

Полянин А.Д.
Зайцев В.Ф.

**Справочник по
нелинейным
уравнениям
математической
физики**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.9
ББК 517.2
П54

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. **Справочник по нелинейным уравнениям математической физики.** — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 688 с. — ISBN 978-5-9221-0793-8.

Книга содержит точные решения около 1200 нелинейных уравнений математической физики и механики. Рассматриваются уравнения параболического, гиперболического, эллиптического и других типов. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций. Помимо уравнений второго порядка рассматриваются также уравнения третьего, четвертого и более высоких порядков. Во 2-е издание включено в два раза больше уравнений и точных решений, чем в первое издание 2002 года.

Приведены решения уравнений, встречающихся в различных областях теоретической физики, механики и химической технологии (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, нелинейной акустике, теории горения, нелинейной оптике, ядерной физике и др.).

В приложении описаны методы обобщенного и функционального разделения переменных. Рассмотрены конкретные примеры применения этих методов для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными.

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях математики, физики, механики, теории управления и инженерных наук.

Справочное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич

ЗАЙЦЕВ Валентин Федорович

**СПРАВОЧНИК ПО НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ**

Оригинал-макет: *А. Д. Полянин*

Подписано в печать 21.01.08. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 55,8.

Уч.-изд. л. 56. Тираж экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

http://www.fml.ru

Неизвестная типография

...
...
...
...

ISBN 978-5-9221-0793-8



9 785922 107938

ISBN 978-5-9221-0793-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2002, 2008

© А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 2002, 2008

Оглавление

Предисловие	11
Некоторые обозначения и замечания	13
1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной	15
1.1. Уравнения со степенными нелинейностями	15
1.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^2$	15
1.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3$	16
1.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$	20
1.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	22
1.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(w)$	22
1.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	26
1.1.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$	28
1.1.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	30
1.1.9. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	31
1.1.10. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right)$	37
1.1.11. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw^k$	43
1.1.12. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw + c_1 w^{k_1} + c_2 w^{k_2} + c_3 w^{k_3}$	48
1.1.13. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(w)$	51
1.1.14. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	53
1.1.15. Другие уравнения	57
1.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	61
1.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 e^{\lambda w} + b_2 e^{2\lambda w}$	61
1.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(w)$	63
1.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(w)$	66
1.2.4. Другие уравнения, не зависящие явно от x и t	67
1.2.5. Уравнения, зависящие явно от x и t	69
1.3. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	71
1.3.1. Уравнения, содержащие гиперболический косинус	71
1.3.2. Уравнения, содержащие гиперболический синус	71
1.3.3. Уравнения, содержащие гиперболический тангенс	72
1.3.4. Уравнения, содержащие гиперболический котангенс	72
1.4. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	73
1.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	73
1.4.2. Другие уравнения	74
1.5. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	76
1.5.1. Уравнения, содержащие косинус	76
1.5.2. Уравнения, содержащие синус	77
1.5.3. Уравнения, содержащие тангенс	77
1.5.4. Уравнения, содержащие котангенс	78
1.5.5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции	78

1.6. Уравнения, содержащие произвольные функции	79
1.6.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	79
1.6.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	82
1.6.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	84
1.6.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$	87
1.6.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	89
1.6.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + h(x, t, w)$	89
1.6.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	93
1.6.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	94
1.6.9. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	96
1.6.10. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = (aw+b) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + h(x, t, w)$	99
1.6.11. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	101
1.6.12. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	102
1.6.13. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	103
1.6.14. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t, w)$	106
1.6.15. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	107
1.6.16. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	115
1.6.17. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	116
1.6.18. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	123
1.6.19. Нелинейные уравнения теплового (диффузионного) пограничного слоя	128
1.7. Нелинейные уравнения Шредингера и родственные уравнения	129
1.7.1. Уравнения вида $i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)w = 0$, содержащие произвольные параметры	129
1.7.2. Уравнения вида $i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(w)w = 0$, содержащие произвольные параметры	132
1.7.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	134
1.7.4. Уравнения с кубической нелинейностью, содержащие произвольные функции	134
1.7.5. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции одного аргумента	137
1.7.6. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции двух аргументов	140
2. Уравнения параболического типа с двумя и более пространственными переменными	144
2.1. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности	144
2.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + aw^p$	144
2.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(w^k \frac{\partial w}{\partial y} \right)$	145
2.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(w) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + h(w)$	149
2.1.4. Другие уравнения	151
2.2. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности	155
2.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + ae^{\lambda w}$	155
2.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\beta w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + f(w)$	156
2.3. Другие уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие произвольные параметры	158
2.3.1. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	158
2.3.2. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	159

2.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	159
2.4.1. Уравнения массопереноса в неподвижной и движущейся среде с химической реакцией	159
2.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(w)$	161
2.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(t, w)$	162
2.4.4. Другие уравнения, линейные относительно старших производных	165
2.4.5. Нелинейные уравнения диффузионного пограничного слоя	168
2.5. Уравнения с тремя и более пространственными переменными	169
2.5.1. Уравнения массопереноса в неподвижной и движущейся среде с химической реакцией	169
2.5.2. Уравнения теплопереноса при степенной и экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры	172
2.5.3. Уравнения тепло- и массопереноса в анизотропных средах	173
2.5.4. Другие уравнения с тремя пространственными переменными	175
2.5.5. Уравнения, зависящие от n пространственных переменных	177
2.6. Нелинейные уравнения Шредингера	183
2.6.1. Двумерные уравнения	183
2.6.2. Трех- и n -мерные уравнения	186
3. Уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной	188
3.1. Уравнения со степенными нелинейностями	188
3.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^n + cw^{2n-1}$	188
3.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	190
3.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	192
3.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	194
3.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, w)$	198
3.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^n \frac{\partial w}{\partial x}) + f(w)$	200
3.1.7. Другие уравнения	204
3.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	207
3.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta w} + ce^{\gamma w}$	207
3.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	209
3.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	211
3.2.4. Другие уравнения	215
3.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	219
3.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	219
3.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	220
3.3.3. Уравнение синус-Гордона и другие уравнения с тригонометрическими нелинейностями	221
3.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}]$	224
3.3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [g(w) \frac{\partial w}{\partial x}]$	225
3.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	227
3.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	227
3.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	231
3.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	236
3.4.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	241
3.4.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	247
3.4.6. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	249
3.4.7. Другие уравнения, линейные относительно старших производных	250

3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	256
3.5.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(w)$, содержащие произвольные параметры	256
3.5.2. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	259
3.5.3. Уравнения, содержащие произвольные функции	260
4. Уравнения гиперболического типа с двумя и более пространственными переменными	264
4.1. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности	264
4.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + aw^p$	264
4.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^n \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (w^k \frac{\partial w}{\partial y})$	266
4.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}]$	273
4.1.4. Другие уравнения	277
4.2. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности	279
4.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + ae^{\lambda w}$	279
4.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^{\beta w} \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial y})$	281
4.2.3. Другие уравнения	285
4.3. Нелинейные телеграфные уравнения с двумя пространственными переменными	286
4.3.1. Уравнения, содержащие степенные нелинейности	286
4.3.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные нелинейности	289
4.4. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие произвольные функции	290
4.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(w)$	290
4.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(w)$	293
4.4.3. Другие уравнения	298
4.5. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие произвольные параметры	301
4.5.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] + aw^p$	301
4.5.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] + ae^{\lambda w}$	302
4.5.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^n \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (w^m \frac{\partial w}{\partial y}) + c \frac{\partial}{\partial z} (w^k \frac{\partial w}{\partial z}) + sw^p$	304
4.5.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda_1 w} \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda_2 w} \frac{\partial w}{\partial y}) + c \frac{\partial}{\partial z} (e^{\lambda_3 w} \frac{\partial w}{\partial z}) + se^{\beta w}$	309
4.6. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие произвольные функции	316
4.6.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [f_3(z) \frac{\partial w}{\partial z}] + g(w)$	316
4.6.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [f_3(w) \frac{\partial w}{\partial z}] + g(w)$	319
4.6.3. Другие уравнения	325
5. Уравнения эллиптического типа с двумя независимыми переменными	328
5.1. Уравнения со степенными нелинейностями	328
5.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw + bw^n + cw^{2n-1}$	328
5.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w)$	330
5.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	331
5.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$	332
5.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$	334
5.1.6. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	338

5.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	343
5.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a + be^{\beta w} + ce^{\gamma w}$	343
5.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w)$	345
5.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$	346
5.2.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$	348
5.2.5. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	350
5.3. Уравнения, содержащие другие нелинейности	353
5.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	353
5.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	355
5.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	357
5.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	359
5.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w)$	359
5.4.2. Уравнения вида $a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	363
5.4.3. Уравнения тепло- и массопереноса вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] = h(w)$	367
5.4.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(x, y, w) \frac{\partial w}{\partial y}] = h(x, y, w)$	369
5.4.5. Другие уравнения	375
6. Уравнения эллиптического типа с тремя и более пространственными переменными	380
6.1. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности	380
6.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] = aw^p$	380
6.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [g(w) \frac{\partial w}{\partial z}] = 0$	382
6.2. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности	387
6.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] = ae^{\lambda w}$	387
6.2.2. Уравнения вида $a_1 \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda_1 w} \frac{\partial w}{\partial x}) + a_2 \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda_2 w} \frac{\partial w}{\partial y}) + a_3 \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda_2 w} \frac{\partial w}{\partial y}) = be^{\beta w}$	390
6.3. Трехмерные уравнения, содержащие произвольные функции	393
6.3.1. Уравнения тепло- и массопереноса вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [f_3(z) \frac{\partial w}{\partial z}] = g(w)$	393
6.3.2. Уравнения тепло- и массопереноса при наличии осложняющих факторов	396
6.3.3. Другие уравнения	399
6.4. Уравнения с произвольным числом независимых переменных	401
6.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x_1} [f_1(x_1) \frac{\partial w}{\partial x_1}] + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} [f_n(x_n) \frac{\partial w}{\partial x_n}] = g(x_1, \dots, x_n, w)$	401
6.4.2. Другие уравнения	403
7. Уравнения, содержащие смешанные производные, и некоторые другие уравнения	405
7.1. Уравнения линейные относительно смешанной производной	405
7.1.1. Уравнение Калоджеро	405
7.1.2. Уравнение Хохлова—Заболоцкой и родственные уравнения	407
7.1.3. Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока	412
7.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	414
7.1.5. Другие уравнения с двумя независимыми переменными	416
7.1.6. Другие уравнения с тремя независимыми переменными	418
7.2. Уравнения, квадратичные относительно старших производных	419
7.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y)$	419
7.2.2. Уравнение Монжа—Ампера $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y)$	421
7.2.3. Уравнения вида $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	430

