгоритмическая и программная поддержка системы целиком построена на базе материалов предыдущих глав учебного пособия.

Глава 1

МНОГОЦЕЛЕВОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЙ СИНТЕЗ И ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗУЕМОСТИ

Данная глава определяет общий круг вопросов, рассматриваемых в учебном пособии. Эти вопросы касаются двух центральных проблем, которые в тех или иных формах и объёмах всегда учитываются при практическом применении математических методов и алгоритмов теории управления в научных исследованиях и проектировании управляемых систем.

Первая проблема обусловлена необходимостью реализации соответствующего математического обеспечения в форме алгоритмической и программной поддержки на современных вычислительных средствах определённых классов, обладающих в ряде случаев существенно ограниченными ресурсами.

Вторая проблема связана с необходимостью реализации результатов решения математических задач, получаемых в виде математических моделей управляющих систем, на базе конкретных технических устройств с широким спектром различных условий, ограничений и требований.

Учёт этих проблем можно осуществлять тремя путями: выбором соответствующего математического аппарата в рамках известных подходов; выбором необходимых средств вычислительной техники; разработкой специализированных математических методов поиска решений, удовлетворяющих условиям реализации.

В учебном пособии в качестве основы принят третий путь как наиболее адекватно отражающий специфику идеологии среднеквадратичной оптимизации.

В связи с этим основное содержание главы составляет обоснование принятого подхода к учёту проблем реализуемости. Приводится общая формулировка решаемых в учебном пособии математических задач и дается краткая библиографическая справка по теме учебного пособия.

1.1. Алгоритмы среднеквадратичного синтеза и их реализуемость

Среднеквадратичный оптимальный синтез является одним из способов аналитического конструирования линейных законов управления, формируемых в виде обратных связей для придания необходимых свойств соответствующей замкнутой системе.

Формализуем это понятие, введя в рассмотрение комплекс математических моделей, используемых в учебном пособии.

В качестве моделей *объектов* управления далее будем принимать системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}(t, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\varphi}), \tag{1.1}$$

заданных на положительной полуоси времени $t \in [0, \infty)$. Здесь $\overline{\mathbf{x}} \in E^n$ — вектор состояния, $\overline{\mathbf{u}} \in E^m$ — вектор управлений, $\overline{\varphi} \in E^l$ — вектор возмущений, действующих на объект. Будем считать, что $\mathbf{F}$ — это n-мерная векторная функция с непрерывно дифференцируемыми компонентами по совокупности аргументов.

Наряду с объектом (1.1) введем в рассмотрение понятие *регулятора* как иного динамического объекта, определяющего обратную связь в замкнутой системе управления. Для уточнения этого понятия и представления его математической модели в форме, принятой в этом учебном пособии, выполним ряд вспомогательных построений.

Пусть заданы векторные функции $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_p(t)$, $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}_p(t)$, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_p(t)$, определяющие некоторое *контролируемое* (возможно, *программное*) *движение* объекта, удовлетворяющие системе уравнений (1.1)

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}_p \equiv \mathbf{F}(t, \overline{\mathbf{x}}_p, \overline{\mathbf{u}}_p, \overline{\varphi}_p). \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ *отклонения* соответствующих переменных в (1.1) от указанного движения, определяя этим соотношения:

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{x}}_p(t) + \mathbf{x}(t), \ \overline{\mathbf{u}}(t) = \overline{\mathbf{u}}_p(t) + \mathbf{u}(t), \ \overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}_p(t) + \varphi(t). \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в (1.1) с учетом (1.2) получим уравнения *возмущенного движения* объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \varphi) \tag{1.4}$$

в отклонениях от контролируемого движения, где

$$\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\varphi) = \mathbf{F}(t,\overline{\mathbf{x}}_p + \mathbf{x},\overline{\mathbf{u}}_p + \mathbf{u},\overline{\varphi}_p + \varphi) - \mathbf{F}(t,\overline{\mathbf{x}}_p,\overline{\mathbf{u}}_p,\overline{\varphi}_p)\,. \quad (1.5)$$

Из последних соотношений следует, что при условиях $\mathbf{x}(t) \equiv 0$, $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, $\varphi(t) \equiv 0$ система (1.4) находится в положении равновесия, что соответствует контролируемому движению объекта управления, которое удовлетворяет уравнениям (1.2). С учетом свойств функции $\mathbf{F}$ в (1.1) система (1.4) может быть *линеаризована* в окрестности своего положения равновесия, что приводит нас к *системе линейных дифференциальных уравнений объекта управления*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{C}(t)\varphi\,, \quad (1.6)$$