7.2.4. Уравнения вида $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x, y)$	435
7.2.5. Другие уравнения	438
7.3. Уравнение Беллмана и родственные уравнения	441
7.3.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью	441
7.3.2. Уравнения со степенной нелинейностью	443
8. Уравнения второго порядка общего вида	446
8.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t	446
8.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	446
8.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	453
8.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	456
8.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	460
8.1.5. Уравнения вида $F\left(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$	464
8.1.6. Уравнения с тремя независимыми переменными	466
8.2. Уравнения, содержащие несколько вторых производных	467
8.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	467
8.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	470
8.2.3. Уравнения линейные относительно смешанной производной	473
8.2.4. Уравнения нелинейные относительно нескольких старших производных	474
8.2.5. Уравнения с n независимыми переменными	477
9. Уравнения третьего порядка	480
9.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t	480
9.1.1. Уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	480
9.1.2. Цилиндрическое, сферическое и модифицированное уравнения Кортевега — де Фриза	485
9.1.3. Обобщенное уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	487
9.1.4. Уравнения, приводимые к уравнению Кортевега — де Фриза	490
9.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$	492
9.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + F\left(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$	494
9.1.7. Уравнение Бюргера — Кортевега — де Фриза и другие уравнения	495
9.2. Уравнения, содержащие вторые производные по t	499
9.2.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью	499
9.2.2. Другие уравнения	502
9.3. Уравнения гидродинамического пограничного слоя	503
9.3.1. Уравнения стационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости	503
9.3.2. Уравнения стационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей	509
9.3.3. Уравнения нестационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости	514
9.3.4. Уравнения нестационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей	524
9.3.5. Родственные уравнения	528
9.4. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)	529
9.4.1. Стационарные уравнения	529
9.4.2. Нестационарные уравнения	533
9.5. Другие нелинейные уравнения третьего порядка	539
9.5.1. Уравнения, содержащие смешанные производные второго порядка	539
9.5.2. Уравнения, содержащие смешанные третьи производные	541
9.5.3. Другие уравнения	545
10. Уравнения четвертого порядка	547
10.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t	547
10.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F\left(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\right)$	547
10.1.2. Другие уравнения	550

10.2. Уравнения, содержащие вторую производную по t	552
10.2.1. Уравнение Буссинеска и его модификации	552
10.2.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью	557
10.2.3. Другие уравнения	560
10.3. Уравнения, содержащие смешанные производные	562
10.3.1. Уравнение Каломцева — Петвиашвили	562
10.3.2. Стационарные уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса)	564
10.3.3. Нестационарные уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса)	571
10.3.4. Другие уравнения	582
11. Уравнения старших порядков	583
11.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t , линейные относительно старшей производной	583
11.1.1. Уравнения пятого порядка	583
11.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$	585
11.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x}$	586
11.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	589
11.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	591
11.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}})$	596
11.1.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	597
11.1.8. Другие уравнения	599
11.2. Уравнения общего вида, содержащие первую производную по t	601
11.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	601
11.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	606
11.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	608
11.2.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	611
11.3. Уравнения, содержащие вторую производную по t	614
11.3.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$	614
11.3.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	615
11.3.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}})$	619
11.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	621
11.3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	622
11.4. Другие уравнения	624
11.4.1. Уравнения, содержащие смешанные производные	624
11.4.2. Уравнения, содержащие $\frac{\partial^n w}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial^m w}{\partial y^m}$	627
Дополнение. Некоторые нелинейные системы уравнений	630
D1. Нелинейные системы двух уравнений первого порядка	630
D1.1. Системы вида $\frac{\partial u}{\partial x} = F(u, w)$, $\frac{\partial w}{\partial t} = G(u, w)$	630
D1.2. Системы газодинамического типа, линеаризуемые с помощью преобразования годографа	634
D1.3. Другие нелинейные системы двух уравнений первого порядка	639
D2. Нелинейные системы двух уравнений второго порядка	640
D2.1. Параболические системы вида $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w)$, $\frac{\partial w}{\partial t} = b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(u, w)$	640
D2.1.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.	640
D2.1.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.	642
D2.1.3. Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин.	648

D2.1.4. Произвольные функции зависят от суммы (разности) квадратов искомых величин.	648
D2.1.5. Произвольные функции сложным образом зависят от искомых величин.	650
D2.2. Параболические системы вида $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(u, w)$, $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + G(u, w)$	651
D2.2.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.	652
D2.2.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.	653
D2.2.3. Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин.	656
D2.2.4. Произвольные функции зависят от суммы (разности) квадратов искомых величин.	656
D2.2.5. Произвольные функции зависят от разных аргументов.	657
D2.3. Другие системы уравнений второго порядка параболического типа	658
D2.4. Эллиптические системы вида $\Delta u = F(u, w)$, $\Delta w = G(u, w)$	659
D2.4.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.	659
D2.4.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.	660
D2.4.3. Другие системы.	662
D2.5. Гиперболические системы вида $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(u, w)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{b}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + G(u, w)$	663
D2.5.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.	663
D2.5.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.	664
D2.5.3. Другие системы.	666
D3. Нелинейные системы общего вида	667
D3.1. Системы двух уравнений, содержащие первые производные по t	667
D3.2. Системы двух уравнений, содержащие вторые производные по t	673
D3.3. Системы, содержащие произвольное число уравнений	675
Список литературы	678

Предисловие

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, жесткость или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE и др.)

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики обычно понимают следующие решения:

1. Решения, которые выражаются через элементарные функции.
2. Решения, которые выражаются в виде квадратур.*
3. Решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений).
4. Решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений).
5. Решения, описываемые уравнениями в частных производных с меньшим числом переменных, чем исходное уравнение (такие решения не всегда относят к точным решениям).

* Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции) и операций взятия неопределенного интеграла.

В книге приведены точные решения более 1700 нелинейных уравнений математической физики второго, третьего, четвертого и более высоких порядков. Помимо отдельных уравнений рассмотрены также некоторые системы уравнений. Описано много новых решений.

При отборе материала авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим трем важным типам уравнений:

- уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);
- уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют особый интерес для тестирования численных и приближенных методов);
- уравнениям, которые допускают точные решения, зависящие от произвольных функций.

При написании книги широко использовались предыдущие справочники авторов [см. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004)] и материалы веб-сайта EqWorld — Мир математических уравнений (<http://eqworld.ipmnet.ru>); ссылки на эти источники часто опускаются. В целом данный справочник содержит больше нелинейных уравнений математической физики и точных решений, чем любые другие книги (в частности, в данную книгу включено в два раза больше уравнений и точных решений, чем в цитируемую выше книгу 2002 года). Ввиду большого объема добавленного материала авторы исключили главы с описанием методов решения уравнений; необходимую информацию по методам можно найти в книге А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова (2005).

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избежать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно (опущены детали), чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений.

Расположение уравнений во всех главах книги отвечает принципу «от простого к сложному». Большинство разделов можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Обширное оглавление поможет читателю находить искомые уравнения.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики, теории управления и химической технологии. Рассмотренные в книге уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала при чтении спецкурсов и для проведения практических занятий* по уравнениям математической физики для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов и технических вузов.

Авторы

* Для заинтересованного читателя отметим, что многие решения из данного справочника являются ответами на соответствующие задачи и упражнения, приведенные в книге А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова (2005).

Некоторые обозначения и замечания

Латинский алфавит

$C_1, C_2, \dots$ — произвольные постоянные;

r, φ, z — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

r, θ, φ — сферические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

t — время ($t \geq 0$);

w — искомая функция (зависимая переменная);

x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);

$x_1, \dots, x_n$ — декартовы координаты в n -мерном пространстве.

Греческий алфавит

Δ — оператор Лапласа:

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — в двумерном случае,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — в трехмерном случае,

$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — в n -мерном случае;

$\Delta \Delta$ — бигармонический оператор, $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае;

$|\nabla w|^2$ — модуль градиента функции w , $|\nabla w|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} \right)^2$ — в n -мерном случае;

$\nabla \cdot \vec{v}$ — дивергенция вектора $\vec{v}$, $\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ — в n -мерном случае;

$(\vec{v} \cdot \nabla)w$ — градиент скаляра w по вектору $\vec{v}$, $(\vec{v} \cdot \nabla)w = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial w}{\partial x_k}$ — в n -мерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные:

$$\partial_t w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \partial_x w = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_{tt} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \partial_{xx} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \partial_{xxx} w = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad f^{(n)}_x \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при } n \geq 5.$$

Замечания

1. В формулах, содержащих выражения типа $\frac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.
2. В книге обычно не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной переменной, которая входит в исходное уравнение.
3. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «3.1.2.5» означает «уравнение 5 из раздела 3.1.2».
4. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных типов точных решений, которая не связана с конкретным видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

ТАБЛИЦА
Наиболее распространенные типы точных решений (для уравнений
с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w).

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение типа бегущей волны*	$w = F(z), z = \alpha x + \beta t, \alpha\beta \neq 0$
2	Решение в виде суммы функций разных аргументов**	$w = \varphi(x) + \psi(t)$
3	Решение в виде произведения функций разных аргументов***	$w = \varphi(x)\psi(t)$
4	Автомодельное решение****	$w = t^\alpha F(z), z = xt^\beta$
5	Обобщенное автомодельное решение	$w = \varphi(t)F(z), z = x\psi(t)$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$w = F(z), z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$w = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных	$w = F(z), z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе переменные могут играть роль пространственных координат.

** Другое название — решение с аддитивным разделением переменных.

*** Другое название — решение с мультипликативным разделением переменных.

**** Иногда решения вида $w = \tilde{t}^\alpha F(z), z = \tilde{x}\tilde{t}^\beta$, где $\tilde{x} = x + C_1$ и $\tilde{t} = t + C_2$, также будут называться автомодельными решениями.

⊙ Этим знаком помечены ссылки на литературные источники после уравнения, когда:

а) хотя бы одно из приведенных выше решений или преобразований получено в цитируемой работе (даже если решение там было приведено с «устраняемыми» ошибками в знаках и коэффициентах);

б) в цитируемой работе содержится полезная дополнительная информация, относительно свойств рассматриваемого уравнения, его решений и приложений.

1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной

1.1. Уравнения со степенными нелинейностями

1.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^2$

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^2.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = \frac{a}{b} \frac{12(4 - \sqrt{6})x^2 + 12(4 - \sqrt{6})C_1 x + 120(12 - 5\sqrt{6})at + 12(2 - \sqrt{6})C_2 + 6C_1^2}{[x^2 + C_1 x + 10(3 - \sqrt{6})at + C_2]^2},$$

$$w = \frac{a}{b} \frac{12(4 + \sqrt{6})x^2 + 12(4 + \sqrt{6})C_1 x + 120(12 + 5\sqrt{6})at + 12(2 + \sqrt{6})C_2 + 6C_1^2}{[x^2 + C_1 x + 10(3 + \sqrt{6})at + C_2]^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $aw''_{zz} - \lambda w'_z - bw^2 = 0$.

4°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1}u(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + u - bu^2 = 0$.

© Литература: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 13), Т. Barannyk (2002).

$$2. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw(1 - w).$$

Уравнение Фишера (Fisher), частный случай уравнения 1.1.3.2 при $m = 2$. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии. Оно описывает, например, массоперенос в двухкомпонентной неподвижной смеси при наличии объемной химической реакции квазипервого порядка. Кинетическая функция $f(w) = aw(1 - w)$ моделирует также автокаталитическое цепное превращение в теории горения.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны (C — произвольная постоянная):

$$w(x, t) = \left[1 + C \exp\left(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}x\right)\right]^{-2},$$

$$w(x, t) = \left[-1 + C \exp\left(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}x\right)\right]^{-2},$$

$$w(x, t) = \frac{1 + 2C \exp\left(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}x\right)}{\left[1 + C \exp\left(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}x\right)\right]^2}.$$

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x, t) = \pm \xi^2 \varphi(\xi), \quad \xi = C_1 \exp\left(\frac{1}{6}\sqrt{6a}x + \frac{5}{6}at\right),$$

где функция $\varphi(\xi)$ задана неявно

$$\xi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm(4\varphi^3 - 1)}} - C_2,$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные. Для верхнего знака обращение последней зависимости приводит к классической эллиптической функции Вейерштрасса $\varphi(\xi) = \wp(\xi + C_3, 0, 1)$.

4°. Замена $U = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - aU(1 - U).$$

⊙ *Литература*: R. A. Fisher (1937), M. J. Ablowitz, A. Zeppetella (1979), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987).

1.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^3$.

Частный случай уравнения 1.1.2.5 при $b_0 = b_1 = b_2 = 0$.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(\pm C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x, t) = \pm \sqrt{\frac{2a}{b}} \frac{2C_1 x + C_2}{C_1 x^2 + C_2 x + 6aC_1 t + C_3}.$$

3°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \lambda w'_z - bw^3 = 0.$$

4°. Автомоделное решение:

$$w = t^{-1/2} u(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{1}{2}u - bu^3 = 0.$$

5°. Точное решение:

$$w = xU(\zeta), \quad \zeta = t + \frac{1}{6a}x^2,$$

где функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $U''_{\zeta\zeta} - 9abU^3 = 0$.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, E. L. Mansfield (1994), T. A. Barannyk, A. G. Nikitin (2004), G. Cicogna (2004).

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw - bw^3$.

Частный случай уравнения 1.1.2.5 при $b_0 = b_2 = 0$.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(\pm x + C_1, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения при $a > 0, b > 0$:

$$w = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{C_1 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{2a}x) - C_2 \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{2a}x)}{C_1 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{2a}x) + C_2 \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{2a}x) + C_3 \exp(-\frac{3}{2}at)},$$

$$w = \sqrt{\frac{a}{b}} \left[\frac{2C_1 \exp(\sqrt{2a}x) + C_2 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{2a}x - \frac{3}{2}at)}{C_1 \exp(\sqrt{2a}x) + C_2 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{2a}x - \frac{3}{2}at) + C_3} - 1 \right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $a < 0, b > 0$:

$$w = \sqrt{\frac{|a|}{b}} \frac{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{2|a|x} + C_1)}{\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2|a|x} + C_1) + C_2 \exp(-\frac{3}{2}at)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Точное решение при $a > 0$ (обобщает первое решение из п. 2°):

$$w = [C_1 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{2a}x + \frac{3}{2}at) - C_2 \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{2a}x + \frac{3}{2}at)]U(z),$$

$$z = C_1 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{2a}x + \frac{3}{2}at) + C_2 \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{2a}x + \frac{3}{2}at) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $aU''_{zz} = 2bU^3$ (решение которого можно записать в неявном виде).

5°. Точное решение при $a < 0$ (обобщает решение из п. 3°):

$$w = \exp(\frac{3}{2}at) \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2|a|x} + C_1)V(\xi),$$

$$\xi = \exp(\frac{3}{2}at) \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2|a|x} + C_1) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, функция $V = V(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $aV''_{\xi\xi} = -2bV^3$ (решение которого можно записать в неявном виде).

6°. См. также уравнение 1.1.3.2 при $m = 3$.

⊙ Литература: F. Cariello, M. Tabor (1989), M. C. Nucci, P. A. Clarkson (1992), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 3).

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^3 - cw^2.$

Частный случай уравнения 1.1.2.5 при $b_1 = b_0 = 0$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x, t) = \left(ct \pm \sqrt{\frac{b}{2a}}x + C \right)^{-1},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Точные решения:

$$w(x, t) = k \sqrt{\frac{2a}{b}} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x},$$

где

$$F = C_1 \left(x + kc \sqrt{\frac{2a}{b}} t \right) + C_2 \exp \left(-\frac{kc}{\sqrt{2ab}} x + \frac{c^2}{2b} t \right) + C_3, \quad k = \pm 1;$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точные решения:

$$w(x, t) = k \sqrt{\frac{2a}{b}} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{c}{b},$$

где

$$F = C_1 \exp \left(\frac{kc}{\sqrt{2ab}} x - \frac{c^2}{2b} t \right) + C_2 \left(\frac{kc}{\sqrt{2ab}} x + \frac{c^2}{b} t \right) \exp \left(\frac{kc}{\sqrt{2ab}} x - \frac{c^2}{2b} t \right) + C_3, \quad k = \pm 1.$$

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w(1-w)(a-w).$$

Уравнение Фитцью–Нагумо (FitzHugh — Nagumo). Это уравнение встречается в популяционной генетике и в моделях передачи нервных импульсов.

1°. Существуют три стационарных однородных решения: $w = w_k$, где $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = a$. Линейный анализ устойчивости показывает, что

при $-1 \leq a < 0$: решения $w = a$, $w = 1$ устойчивы, решение $w = 0$ неустойчиво;

при $0 < a < 1$: решения $w = 0$, $w = 1$ устойчивы, решения $w = a$ неустойчивы.

Стационарное неоднородное решение задается неявно (A, B — произвольные постоянные):

$$\int \frac{dw}{\sqrt{\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{3}(a+1)w^3 + \frac{1}{2}aw^2 + A}} = \pm x + B.$$

2°. Решения типа бегущей волны (A — произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{1 + A \exp\left[\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}(2a-1)t\right]}, \\ w(x, t) &= \frac{a}{1 + A \exp\left[\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}ax + \frac{1}{2}a(2-a)t\right]}, \\ w(x, t) &= \frac{A \exp\left[\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\right] + a}{A \exp\left[\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\right] + 1}, \\ w(x, t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}x + \frac{1}{4}(1-2a)t + A\right], \\ w(x, t) &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \operatorname{th}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}ax + \frac{1}{4}a(a-2)t + A\right], \\ w(x, t) &= \frac{1}{2}(1+a) + \frac{1}{2}(1-a) \operatorname{th}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\right], \\ w(x, t) &= \frac{2a}{(1+a) - (1-a) \operatorname{th}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\right]}, \\ w(x, t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}x + \frac{1}{4}(1-2a)t + A\right], \\ w(x, t) &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \operatorname{cth}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}ax + \frac{1}{4}a(a-2)t + A\right], \\ w(x, t) &= \frac{1}{2}(1+a) + \frac{1}{2}(1-a) \operatorname{cth}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\right], \\ w(x, t) &= \frac{2a}{(1+a) - (1-a) \operatorname{cth}\left[\pm \frac{1}{4}\sqrt{2}(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\right]}. \end{aligned}$$

3°. «Двухфазное» решение:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{A \exp(z_1) + aB \exp(z_2)}{A \exp(z_1) + B \exp(z_2) + C}, \\ z_1 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{1}{2} - a\right)t, \quad z_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}ax + a\left(\frac{1}{2} - a\right)t, \end{aligned}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4°. Решения из п. 2° являются специальными случаями решения типа бегущей волны

$$w(x, t) = w(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w_{\xi\xi}'' - \lambda w_{\xi}' = w(1-w)(a-w).$$

Подстановка $w_{\xi}' = \lambda y(w)$ приводит к уравнению Абеля второго рода:

$$yy_w' - y = \lambda^{-2} [aw - (a+1)w^2 + w^3].$$

Общее решение этого уравнения при $a = -1$ и $\lambda = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 а).