где матрицы определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{A}(t) = \left\{\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{x}_j}\right\}_{\mathbf{x}=0,\ \mathbf{u}=0,\ \varphi=0} = \left\{\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_j}\right\}_{\overline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{x}}_p,\ \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}_p,\ \overline{\varphi}=\overline{\varphi}_p},\ i,j=\overline{1,n}\,;$$

$$\mathbf{B}(t) = \left\{\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{u}_k}\right\}_{\mathbf{x}=0,\ \mathbf{u}=0,\ \varphi=0} = \left\{\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}_k}\right\}_{\overline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{x}}_p,\ \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}_p,\ \overline{\varphi}=\overline{\varphi}_p},\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m}\,;$$

$$\mathbf{C}(\mathrm{t}) = \left\{\frac{\partial \mathbf{G}_\mathrm{i}}{\partial \varphi_\mathrm{j}}\right\}_{\mathbf{x}=0,\ \mathbf{u}=0,\ \varphi=0} = \left\{\frac{\partial \mathbf{F}_\mathrm{i}}{\partial \varphi_\mathrm{j}}\right\}_{\overline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{x}}_\mathrm{p},\ \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{p},\ \overline{\varphi}=\overline{\varphi}_\mathrm{p}},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,l}\,.$$

Как указано в работе [71], рассматриваемое контролируемое движение $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_p(t)$, $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}_p(t)$, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_p(t)$ можно сделать асимптотически устойчивым при условии $\varphi(t) \equiv 0$ с помощью обратных связей, если выполняется соотношение

$$\left\|\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},0) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{u}\right\| \le \theta\left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{u}\|\right), \quad (1.7)$$

где $\theta \to 0$ при условиях $\|\mathbf{x}\| \to 0$ и $\|\mathbf{u}\| \to 0$, причем неуправляемая часть линейного приближения (1.6) является устойчивой.

В дальнейшем, если явно не оговорено обратное, будем считать, что все компоненты матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в системе (1.6) *постоянные*. При этом требование (1.7) заведомо выполняется, если имеет место условие полной управляемости по Калману:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n\,. \tag{1.8}$$

Если приведенные выше требования обеспечиваются, то согласно [71] нулевое положение равновесия линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{C}\varphi \tag{1.9}$$

может быть сделано асимптотически устойчивым с помощью регулятора *прямого* действия

$$\mathbf{u} = \mathbf{Kx} \tag{1.10}$$

или с помощью регулятора *непрямого* действия

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_0\mathbf{u} + \mathbf{Kx}\,, \tag{1.11}$$

обладающего собственной динамикой, где $\mathbf{K}_0$ и $\mathbf{K}$ — постоянные матрицы.

Аналогичное утверждение справедливо и для *обобщенного* понятия регулятора *непрямого* действия, математическая модель которого может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Mz} + \mathbf{M}_1\mathbf{x} + \mathbf{M}_2\dot{\mathbf{x}} + \ldots + \mathbf{M}_\mu \mathbf{x}^{(\mu-1)}, \\ &\mathbf{u} = \mathbf{Kz}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $\mathbf{z} \in E^n$ — вектор состояния регулятора. Иными словами, обобщенный регулятор непрямого действия, или *динамический компенсатор,* — это самостоятельная динамическая система, на вход которой поступает информация от измерителей, а выходом служит вектор управляющих воздействий.

С помощью регулятора (1.12) можно стабилизировать объект (1.9), обеспечивая произвольный спектр корней характеристического полинома замкнутой системы выбором матриц $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_i$ ($i = \overline{1, \mu}$) с постоянными компонентами.

З а м е ч а н и е. Вопрос о практической возможности введения в состав регулятора производных ($\mu - 1$)-го порядка от измеряемых координат должен в каждом конкретном случае обсуждаться особо.