5°. Укажем два преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения.

Замена $u = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = 1 - a$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(1-u)(1-a-u).$$

Преобразование

$$v(z, \tau) = 1 - \frac{1}{a}w(x, t), \quad \tau = a^2 t, \quad z = ax$$

приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_2 = 1 - a^{-1}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v(1-v) \left(1 - \frac{1}{a} - v \right).$$

Поэтому, если функция $w = w(x, t; a)$ является решением рассматриваемого уравнения, то функции

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - w(x, t; 1 - a), \\ w_2 &= a - aw(ax, a^2 t; 1 - a^{-1}) \end{aligned}$$

также будут решениями этого уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

© *Литература для уравнения 1.1.2.4:* Т. Kawahara, М. Tanaka (1983), М. С. Nucci, Р. А. Clarkson (1992), Н. Н. Ibragimov (1994, р. 142), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 392).

5. $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3.$

1°. Решения уравнения определяются по формулам

$$w(x, t) = \frac{\beta}{F} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda, \quad \beta = \pm \sqrt{-\frac{2a}{b_3}}, \quad (1)$$

где λ — любой корень кубического уравнения

$$b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0 \quad (2)$$

а вид функции $F = F(x, t)$ зависит от коэффициентов уравнения.

Введем обозначения:

$$p_1 = -3a, \quad p_2 = \beta(b_2 + 3b_3\lambda), \quad q_1 = -\frac{\beta}{2a}(b_2 + 3b_3\lambda), \quad q_2 = -\frac{1}{2a}(3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1). \quad (3)$$

Возможны четыре ситуации.

1.1. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 \neq 4q_2$ имеем

$$\begin{aligned} F(x, t) &= C_1 \exp(k_1 x + s_1 t) + C_2 \exp(k_2 x + s_2 t) + C_3, \\ k_n &= -\frac{1}{2}q_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{q_1^2 - 4q_2}, \quad s_n = -k_n^2 p_1 - k_n p_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n = 1, 2$.

1.2. При $q_2 \neq 0, q_1^2 = 4q_2$ имеем

$$\begin{aligned} F(x, t) &= C_1 \exp(kx + s_1 t) + C_2(kx + s_2 t) \exp(kx + s_1 t) + C_3, \\ k &= -\frac{1}{2}q_1, \quad s_1 = -\frac{1}{4}p_1 q_1^2 + \frac{1}{2}p_2 q_1, \quad s_2 = -\frac{1}{2}p_1 q_1^2 + \frac{1}{2}p_2 q_1. \end{aligned}$$

1.3. При $q_2 = 0, q_1 \neq 0$ имеем

$$F(x, t) = C_1(x - p_2 t) + C_2 \exp[-q_1 x + q_1(p_2 - p_1 q_1)t] + C_3.$$

1.4. При $q_2 = q_1 = 0$ имеем

$$F(x, t) = C_1(x - p_2 t)^2 + C_2(x - p_2 t) - 2C_1 p_1 t + C_3.$$

Пример. Пусть

$$a = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 = -bw(w - \lambda_1)(w - \lambda_2).$$

Тогда по формулам (1)–(4) при $\lambda = 0$ можно получить решение

$$w(x, t) = \frac{C_1 \lambda_1 \exp(z_1) + C_2 \lambda_2 \exp(z_2)}{C_1 \exp(z_1) + C_2 \exp(z_2) + C_3},$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b} \lambda_1 x + \frac{1}{2}b \lambda_1 (\lambda_1 - 2\lambda_2)t, \\ z_2 &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b} \lambda_2 x + \frac{1}{2}b \lambda_2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)t. \end{aligned}$$

2°. Существует решение типа бегущей волны $w = w(x + \gamma t)$.

© *Литература:* В. Г. Данилов, П. Ю. Сыбоцев (1991), Н. А. Кудряшов (1993), Р. А. Clarkson, E. L. Mansfield (1994).

1.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k$.

1°. Пусть функция $w(x, t)$ является решением данного уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{k-1} x + C_2, C_1^{2k-2} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \lambda w'_z + bw^k = 0.$$

3°. Автомоделное решение:

$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{1}{k-1}u + bu^k = 0.$$

4°. При $k = 2$ и $k = 3$ см. соответственно уравнения 1.1.1.1 и 1.1.2.1, где приведены другие решения.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m$.

Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (специальный случай). Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x, t) = [\beta + C \exp(\lambda t \pm \mu x)]^{\frac{2}{1-m}}, \quad (1)$$

$$w(x, t) = [-\beta + C \exp(\lambda t \pm \mu x)]^{\frac{2}{1-m}}, \quad (2)$$

где C — произвольная постоянная, а параметры λ, μ, β определяются по формулам

$$\lambda = \frac{a(1-m)(m+3)}{2(m+1)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{a(1-m)^2}{2(m+1)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

2°. Решения (1) и (2) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \pm \mu x + \lambda t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$\mu^2 w''_{zz} - \lambda w'_z + aw + bw^m = 0. \quad (3)$$

При

$$\mu = \sqrt{\frac{a(m+3)^2}{2(m+1)}}, \quad \lambda = \mu^2 \quad (m \neq \pm 1, m \neq -3)$$

решение уравнения (3) можно представить в параметрическом виде

$$z = \frac{m+3}{m-1} \ln f(\zeta), \quad w = \zeta [f(\zeta)]^{\frac{2}{m-1}},$$

где функция $f(\zeta)$ определяется по формуле

$$f(\zeta) = \pm \int \left[C_1 - \frac{4b}{a(m-1)^2} \zeta^{m+1} \right]^{-1/2} d\zeta + C_2,$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Уравнение (3) заменой $U(w) = \mu^2 \lambda^{-1} w'_z$ приводится к уравнению Абеля второго рода:

$$UU'_w - U = a_1 w + b_1 w^m, \quad a_1 = -a\mu^2 \lambda^{-2}, \quad b_1 = -b\mu^2 \lambda^{-2}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 а) приведены точные решения этого уравнения для некоторых пар чисел m и a_1 (b_1 — любое).

● Литература: Р. Калиарпан (1984), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 393).

$$3. \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m + cw^{2m-1}.$$

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x, t) = [\beta + C \exp(\lambda t + \mu x)]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная, а параметры β , λ , μ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \quad (2)$$

$$\mu^2 - (1-m)\lambda + a(1-m)^2 = 0, \quad (3)$$

$$\mu^2 - \lambda + (1-m)[2a + (b/\beta)] = 0. \quad (4)$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(4) дает четыре набора искоемых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

2°. Решение (1) является частным случаем более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0. \quad (5)$$

Подстановка $U(w) = w'_z$ приводит (5) к уравнению Абеля

$$UU'_w - \sigma U + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0,$$

общие решения которого для некоторых значений m (на параметры a , b , c накладываются ограничения) приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 а).

3°. Подстановка

$$u = w^{1-m}$$

приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m}{1-m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a(1-m)u^2 + b(1-m)u + c(1-m). \quad (6)$$

Частному решению этого уравнения вида $u = \beta + C \exp(\omega t + \mu x)$ соответствует решение (1).

При $a = 0$ уравнение (6) имеет также другие решения типа бегущей волны

$$u(x, t) = (1-m) \left(bt \pm \sqrt{-\frac{c}{m}} x \right) + C.$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 393–394).

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2w^{2m-1}.$$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} - \lambda w'_z + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2w^{2m-1} = 0. \quad (1)$$

Можно показать, что при $\lambda = 1$ однопараметрическое семейство решений уравнения (1) удовлетворяет уравнению первого порядка

$$w'_z = w - bw^m + \frac{a}{mb}. \quad (2)$$

Интегрируя (2), получим решение (2) в неявной форме (A — любое):

$$\int \frac{dw}{a + mbw - mb^2w^m} = \frac{1}{mb} z + A. \quad (3)$$

В частном случае $a = 0$ из формулы (3) имеем

$$w(z) = \{C \exp[(1-m)z] + b\}^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

1.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_1(bx + ct)^k + s_2 w^n.$$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = s_1 z^k + s_2 w^n$.

$$2. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s(w + bx + ct)^k.$$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = s(w + z)^k$.

$$3. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s(bx + ct)^k w^n.$$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = sz^k w^n$.

$$4. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n x^m w^k.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C^{2n+m+2} w(C^{k-1}x, C^{2k-2}t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w = t^{\frac{2n+m+2}{2(1-k)}} u(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{2n+m+2}{2(k-1)}u + b\xi^m u^k = 0.$$

$$5. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + se^{bx+ct} w^n.$$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = se^z w^n$.

1.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(w)$

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial w}{\partial x} + cw + k_1 w^{n_1} + k_2 w^{n_2}.$$

Частный случай уравнения 1.6.2.3 при $f(t) = b$. Переходя от t, x к новым переменным $t, z = x + bt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw + k_1 w^{n_1} + k_2 w^{n_2},$$

частные случаи которого рассматриваются в разд. 1.1.1 — 1.1.3.

$$2. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнение Бюргерса (Burgers). Используется для описания волновых процессов в газовой динамике, гидродинамике, акустике.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
 w(x, t) &= \frac{A - x}{B + t}, \\
 w(x, t) &= \lambda + \frac{2}{x + \lambda t + A}, \\
 w(x, t) &= \frac{4x + 2A}{x^2 + Ax + 2t + B}, \\
 w(x, t) &= \frac{6(x^2 + 2t + A)}{x^3 + 6xt + 3Ax + B}, \\
 w(x, t) &= \frac{2\lambda}{1 + A \exp(-\lambda^2 t - \lambda x)}, \\
 w(x, t) &= -\lambda + A \frac{\exp[A(x - \lambda t)] - B}{\exp[A(x - \lambda t)] + B}, \\
 w(x, t) &= -\lambda + 2A \operatorname{th}[A(x - \lambda t) + B], \\
 w(x, t) &= \frac{\lambda}{\lambda^2 t + A} \left[2 \operatorname{th} \left(\frac{\lambda x + B}{\lambda^2 t + A} \right) - \lambda x - B \right], \\
 w(x, t) &= -\lambda + 2A \operatorname{tg}[A(\lambda t - x) + B], \\
 w(x, t) &= \frac{2\lambda \cos(\lambda x + A)}{B \exp(\lambda^2 t) + \sin(\lambda x + A)}, \\
 w(x, t) &= \frac{2A}{\sqrt{\pi(t + \lambda)}} \exp \left[-\frac{(x + B)^2}{4(t + \lambda)} \right] \left[A \operatorname{erf} \left(\frac{x + B}{2\sqrt{t + \lambda}} \right) + C \right]^{-1},
 \end{aligned}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные, $\operatorname{erf} z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

3°. Другие решения можно получить по формуле (преобразование Хопфа-Коула):

$$w(x, t) = \frac{2}{u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — решение линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Об этом уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

Замечание. Преобразование (1) и уравнение 1.6.3.2, которое является обобщением уравнения Бюргера, встречались существенно ранее в работе Форсайта (A. R. Forsyth, 1906).

4°. *Задача Коши.* В области $-\infty < x < \infty$ задано начальное условие

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Решение задачи Коши:

$$w(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \ln F(x, t),$$

где

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} - \frac{1}{2} \int_0^\xi f(\xi') d\xi' \right] d\xi.$$

5°. Уравнение Бюргера связано с линейным уравнением теплопроводности (2) преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} uw &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial(uw)}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned}$$

© Литература для уравнения 1.1.5.2: J. M. Burgers (1948), E. Hopf (1950), J. Cole (1951), О. В. Руденко, С. И. Солюян (1975), N. Н. Ибрагимов (1994, pp. 180–182), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 395–396).

$$3. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Ненормированное уравнение Бюргерса. Растяжение независимых переменных по формулам $x = \frac{a}{b}z$, $t = \frac{a}{b^2}\tau$ приводит к уравнению 1.1.5.2:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \frac{\partial w}{\partial x} + c.$$

Преобразование

$$w = u(z, t) + ct, \quad z = x + \frac{1}{2}bct^2,$$

приводит к уравнению Бюргерса 1.1.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + bu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$$5. \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma w \frac{\partial w}{\partial x} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$$

1°. Пусть функция $w(x, t)$ является решением. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(\pm x - C_1 \sigma e^{bt} + C_2, t + C_3) + C b e^{bt},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \sigma w w'_z - \lambda w'_z + bw = 0.$$

3°. Вырожденное решение:

$$w(x, t) = \frac{b(x + C_1)}{\sigma(1 + C_2 e^{-bt})}.$$

$$6. \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma w \frac{\partial w}{\partial x} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1 w + b_0.$$

1°. Пусть функция $w(x, t)$ является решением. Тогда функция

$$w_1 = w(x - C_1 \sigma e^{b_1 t} + C_2, t + C_3) + C b_1 e^{b_1 t},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование

$$w = u(z, t) - \frac{b_0}{b_1}, \quad z = x + \sigma \frac{b_0}{b_1} t,$$

приводит к более простому уравнению 1.1.5.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial z} = a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_1 u.$$

$$7. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b^2}{9a} w(w - k)(w + k).$$

Точное решение:

$$w = \frac{k(-1 + C_1 e^{4\lambda x})}{1 + C_1 e^{4\lambda x} + C_2 e^{2\lambda x + bk\lambda t}}, \quad \lambda = \frac{bk}{12a},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ Решение получил К. А. Волосов (2000).

$$8. \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma w \frac{\partial w}{\partial x} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3.$$

Решения уравнения определяются по формуле

$$w(x, t) = \frac{\beta}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda. \quad (1)$$

Здесь β и λ — любые из корней соответственно квадратного и кубического уравнений

$$\begin{aligned} b_3 \beta^2 + \sigma \beta + 2a &= 0, \\ b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 &= 0, \end{aligned}$$

а вид функции $z = z(x, t)$ зависит от коэффициентов уравнения.

1°. Случай $b_3 \neq 0$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\beta\sigma - 3a, & p_2 &= \lambda\sigma + \beta b_2 + 3\beta\lambda b_3, \\ q_1 &= -\frac{\beta b_2 + 3\beta\lambda b_3}{\beta\sigma + 2a}, & q_2 &= -\frac{3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1}{\beta\sigma + 2a}. \end{aligned}$$

Возможны четыре ситуации.

1.1. При $q_2 \neq 0, q_1^2 \neq 4q_2$:

$$\begin{aligned} z(x, t) &= C_1 \exp(k_1 x + s_1 t) + C_2 \exp(k_2 x + s_2 t) + C_3, \\ k_n &= -\frac{1}{2} q_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{q_1^2 - 4q_2}, \quad s_n = -k_n^2 p_1 - k_n p_2, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n = 1, 2$.

1.2. При $q_2 \neq 0, q_1^2 = 4q_2$:

$$\begin{aligned} z(x, t) &= C_1 \exp(kx + s_1 t) + C_2 (kx + s_2 t) \exp(kx + s_1 t) + C_3, \\ k &= -\frac{1}{2} q_1, \quad s_1 = -\frac{1}{4} p_1 q_1^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1, \quad s_2 = -\frac{1}{2} p_1 q_1^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1. \end{aligned}$$

1.3. При $q_2 = 0, q_1 \neq 0$:

$$z(x, t) = C_1 (x - p_2 t) + C_2 \exp[-q_1 x + q_1 (p_2 - p_1 q_1) t] + C_3.$$

1.4. При $q_2 = q_1 = 0$:

$$z(x, t) = C_1 (x - p_2 t)^2 + C_2 (x - p_2 t) - 2C_1 p_1 t + C_3.$$

2°. Случай $b_3 = 0, b_2 \neq 0$. Решения определяются по формуле (1) при

$$\beta = -\frac{2a}{\sigma}, \quad z(x, t) = C_1 + C_2 \exp \left[Ax + A \left(\frac{b_1 \sigma}{2b_2} + \frac{2ab_2}{\sigma} \right) t \right], \quad A = \frac{\sigma(b_1 + 2b_2 \lambda)}{2ab_2},$$

где λ — корень квадратного уравнения $b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0$.

3°. Случай $b_3 = b_2 = 0$. См. уравнения 1.1.5.4–1.1.5.6.

⊙ Литература: Н. А. Кудряшов (1993).

$$9. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w (C_1^m x + C_2, C_1^{2m} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x, t) = \left[C \exp \left(-\frac{\lambda m}{a} z \right) + \frac{b}{\lambda(m+1)} \right]^{-1/m}, \quad z = x + \lambda t,$$

где C, λ — произвольные постоянные. О более широком семействе решений типа бегущей волны см. в 1.6.3.7 при $f(w) = bw^m$.

3°. Существует автомодельное решение вида

$$w(\xi, t) = |t|^{-\frac{1}{2m}} \varphi(\xi), \quad \xi = x|t|^{-\frac{1}{2}}.$$

$$10. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \ln w + c) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1°. Пусть функция $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = e^{C_1} w(x + bC_1 t + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x, t) = \exp\left(\frac{C_1 - x}{b(t + C_2)} + \frac{a}{b^2} \frac{\ln|t + C_2|}{t + C_2} - \frac{c}{b}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x, t) = e^{\lambda t} u(z), \quad z = x + \frac{1}{\lambda} b \lambda t^2 + kt,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a u''_{zz} + (b \ln u + c - k) u'_z - \lambda u = 0.$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

$$1.1.6. \text{ Уравнения вида } \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$$

$$1. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c) \frac{\partial w}{\partial x} + sw^k.$$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = sw^k$.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1 e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a w''_{zz} + b z w'_z + s w^k = 0.$$

$$2. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b t^n \frac{\partial w}{\partial x} + c w + k_1 w^{m_1} + k_2 w^{m_2}.$$

Частный случай уравнения 1.6.2.3 при $f(t) = b t^n$. Переходя от t, x к новым переменным

$t, z = x + \frac{b}{n+1} t^{n+1}$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c w + k_1 w^{m_1} + k_2 w^{m_2},$$

частные случаи которого рассматриваются в разд. 1.1.1 — 1.1.3.

$$3. \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{t} w + b w \frac{\partial w}{\partial x} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Модифицированное уравнение Бюргерса.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + C_2, C_1^2 t),$$

$$w_2 = w(x - b C_3 t^{1-k}, t) + C_3 (1 - k) t^{-k} \quad \text{при } k \neq 1,$$

$$w_3 = w(x - b C_3 \ln|t|, t) + C_3 t^{-1} \quad \text{при } k = 1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения (одно пространственно-однородное и два линейных по переменной x):

$$\begin{aligned} w(t) &= Ct^{-k}, \\ w(x, t) &= \frac{(1-k)x + C_1}{C_2 t^k + bt} \quad \text{при } k \neq 1, \\ w(x, t) &= \frac{x + C_1}{t(C_2 + b \ln |t|)} \quad \text{при } k = 1, \end{aligned}$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомоделное решение:

$$w(x, t) = u(z)t^{-1/2}, \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{zz} + \left(\frac{1}{2}z - bu\right)u'_z + \left(\frac{1}{2} - k\right)u = 0.$$

⊙ Литература: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 17).