Уравнения регулятора непрямого действия (1.12) с использованием преобразования Лапласа могут быть представлены в частотной области соотношением «вход-выход»:

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}(s)\mathbf{x}\,, \tag{1.13}$$

где s — переменная Лапласа, $\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_1(s)/W_2(s)$ — *передаточная матрица регулятора*, $\mathbf{W}_1(s)$ — полиномиальная матрица размера $m \times n$, $W_2(s)$ — полином степени $\nu = \dim \mathbf{z}$. Очевидно, что компонентами передаточной матрицы $\mathbf{W}(s)$ являются дробно-рациональные функции комплексной переменной .

Записывая уравнения регулятора (1.12) в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях по вектору z, нетрудно получить связь между моделями (1.12) и (1.13):

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_1(s)/W_2(s) = \mathbf{K}(\mathbf{E}_\nu s - \mathbf{M})^{-1}(\mathbf{M}_1 + s\mathbf{M}_2 + \ldots + s^{\mu-1}\mathbf{M}_\mu)\,, \tag{1.14}$$

где $\mathbf{E}_\nu$ — единичная матрица размера $\nu \times \nu$, $W_2(s) = \det(\mathbf{E}_\nu s - \mathbf{M})$.

Следует отметить, что математическую модель (1.13) можно трактовать как наиболее общее представление линейных регуляторов, охватывающее как регуляторы прямого ($\nu = 0$) (1.10), так и непрямого (1.11), (1.12) действия.

Очевидно, что при выполнении условий (1.7), (1.8) существует бесконечно много регуляторов, стабилизирующих заданное контролируемое движение объекта (1.1). При этом естественно ввести в рассмотрение количественные характеристики качества стабилизации. Рассмотрим уравнения замкнутой системы, которые согласно (1.1), (1.3) и (1.13) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F}\left(t, \overline{\mathbf{x}}(t), \overline{\mathbf{u}}(t), \overline{\varphi}_p(t) + \varphi(t)\right), \\ \overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{u}}_p(t) + \mathbf{W}(p)\left(\overline{\mathbf{x}}(t) - \overline{\mathbf{x}}_p(t)\right), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования. На движениях системы (1.15) из каких-либо соображений содержательного (неформального) характера зададим некоторый неотрицательный функционал

$$I_H = I_H\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \overline{\mathbf{u}}(t)\right). \tag{1.16}$$

Очевидно, что при одних и тех же начальных условиях для замкнутой системы (1.15) и одной и той же функции $\varphi(t)$ функционал (1.16) зависит от выбора передаточной матрицы $\mathbf{W}(p)$ регулятора (1.13) (или, что то же самое, от выбора степеней μ и ν и матриц $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_i$ ($i = \overline{1,\mu}$) в (1.12)), т. е.

$$I_H = I_H\left(\overline{\mathbf{x}}\left(t, \mathbf{W}(p)\right), \overline{\mathbf{u}}\left(t, \mathbf{W}(p)\right)\right) = I_H\left(\mathbf{W}(p)\right) = I_H(\mathbf{W}). \quad (1.17)$$

Определение 1.1. *Регулятор* $\mathbf{u} = \mathbf{W}^0(p)\mathbf{x}$ *будем называть* ***оптимальным по отношению к функционалу*** (1.16), *если он является стабилизирующим в указанном выше смысле и среди всех регуляторов вида* (1.13) *доставляет величине* $I_H(\mathbf{W})$ *наименьшее возможное значение.*

Определение 1.2. *Под* ***задачей аналитического синтеза*** *линейных регуляторов будем понимать задачу*

$$I_H = I_H(\mathbf{W}) \to \inf_{\mathbf{W} \in \Omega_1} \quad (1.18)$$

о поиске оптимального стабилизирующего регулятора по отношению к функционалу I_H. *Здесь* $\mathbf{\Omega}_1$ *— множество передаточных матриц регуляторов вида* (1.13) *— матриц размера* $m \times n$ *с дробно-рациональными компонентами, такими что характеристический полином замкнутой линейной системы*

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\varphi, \\ &\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{M}_1\mathbf{x} + \mathbf{M}_2\dot{\mathbf{x}} + \ldots + \mathbf{M}_\mu \mathbf{x}^{(\mu-1)}, \\ &\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (1.19)$$

является гурвицевым.