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} + bw \frac{\partial w}{\partial x} = a \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{w}{x^2} \right].$$

Цилиндрическое уравнение Бюргерса. Переменная x играет роль радиальной координаты.

Точное решение:

$$w(x, t) = -\frac{2a}{b} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

где функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности с осевой симметрией

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right).$$

⊙ Литература: S. Nemeş, E. J. Schmah, Z. E. Musielak (1996).

$$5. \frac{\partial w}{\partial t} + bw \frac{\partial w}{\partial x} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cx^k \frac{\partial w}{\partial x} + ckx^{k-1}w.$$

Точное решение:

$$w(x, t) = -\frac{2a}{b} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

где функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + cx^k \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

$$6. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \frac{\partial w}{\partial x} + c(x + st)^k.$$

Частный случай уравнения 1.6.3.2 при $f(x, t) = c(x + st)^k$.

$$7. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \frac{\partial w}{\partial x} + cx^k + st^n.$$

Частный случай уравнения 1.6.3.2 при $f(x, t) = cx^k + st^n$.

$$8. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + cw^k) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1 e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + (bz + cw^k)w'_z = 0.$$

⊙ Литература: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2004, р. 14).

$$9. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct + s) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Частный случай уравнения 1.6.3.11 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct + s$, $h(w) = 0$.

Переходя от t, x к новым переменным $t, z = x + \frac{1}{2}ct^2 + st$, получаем уравнение вида 1.1.5.9:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$10. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct^k) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Частный случай уравнения 1.6.3.11 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct^k$, $h(w) = 0$.

Переходя от t, x к новым переменным $t, z = x + \frac{c}{k+1}t^{k+1}$, получаем уравнение вида 1.1.5.9:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$11. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_1 (bx + ct)^k w^n \frac{\partial w}{\partial x} + s_2 (bx + ct)^p w^q.$$

Частный случай уравнения 1.6.3.13 при $f(z, w) = s_1 z^k w^n$, $g(z, w) = s_2 z^p w^q$.

1.1.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$

$$1. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{a}{b} \ln |Ax + B| + C, \\ w(x, t) &= A^2 bt \pm Ax + B, \\ w(x, t) &= -\frac{(x+A)^2}{4bt} - \frac{a}{2b} \ln t + B, \\ w(x, t) &= \frac{a}{b} \ln |x^2 + 2at + Ax + B| + C, \\ w(x, t) &= \frac{a}{b} \ln |x^3 + 6axt + Ax + B| + C, \\ w(x, t) &= \frac{a}{b} \ln |x^4 + 12ax^2t + 12a^2t^2 + A| + B, \\ w(x, t) &= -\frac{a^2 \lambda^2}{b} t + \frac{a}{b} \ln |\cos(\lambda x + A)| + B, \end{aligned}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные.

2°. Подстановка

$$w(x, t) = \frac{a}{b} \ln |u(x, t)|$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Об этом уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

$$2. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b.$$

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu.$$

$$3. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + cw + s.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t + C_2) + C_3 e^{ct},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x :

$$w(x, t) = \frac{c(x + C_2)^2}{C_1 e^{-ct} - 4b} - \frac{2a}{C_1} e^{ct} \ln |C_1 e^{-ct} - 4b| + C_3 e^{ct} - \frac{s}{c}.$$

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + aw^2.$$

1°. Точные решения при $a < 0$:

$$w(x, t) = C_1 \exp(-at \pm x\sqrt{-a}),$$

$$w(x, t) = \frac{1}{C_1 - at} + \frac{C_2}{(C_1 - at)^2} \exp(-at \pm x\sqrt{-a}),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является решением в виде произведения функций разных аргументов, а второе — решением с обобщенным разделением переменных.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных при $a < 0$:

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) [A \exp(x\sqrt{-a}) + B \exp(-x\sqrt{-a})],$$

где A, B — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = a(\varphi^2 + 4AB\psi^2), \quad (1)$$

$$\psi'_t = a(2\varphi - 1)\psi. \quad (2)$$

Деля почленно правые и левые части уравнений (1) и (2), можно получить уравнение первого порядка $(2\varphi - 1)\psi\varphi'_\psi = \varphi^2 + 4AB\psi^2$.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных при $a > 0$:

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \cos(x\sqrt{a} + C),$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = a(\varphi^2 + \psi^2), \quad (3)$$

$$\psi'_t = a(2\varphi - 1)\psi. \quad (4)$$

Деля почленно правые и левые части уравнений (3) и (4), можно получить уравнение первого порядка.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 399).

$$5. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + bcw^2 + sw + k.$$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных при $c < 0$:

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \exp(\pm x\sqrt{-c}), \quad (1)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = bc\varphi^2 + s\varphi + k, \quad (2)$$

$$\psi'_t = (2bc\varphi + s - ac)\psi. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (2), (3) определяется формулами

$$\varphi(t) = \lambda + \frac{2bc\lambda + s}{C_1 \exp[-(2bc\lambda + s)t] - bc},$$

$$\psi(t) = \frac{C_1 C_2 \exp[-(2bc\lambda + s + ac)t]}{\{C_1 \exp[-(2bc\lambda + s)t] - bc\}^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ — корни квадратного уравнения

$$bc\lambda^2 + s\lambda + k = 0.$$

2°. О более сложных решениях с обобщенным разделением переменных, содержащих гиперболические и тригонометрические функции x , см. уравнение 1.6.6.2 при $f, g, h = \text{const}$.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 399).

$$6. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + cw^2 + st^n w + kt^m.$$

Частный случай уравнения 1.6.6.2 при $f = \text{const}$, $g = st^n$, $h = kt^m$.

1.1.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial w}{\partial x} + c.$$

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu.$$

$$2. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + bt^n \frac{\partial w}{\partial x} + ct^m.$$

Частный случай уравнения 1.6.5.4 при $f(x, t) = bt^n$ и $g(x, t) = ct^m$.

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bt^n \frac{\partial u}{\partial x} + ct^m u.$$

$$3. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + ct^m w + st^k.$$

Частный случай уравнения 1.6.6.1 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^k$.

$$4. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + ce^{\mu t} w + se^{\nu t}.$$

Частный случай уравнения 1.6.6.1 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = se^{\nu t}$.

$$5. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = a/w$.

Замена

$$u = \begin{cases} \frac{1}{a+1} w^{a+1} & \text{при } a \neq -1, \\ \ln |w| & \text{при } a = -1 \end{cases}$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

$$6. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^k \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = aw^k$. При $k = 0$ см. уравнение 1.1.7.1; при $k = -1$ см. уравнение 1.1.8.5.

Замена

$$u = \int \exp \left(\frac{a}{k+1} w^{k+1} \right) dw$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

$$7. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^m \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (bx + ct + s) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = aw^m$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + s$.

1.1.9. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2} C_2 w (C_1 x + C_3, C_2 t + C_4),$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, t) = \frac{x^2 + Ax + B}{C - 2at},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$ak^2 \int \frac{dw}{\lambda \ln |w| + C_1} = kx + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

4°. О других точных решениях см. уравнение 1.1.9.20 при $m = 1$, пп. 5° – 8°.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b.$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w (C_1 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x, t) = Ax + B + bt,$$

$$w(x, t) = \frac{x^2 + Ax + B}{C - 2at} - \frac{b}{4a}(C - 2at),$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным, а второе — решением с обобщенным разделением переменных.

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 w w''_{zz} - \lambda w'_z + b = 0.$$

4°. Автомоделное решение:

$$w = tU(\xi), \quad \xi = x/t,$$

где функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU U''_{\xi\xi} + \xi U'_\xi - U + b = 0.$$

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + c.$

1°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x, t) = Ae^{bt} x + Be^{bt} - \frac{c}{b},$$

$$w(x, t) = \frac{b(x+A)^2 - Bce^{-bt} - 2act + C}{Bbe^{-bt} - 2a},$$

где A, B, C — произвольные постоянные (первое решение является вырожденным).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 w w''_{zz} - \lambda w'_z + bw + c = 0.$$

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^2 + kw + s.$$

Частный случай уравнения 1.1.9.9 при $b = 0$.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

$$5. \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2 + (ct + d)w + st + k.$$

Частный случай уравнения 1.6.9.3 при $f(t) = ct + d$ и $g(t) = st + k$.

$$6. \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial w}{\partial x} + (ct + d)w + pt + k.$$

Частный случай уравнения 1.6.10.2 при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + d$, $s(t) = pt + k$.

$$7. \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{3}a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b.$$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x, t) = \frac{1}{a} [3Ax^3 + f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t)],$$

где A — произвольная постоянная, а функции $f_2(t)$, $f_1(t)$, $f_0(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_2' &= 6Af_1 - \frac{2}{3}f_2^2, \\ f_1' &= 18Af_0 - \frac{2}{3}f_1f_2, \\ f_0' &= 2f_0f_2 - \frac{2}{3}f_1^2 + ab. \end{aligned}$$

Общее решение этой системы при $A \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 3 \int \varphi(t) dt + 3B, \quad f_1(t) = \frac{1}{A} \left[\int \varphi(t) dt + B \right]^2 + \frac{1}{2A} \varphi(t), \\ f_0(t) &= \frac{1}{9A^2} \left[\int \varphi(t) dt + B \right]^3 + \frac{1}{6A^2} \varphi(t) \left[\int \varphi(t) dt + B \right] + \frac{1}{36A^2} \varphi'(t), \end{aligned}$$

где функция $\varphi(t)$ задана неявно

$$\int (C_1 + 72A^2 ab \varphi - 8\varphi^3)^{-1/2} d\varphi = \pm t + C_2;$$

B , C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

⊙ Литература: J. R. King (1993), V. A. Galaktionov (1995).

$$8. \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + c \frac{\partial w}{\partial x} + pw + q.$$

Частный случай уравнения 1.6.10.2 при $f(t) = b$, $g(t) = c$, $h(t) = p$, $s(t) = q$.

$$9. \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + cw^2 + kw + s.$$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее экспоненциальную функцию x :

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \exp(\pm \lambda x), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi_t' = c\varphi^2 + k\varphi + s, \quad (2)$$

$$\psi_t' = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + k)\psi. \quad (3)$$

Интегрируя (2), получим

$$\int \frac{d\varphi}{c\varphi^2 + k\varphi + s} = t + C_1.$$

Вычислив интеграл, можно найти явную зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Решение уравнения (3) выражается через функцию $\varphi(t)$ по формуле

$$\psi(t) = C_2 \exp \left[\int (a\lambda^2 \varphi + 2c\varphi + k) dt \right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Имеются также решения с обобщенным разделением переменных, содержащие гиперболические и тригонометрические функции (A — произвольная постоянная):

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \operatorname{ch}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b} \right)^{1/2};$$

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \operatorname{sh}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b} \right)^{1/2};$$

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \cos(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{c}{a+b} \right)^{1/2}.$$

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (эти системы могут быть сведены к одному уравнению первого порядка).

Об этих решениях см. пп. 2° – 4° уравнения 1.6.10.1 при $f(t) = k, g(t) = s$.

● Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 21).

10. $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Замена $w = 1/v$ приводит к уравнению вида 1.1.10.3:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Поэтому решения исходного уравнения выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

по формулам

$$w = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x = u.$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x, t)$, следует исключить y .

● Литература: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 213).

11. $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2.$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w (C_1^{-1} x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование $w = 1/u, \tau = at$ приводит к уравнению вида 1.1.11.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{b}{a}.$$

12. $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^{-1}.$

Частный случай уравнения 1.1.9.21 при $m = 2$ и $b = -1$.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w (\pm C_1^2 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x, t) = \pm \left[C_1(x + C_2)^2 + C_3 \exp(2aC_1 t) - \frac{b}{aC_1} \right]^{1/2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

$$13. \frac{\partial w}{\partial t} = aw^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^{-1}.$$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x, t) = \pm \left[bC_1 e^{2bt} (x + C_2)^2 + C_3 F(t) + 2cF(t) \int \frac{dt}{F(t)} \right]^{1/2}, \quad F(t) = \exp(aC_1 e^{2bt} + 2bt),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

$$14. \frac{\partial w}{\partial t} = w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} w \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = \frac{C_2 x^2 + C_1 x + C_0}{\sqrt{(C_1^2 - 4C_0 C_2)t + C_3}},$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

$$15. \frac{\partial w}{\partial t} = w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} w \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + aw + b.$$

Решение с обобщенным разделением переменных

$$w = \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_2 = \varphi_2(2\varphi_0\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2) + a\varphi_2,$$

$$\varphi'_1 = \varphi_1(2\varphi_0\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2) + a\varphi_1,$$

$$\varphi'_0 = \varphi_0(2\varphi_0\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2) + a\varphi_0 + b.$$

● Литература: V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov (1995).

$$16. \frac{\partial w}{\partial t} = aw^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Частный случай уравнения 1.1.9.20 при $m = 3$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x, t) = a^{-1/3} [3Ax^3 + f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t)]^{1/3}.$$

Здесь

$$f_2(t) = 3 \int \varphi(t) dt + 3B, \quad f_1(t) = \frac{1}{A} \left[\int \varphi(t) dt + B \right]^2 + \frac{1}{2A} \varphi(t),$$

$$f_0(t) = \frac{1}{9A^2} \left[\int \varphi(t) dt + B \right]^3 + \frac{1}{6A^2} \varphi(t) \left[\int \varphi(t) dt + B \right] + \frac{1}{36A^2} \varphi'_t(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задана неявно

$$\int (C_1 - 8\varphi^3)^{-1/2} d\varphi = \pm t + C_2;$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Полагая в последней формуле $C_1 = 0$, получим функцию φ в явном виде $\varphi = -\frac{1}{2}(t + C_2)^{-2}$.

● Литература: Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

$$17. \frac{\partial w}{\partial t} = aw^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^{-2}.$$

Частный случай уравнения 1.1.9.21 при $m = 3$ и $b = -2$.

Замена $w = u^{1/3}$ приводит к уравнению вида 1.1.9.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3} a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3b.$$

Поэтому рассматриваемое уравнение имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x, t) = a^{-1/3} [3Ax^3 + f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t)]^{1/3}.$$

$$18. \frac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^{-1}.$$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x, t) = \pm \sqrt{\varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)},$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\varphi'_t &= \frac{1}{2}a\varphi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2b\varphi, \\ \psi'_t &= \frac{1}{2}a\psi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2b\psi, \\ \chi'_t &= \frac{1}{2}a\chi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2b\chi + 2c.\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\varphi = C\psi$, где C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov (1995).

$$19. \frac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^m w^5.$$

Частный случай уравнения 1.6.11.1 при $f(x) = bx^m$.

$$20. \frac{\partial w}{\partial t} = aw^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2/m} C_2^{1/m} w(\pm C_1 x + C_3, C_2 t + C_4),$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}w(x) &= Ax + B, \\ w(x, t) &= (\pm \beta x + \beta \lambda t + A)^{1/m}, \quad \beta = \frac{m\lambda}{a(1-m)}, \\ w(x, t) &= \left[\frac{m(x-A)^2}{2a(2-m)(B-t)} \right]^{1/m}, \\ w(x, t) &= \left[A|t+B|^{\frac{m}{m-2}} + \frac{m}{2a(m-2)} \frac{(x+C)^2}{t+B} \right]^{1/m}, \\ w(x, t) &= \left[\frac{(x+A)^2}{\varphi(t)} + B(x+A)^m |\varphi(t)|^{\frac{m(m-3)}{2}} \right]^{1/m}, \quad \varphi(t) = C + \frac{2a(m-2)}{m} t,\end{aligned}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные (первое решение является вырожденным).

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{\lambda w^{1-m} + C_1} = \frac{\beta x + \lambda t + C_2}{a\beta^2(1-m)},$$

где C_1, C_2, β, λ — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение, а значению $C_1 = 0$ — второе решение в п. 2°.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $f = f(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $amf''_{xx} + \lambda f^{1-m} = 0$ (его решение может быть записано в неявном виде).

5°. Автомоделное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $2aw''w''_{zz} + zw'_z = 0$.

6°. Автомодельное решение более общего вида:

$$w = t^{\beta} U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{m\beta+1}{2}},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU^m U''_{\zeta\zeta} = \beta U - \frac{1}{2}(m\beta + 1)\zeta U'.$$

Это уравнение является обобщенно-однородным и поэтому допускает понижение порядка.

7°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w = e^{-2\lambda t} \varphi(\xi), \quad \xi = xe^{\lambda mt},$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi^m \varphi''_{\xi\xi} = \lambda m \xi \varphi'_{\xi} - 2\lambda \varphi.$$

Это уравнение является обобщенно-однородным и поэтому допускает понижение порядка.

8°. Точное решение:

$$w = (At + B)^{-1/m} \psi(u), \quad u = x + k \ln(At + B),$$

где A, B, k — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(u)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\psi^m \psi''_{uu} = Ak\psi'_u - \frac{A}{m}\psi.$$

9°. Замена $u = w^{1-m}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{\frac{m}{1-m}} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.10.

21.
$$\frac{\partial w}{\partial t} = aw^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k.$$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w (\pm C_1^{k-m-1} x + C_2, C_1^{2k-2} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw^m w''_{zz} - \lambda w'_z + bw^k = 0.$$

3°. Автомодельное решение при $k \neq 1$:

$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{k-m-1}{2(1-k)}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au^m u''_{\xi\xi} + \frac{m-k+1}{2(1-k)} \xi u'_\xi + bu^k - \frac{1}{1-k} u = 0.$$

4°. При $m \neq 1$ подстановка $u = w^{1-m}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{\frac{m}{1-m}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(1-m)u^{\frac{k-m}{1-m}},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.11.

5°. При $k = 1$ преобразование

$$w(x, t) = e^{bt} U(x, \tau), \quad \tau = \frac{1}{bm} e^{bmt} + \text{const},$$

приводит к уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = aU^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

22.
$$\frac{\partial w}{\partial t} = aw^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^n \frac{\partial w}{\partial x} + ct^k w.$$

Частный случай уравнения 1.6.11.4 при $f(t) = bt^n$ и $g(t) = ct^k$.

1.1.10. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right)$

► Уравнения этого вида допускают решения типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$.

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = 1$.