Определение 1.3. ***Задачей параметрического синтеза*** *будем называть задачу нелинейного программирования, которая состоит в поиске всех компонент матриц* $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_i$ ($i = \overline{1, \mu}$) *при заданных фиксированных степенях* μ *и* ν *(или варьируемых параметров, от которых эти компоненты зависят) регулятора вида* (1.12), *обеспечивающих минимум функционала* (1.17):

$$I_H = I_H(\mathbf{W}(p, \mathbf{h})) = I_H^*(\mathbf{h}) \to \inf_{\mathbf{h} \in \Omega_H} \quad (1.20)$$

Здесь $\mathbf{h} \in E^r$ *— вектор варьируемых параметров, подлежащих поиску,* $\mathbf{\Omega}_H = \left\{ \mathbf{h} \in E^r : \mathbf{W}(p, \mathbf{h}) \in \mathbf{\Omega}_1 \right\}$ *— область параметров в пространстве* E^r, *для которых характеристический полином замкнутой системы* (1.19) *является гурвицевым.*

Рассмотрим частный вариант задачи аналитического синтеза линейных регуляторов. Пусть $\varphi(t)$ в (1.3), (1.9), (1.19) — это любая скалярная функция времени ($l = 1$, $\mathbf{C} = \mathbf{c} \in E^n$), удовлетворяющая трём следующим требованиям:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\,dt = 0\,, \tag{1.21}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t)\,dt = D_\varphi > 0\,, \tag{1.22}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t+\tau)\varphi(t)\,dt \right] \cos\omega\tau\,d\tau = S_\varphi(\omega)\,, \tag{1.23}$$

где $S_\varphi(\omega)$ — наперед заданное четное дробно-рациональное выражение.

Очевидно, что приведенные условия в частности выполняются для любой реализации случайного стационарного процесса $\varphi(t)$ с нулевым средним, удовлетворяющего эргодической гипотезе и имеющего заданную спектральную плотность $S_\varphi(\omega)$ мощности.

В свою очередь, по отношению к исходной модели объекта (1.1) с учётом (1.2), (1.3) можно говорить о том, что функции $\varphi(t)$ определяют некоторые стационарные отклонения случайного характера, не затухающие со временем, относительно номинального скалярного возмущения $\overline{\varphi}_p(t)$. Интенсивность (мощность) этих отклонений определяется величиной дисперсии

$$D_\varphi = \left\langle \varphi^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t)\,dt = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\,d\omega\,. \tag{1.24}$$

Для линейного объекта (1.9), замкнутого любым стабилизирующим регулятором (1.13), указанное возмущение вызовет соответствующие движения $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, причём компоненты вектора состояния $\mathbf{x}$ и вектора управления $\mathbf{u}$ для замкнутой системы (1.19) — это функции того же класса, что и функция $\varphi(t)$.

При этом естественно ввести в рассмотрение понятия *точности стабилизации* и *интенсивности управления*, связав их с величинами дисперсий компонент $x_i(t)$ ($i = \overline{1,n}$) и $u_j(t)$ ($j = \overline{1,m}$):

$$I_{\tilde{x}} = D_{\tilde{x}}\,,\ I_{\tilde{u}} = D_{\tilde{u}}\,. \tag{1.25}$$

Здесь $\tilde{x}$ — обобщённая выходная координата, определяемая условием

$$\tilde{x}^2 = \mathbf{x}'\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}\,, \tag{1.26}$$

а $\tilde{u}$ — обобщённая входная координата, определяемая равенством

$$\tilde{u}^2 = \mathbf{u}'\mathbf{Q}\mathbf{u}\,, \tag{1.27}$$

где $\tilde{\mathbf{R}}$ — заданная знакоположительная матрица, компоненты которой отражают «веса» отклонений по составляющим вектора $\mathbf{x}$ в характеристике точности стабилизации. В свою очередь, $\mathbf{Q}$ — заданная положительно определённая матрица, компоненты которой отражают значимость вклада отдельных компонент вектора $\mathbf{u}$ в характеристику энергетических затрат на стабилизацию.