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= C_1 x + a C_1^2 t + C_2, \\ w(x, t) &= -\frac{(x + C_1)^2}{6a(t + C_2)} + \frac{C_3}{|t + C_2|^{1/3}}, \\ w(x, t) &= \frac{(x + C_1)^2}{C_2 - 6at} + C_3 |x + C_1|^{1/2} |C_2 - 6at|^{-5/8}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны в неявной форме:

$$w - C_2 \ln |w + C_2| = C_1 x + a C_1^2 t + C_3.$$

3°. Точное решение в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= (6at + C_1)\xi + C_2\xi^2 + C_3, \\ w &= -(6at + C_1)\xi^2 - 2C_2\xi^3. \end{aligned}$$

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= tf(\xi) + g(\xi), \\ w &= tf'_\xi(\xi) + g'_\xi(\xi), \end{aligned}$$

где функции $f = f(\xi)$ и $g(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_\xi)^2 - ff''_{\xi\xi} = af'''_{\xi\xi\xi}, \quad (1)$$

$$f'_\xi g'_\xi - fg''_{\xi\xi} = ag'''_{\xi\xi\xi}. \quad (2)$$

Порядок уравнения (1) может быть понижен на две единицы. Пусть известно некоторое решение уравнения (1). Уравнение (2) является линейным уравнением относительно функции g , которое имеет два линейно независимых частных решения

$$g_1 = 1, \quad g_2 = f(\xi).$$

Второе частное решение следует из сопоставления уравнений (1) и (2). Общее решение уравнения (1) можно представить в виде (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 а):

$$\begin{aligned} g(\xi) &= C_1 + C_2 f + C_3 \left(f \int \psi d\xi - \int f \psi d\xi \right), \\ f &= f(\xi), \quad \psi = \frac{1}{(f'_\xi)^2} \exp \left(-\frac{1}{a} \int f d\xi \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1) имеет частные решения:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= 6a(\xi + C)^{-1}, \\ f(\xi) &= Ce^{\lambda\xi} - a\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

где C, λ — произвольные постоянные. Первое решение (4) с учетом формул (1), (3) приводит к решению из п. 3°. Подставив вторую зависимость (4) в формулы (1), (3) можно получить другое решение.

Замечание. Указанные выше в пп. 3° и 4° решения получены с помощью преобразования Мизеса из решения уравнения гидродинамического пограничного слоя (см. 9.3.1.1, пп. 5° и 6°).

5°. О других решениях см. пп. 4° – 9° уравнения 1.1.10.7 при $m = 1$.

◎ Литература для уравнения 1.10.1.1: D. Zwillinger (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 22–23).

$$2. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -1$.

Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (C_1 x - a C_1^2 t + C_2)^{-1}, \\ w(x, y) &= (2at + C_1)(x + C_2)^{-2}, \\ w(x, y) &= \frac{2a(t + C_1)}{(x + C_2)^2 + C_3(t + C_1)^2}, \\ w(x, y) &= \frac{C_1^2}{C_2 + C_3 \exp(a C_2 t - C_1 x)}, \\ w(x, y) &= \frac{C_1^2}{at + C_2} \left[C_3 \exp\left(-\frac{C_1 x}{at + C_2}\right) - 1 + \frac{C_1 x}{at + C_2} \right]^{-1}, \\ w(x, y) &= \frac{2a C_1^2 t + C_2}{\operatorname{sh}^2(C_1 x + C_3)}, \\ w(x, y) &= \frac{C_2 - 2a C_1^2 t}{\operatorname{ch}^2(C_1 x + C_3)}, \\ w(x, y) &= \frac{2a C_1^2 t + C_2}{\cos^2(C_1 x + C_3)}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⊙ Литература: О. В. Воинов (1994), В. В. Пухначев (1995), С. Н. Аристов (1999), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 23).

$$3. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-2} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -2$.

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \pm (2C_1 x - 2a C_1^2 t + C_2)^{-1/2}, \\ w(x, t) &= \pm \frac{\sqrt{2at}}{x} \left[\ln \left(\frac{C_1}{x^2 t} \right) \right]^{-1/2}, \\ w(x, t) &= \pm \left[\frac{C_1(x + C_2)^2}{2a} + C_3 \exp(C_1 t) \right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, второе — автомодельным, а третье — решением с функциональным разделением переменных.

2°. Введем новую искомую функцию $z = z(x, t)$ по формуле $w = \frac{\partial z}{\partial x}$, а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x . В результате имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Это уравнение преобразованием годографа

$$x = u, \quad z = y, \quad (2)$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности для функции $u = u(y, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Преобразование (2) означает, что зависимая переменная z принимается за независимую переменную, а независимая переменная x — за зависимую переменную.

Решения исходного уравнения $w = w(x, t)$ выражаются через решения $u = u(y, t)$ линейного уравнения (3) по формулам

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1}, \quad x = u(y, t). \quad (4)$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x, t)$, из формул (4) следует исключить y .

3°. Преобразование

$$\bar{x} = \int_{x_0}^x w(y, t) dy + a \int_{t_0}^t \left[w^{-2}(x, \tau) \frac{\partial w}{\partial x}(x, \tau) \right]_{x=x_0} d\tau, \quad \bar{t} = t - t_0, \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{w(x, t)}, \quad (5)$$

где x_0 и t_0 — произвольные числа, переводит ненулевое решение $w(x, t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})$ линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = a \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}.$$

Обращение преобразования (5) определяется формулами

$$x = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{w}(x', \bar{t}) dx' + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \bar{w}(\bar{x}, t')}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{x}=\bar{x}_0} dt', \quad t = \bar{t} - \bar{t}_0, \quad w(x, t) = \frac{1}{\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})}.$$

⊙ Литература: M. L. Storm (1951), G. W. Bluman, S. Kumei (1980), A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierrez, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981), Н. Х. Ибрагимов (1983).

$$4. \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-4/3} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -4/3$ (допускает больше инвариантных решений, чем при $m \neq -4/3$).

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \frac{|A_1 B_2 - A_2 B_1|^{3/2} C_1^{-3/4}}{(A_2 x + B_2)^3} w \left(\frac{A_1 x + B_1}{A_2 x + B_2}, C_1 t + C_2 \right),$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ — произвольные постоянные ($A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$), также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= (\pm 2C_1 x - 3aC_1^2 t + C_2)^{-3/4}, \\ w(x, t) &= (at + C_1)^{3/4} [(x + C_2)(C_3 x + C_2 C_3 + 1)]^{-3/2}, \\ w(x, t) &= (\pm 2C_1 x^3 + C_2 x^4 - 3aC_1^2 x^4 t)^{-3/4}, \\ w(x, t) &= \left[\frac{(x + C_1)^2}{a(t + C_2)} + C_3(t + C_2)^2 \right]^{-3/4}, \\ w(x, t) &= \left[\frac{(x + C_1)^2}{a(t + C_2)} + C_3(t + C_2)^2 (x + C_1)^4 \right]^{-3/4}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, второе — решением в виде произведения функций разных аргументов, а остальные — решениями с функциональным разделением переменных.

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x, t) = [\varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)]^{-3/4},$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= -a \frac{3}{4} \varphi_1^2 + 2a\varphi_0\varphi_2, \\ \varphi'_1 &= -a\varphi_1\varphi_2 + 6a\varphi_0\varphi_3, \\ \varphi'_2 &= -a\varphi_2^2 + \frac{3}{2}a\varphi_1\varphi_3 + 12a\varphi_0\varphi_4, \\ \varphi'_3 &= -a\varphi_2\varphi_3 + 6a\varphi_1\varphi_4, \\ \varphi'_4 &= -\frac{3}{4}a\varphi_3^2 + 2a\varphi_2\varphi_4. \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной t .

4°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x, t) = x^{-3}F(y), \quad y = t - \frac{1}{x};$$

$$w(x, t) = x^{-3}G(z), \quad z = \frac{tx^2}{(x+1)^2}.$$

5°. О других решениях см. уравнение 1.1.10.7 при $m = -4/3$.

⊙ *Литература для уравнения 1.1.10.4*: Л. В. Овсянников (1959, 1978), N. H. Ibragimov (1994, pp. 120, 128), V. A. Galaktionov (1995), Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

$$5. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-2/3} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -2/3$.

1°. Точное решение:

$$w = (C - 4at)^{3/2} [(C - 4at)^{3/2} - x^2]^{-3/2}.$$

2°. Преобразование

$$t = \tau, \quad x = v, \quad w = 1/u,$$

где $\frac{\partial v}{\partial \xi} = u$, приводит к уравнению вида 1.1.10.4:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u^{-4/3} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right).$$

⊙ *Литература*: A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierrez, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 127, 128).

$$6. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-3/2} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Частный случай уравнения 1.1.11.5 при $b = 0$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x, t) = a^{2/3} [3Ax^3 + f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t)]^{-2/3}.$$

Здесь

$$f_2(t) = 3 \int \varphi(t) dt + 3B, \quad f_1(t) = \frac{1}{A} \left[\int \varphi(t) dt + B \right]^2 + \frac{1}{2A} \varphi(t),$$

$$f_0(t) = \frac{1}{9A^2} \left[\int \varphi(t) dt + B \right]^3 + \frac{1}{6A^2} \varphi(t) \left[\int \varphi(t) dt + B \right] + \frac{1}{36A^2} \varphi'(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задается неявно

$$\int (C_1 - 8\varphi^3)^{-1/2} d\varphi = \pm t + C_2;$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Полагая в последней формуле $C_1 = 0$, получим функцию φ в явном виде: $\varphi = -\frac{1}{2}(t + C_2)^{-2}$.

2°. О других решениях см. уравнение 1.1.10.7 при $m = -3/2$.

$$7. \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса, теории горения и теории фильтрации. Например, оно описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности является степенной функцией температуры. При $m = 1, -1, -2, -4/3, -2/3, -3/2$ см. также уравнения 1.1.7.1 — 1.1.7.6.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w (C_2 x + C_3, C_1^m C_2^2 t + C_4),$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.