Аналогично соотношению (1.24), величины введённых характеристик могут быть вычислены по формулам

$$I_x = \left\langle \tilde{x}^2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}'\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x} \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{x}'(t)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(t)\,dt = \int_0^\infty S_{\tilde{x}}(\omega)\,d\omega\,, \tag{1.28}$$

$$I_u = \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}'\mathbf{Q}\mathbf{u} \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{u}'(t)\mathbf{Q}\mathbf{u}(t)\,dt = \int_0^\infty S_{\tilde{u}}(\omega)\,d\omega\,, \tag{1.29}$$

где $S_{\tilde{x}}$ и $S_{\tilde{u}}$ — спектральные плотности функций $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{u}(t)$. Поскольку эти функции есть результат прохождения сигнала $\varphi(t)$ через устойчивую линейную систему, имеют место тождества

$$S_{\tilde{x}}(\omega) = \left|F_{\varphi\tilde{x}}(j\omega)\right|^2 S_\varphi(\omega)\,, \quad S_{\tilde{u}}(\omega) = \left|F_{\varphi\tilde{u}}(j\omega)\right|^2 S_\varphi(\omega)\,, \tag{1.30}$$

где $F_{\varphi\tilde{x}}(s)$ и $F_{\varphi\tilde{u}}(s)$ — передаточные функции замкнутой системы (1.19) от φ к $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ соответственно. Причём в силу (1.26), (1.27)

$$\left|F_{\varphi\tilde{x}}(j\omega)\right|^2 = \mathbf{F}'_{\varphi x}(-j\omega)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{F}_{\varphi x}(j\omega)\,, \; \left|F_{\varphi\tilde{u}}(j\omega)\right|^2 = \mathbf{F}'_{\varphi u}(-j\omega)\mathbf{Q}\mathbf{F}_{\varphi u}(j\omega)\,, \tag{1.31}$$

где $\mathbf{F}_{\varphi x}(s)$, $\mathbf{F}_{\varphi u}(s)$ — передаточные матрицы замкнутой системы (1.19) от φ к $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ соответственно.

Запишем уравнения замкнутой системы (1.19) в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях, предварительно представив регулятор в виде (1.13):

$$s\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{c}\varphi(s),$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{W}(s)\mathbf{x}. \qquad (1.32)$$

В соответствии с (1.32) имеем

$$\mathbf{F}_{\varphi x}(s) = [\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(s)]^{-1}\mathbf{c},$$
$$\mathbf{F}_{\varphi u}(s) = \mathbf{W}(s)[\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(s)]^{-1}\mathbf{c}, \qquad (1.33)$$

откуда согласно (1.28)–(1.31) получим следующие формулы, представляющие в явном виде зависимости точности и интенсивности управления от выбора передаточной матрицы регулятора:

$$I_x = I_x(\mathbf{W}) = \left\langle \mathbf{x}'\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x} \right\rangle =$$
$$= \int_0^\infty [[-\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(-j\omega)]^{-1}\mathbf{c}]'\tilde{\mathbf{R}}[\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(j\omega)]^{-1}\mathbf{c}S_\varphi(\omega)\,d\omega, \qquad (1.34)$$

$$I_u = I_u(\mathbf{W}) = <\mathbf{u}'\mathbf{Q}\mathbf{u}> = \int_0^\infty [\mathbf{W}(-j\omega)[-\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(-j\omega)]^{-1}\mathbf{c}]' \times$$
$$\times\, \mathbf{Q}\mathbf{W}(j\omega)[\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(j\omega)]^{-1}\mathbf{c}S_\varphi(\omega)d\omega. \qquad (1.35)$$

И, наконец, на базе формул (1.34), (1.35) введём обобщенную характеристику качества стабилизации в рассматриваемых условиях, однозначно определяемую выбором матрицы $\mathbf{W}(s)$ в (1.32):

$$I = I(\mathbf{W}) = I_x(\mathbf{W}) + c_0^2 I_u(\mathbf{W}) = \left\langle \mathbf{x}'\mathbf{R}\mathbf{x} \right\rangle + c_0^2 \left\langle \mathbf{u}'\mathbf{Q}\mathbf{u} \right\rangle =$$
$$= \int_0^\infty H(\mathbf{W}, \omega) S_\varphi(\omega)\,d\omega, \qquad (1.36)$$

где $c_0 = \text{const}$ — весовой множитель,

$$H(\mathbf{W}, \omega) = \mathbf{c}'[-\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(-j\omega)]'^{-1}\tilde{\mathbf{R}}[\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(j\omega)]^{-1}\mathbf{c} +$$
$$+\, \mathbf{c}'[-\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(-j\omega)]'^{-1}\mathbf{W}'(-j\omega)\mathbf{Q}\mathbf{W}(j\omega)[\mathbf{E}j\omega - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{W}(j\omega)]^{-1}\mathbf{c}.$$

Определение 1.4. ***Задачей среднеквадратичного синтеза*** *для объекта управления с математической моделью*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\varphi(t), \qquad (1.37)$$

где $\varphi(t)$ *— функции, удовлетворяющие условиям* (1.21)–(1.23) *с заданной спектральной плотностью* $S_\varphi(\omega) = N_\varphi(\omega)/T_\varphi(\omega)$ (N_φ, T_φ *— четные полиномы), будем называть задачу*

$$I = I(\mathbf{W}) \to \min_{\mathbf{W}\in\Omega} \tag{1.38}$$

поиска передаточной матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$ *оптимального регулятора вида* (1.13), *стабилизирующего замкнутую систему* (1.37), (1.13) *и доставляющего минимум среднеквадратичному функционалу* (1.36).

Приведенная формализация позволяет определить роль и место среднеквадратичного синтеза в теории управления. По этому поводу необходимо отметить следующее.

1. Среднеквадратичный синтез является одним из подходов к построению стабилизирующих управлений для заданных движений управляемых объектов с математической моделью (1.1).
2. Частность ситуации определяется предположением о наличии постоянно действующих отклонений от расчётного возмущения, удовлетворяющих условиям (1.21)–(1.23), а также введением количественной характеристики качества процесса стабилизации в виде функционала (1.36).
3. Результат синтеза заведомо ориентирован на оптимум процесса стабилизации в целом (в среднем) и с очевидностью не учитывает возможного многообразия требований к его качеству.
4. Особенность ситуации и относительная простота минимизируемого функционала позволяют искать решение задачи, в отличие от параметрического синтеза, на множествах более сложной природы, чем конечномерные векторные пространства. В качестве таковых выступают множества передаточных матриц с дробно-рациональными компонентами.
5. Методы решения задачи (1.38) известны достаточно давно — первые из них были приведены в работе [61]. В различных вариантах все они базируются на необходимых условиях экстремума функционала (1.36).
6. Если замкнутая система (1.15), в которой матрица $\mathbf{W}(p)$ определена методами среднеквадратичного синтеза, но по каким-либо иным соображениям не соответствует представ-

лению о хорошем качестве управления или если функция **F** в (1.1) не допускает линеаризацию в необходимых пределах, то требуется привлечение более мощных и глубоких подходов современной теории управления.

Эти особенности позволяют заключить, что применение методов среднеквадратичного синтеза может быть направлено либо на непосредственную реализацию результата, либо служить целям относительно грубого анализа свойств объекта и условий его функционирования на предварительных этапах исследований.

Однако и в том и в другом случае математические средства среднеквадратичного синтеза, их аппаратная и программная поддержка, в соответствии с простотой содержательной постановки и её специфической направленностью, должны быть простыми, легкодоступными и высокоэффективными.

Ориентация техники поиска оптимальных регуляторов на однократное решение задачи синтеза с использованием уникальных вычислительных ресурсов в данном случае недопустима.

Это связано с тем, что практика требует, как правило, многократной прогонки решения задачи с различными вариантами исходных данных, условий, требований, ограничений, математических моделей, которые могут существенно изменяться, уточняться, переоцениваться и иначе формулироваться в зависимости от получаемых результатов.

Следует особо отметить ситуацию, когда задачи синтеза решаются не в лабораторных условиях, а в режиме реального времени при адаптивной перенастройке обратных связей на борту автономных подвижных объектов или в рамках различных встраиваемых систем.

Приведенные соображения с очевидностью указывают на класс вычислительных средств, на которых целесообразна реализация алгоритмического обеспечения методов среднеквадратичного синтеза. В качестве таковых естественно принять современные микропроцессоры и компьютеры, не обладающие уникальными вычислительными возможностями в плане быстродействия и оперативной и дисковой памяти.

Подобные средства исключительно широко распространены, легкодоступны, достаточно дешевы и удобны для пользователей, не имеющих специальной программистской подготовки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Евгений Игоревич Веремей

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ МНОГОЦЕЛЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Редактор *Н. В. Седых*
Корректор *Т. А. Тёмкина*
Компьютерная верстка *Ю. Ю. Тауриной*

Подписано в печать 25.03.2016. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 23,6. Тираж 120 экз. (1-й завод). Заказ № 62.

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11.
Тел. +7(812)328-96-17; факс +7(812)328-44-22
E-mail: publishing@spbu.ru
publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.