

Андреев В.К.
Гапоненко Ю.А.
Гончарова О.Н.
Пухначев В.В.

Современные математические модели конвекции



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 536.25
ББК 24.1
А 65



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 07-01-07024*

Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. **Современные математические модели конвекции.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с. — ISBN 978-5-9221-0905-5.

Монография посвящена математическим вопросам течений жидких сред в неклассических моделях конвекции. Выведены граничные условия на поверхности раздела и свободной границе. Исследована иерархия моделей конвекции в замкнутых объемах. Рассмотрены возможные постановки начально-краевых задач для модели изотермически несжимаемой жидкости с непостоянными коэффициентами переноса. Изучены групповые свойства уравнений различных моделей конвекции и найдены широкие классы точных решений. Излагаются результаты численных исследований конвективных течений в слабых силовых полях. Определены условия возникновения конвекции и изучена устойчивость стационарных течений.

Книга будет полезной научным работникам, преподавателям, магистрам и аспирантам вузов, занимающимся конвективными течениями, дифференциальными уравнениями гидродинамики и вопросами устойчивости.

В оформлении обложки использована фотография, предоставленная профессором В.С. Бердниковым.

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© В.К. Андреев, Ю.А. Гапоненко,
О.Н. Гончарова, В.В. Пухначев, 2008

ISBN 978-5-9221-0905-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Уравнения движения жидкости	12
§ 1.1. Основные гипотезы сплошной среды	12
§ 1.2. Два способа описания движения сплошной среды. Формула переноса	15
§ 1.3. Интегральные законы сохранения. Уравнения непрерывных движений	18
§ 1.4. Элементы термодинамики	25
§ 1.5. Классические модели жидкости и газа	28
Глава 2. Условия на границе раздела жидкостей и на твердых стенках	36
§ 2.1. Понятие границы раздела	36
§ 2.2. Кинематическое условие	37
§ 2.3. Динамическое условие	38
§ 2.4. Элементы термодинамики поверхности раздела	44
§ 2.5. Условия непрерывности	47
§ 2.6. Перенос энергии через границу раздела	48
§ 2.7. Свободные поверхности	53
§ 2.8. Дополнительные условия	55
Глава 3. Модели конвекции изотермически несжимаемой жидкости	59
§ 3.1. Изотермически несжимаемая жидкость	59
§ 3.2. Уравнения тепловой конвекции изотермически несжимаемой жидкости	61
§ 3.3. Модель линейного теплового расширения	62
§ 3.4. Некоторые подмодели	65

§ 3.5. О краевых условиях	66
§ 3.6. Две задачи о конвекции	68
Глава 4. Иерархия моделей конвекции в замкнутых областях . . .	76
§ 4.1. Исходные соотношения	76
§ 4.2. Критерии подобия	78
§ 4.3. Переход к безразмерным переменным	81
§ 4.4. Разложение по малому параметру	83
§ 4.5. Уравнения микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости	88
§ 4.6. Уравнения Обербека–Буссинеска	91
§ 4.7. Линейная модель переходного процесса	92
§ 4.8. Некоторые выводы	95
§ 4.9. Конвекция слабонеизотермических жидкостей и газов в условиях микрогравитации	98
§ 4.10. Конвекция термически неоднородной слабосжимаемой жидкости	107
Глава 5. Инвариантные подмодели уравнений микроконвекции . .	112
§ 5.1. Основная модель и ее групповые свойства	112
§ 5.2. Оптимальные системы подалгебр Θ_1 , Θ_2 , фактор-системы и неко- торые решения	115
§ 5.3. Об одном стационарном решении уравнений микроконвекции в вер- тикальном слое	126
§ 5.4. Нестационарное решение уравнений микроконвекции в бесконеч- ной полосе	137
§ 5.5. Инвариантные решения уравнений микроконвекции, описывающие движения с поверхностью раздела	144
Глава 6. Групповые свойства уравнений термодиффузионного движения	151
§ 6.1. Группа Ли уравнений термодиффузии	151
§ 6.2. Групповые свойства уравнений термодиффузии в плоском случае. .	169
§ 6.3. Инвариантные подмодели и точные решения уравнений термодиф- фузии	177
Глава 7. Устойчивость равновесных состояний в модели Обербека–Буссинеска	193
§ 7.1. Конвективная неустойчивость горизонтального слоя при колеба- ниях температуры на свободной границе	193
§ 7.2. Конвективная неустойчивость системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела	203

§ 7.3. Тепловая конвекция во вращающемся слое жидкости в условиях невесомости	212
Глава 8. Малые возмущения и устойчивость плоских слоев в модели микроконвекции	223
§ 8.1. Уравнения малых возмущений	223
§ 8.2. Об устойчивости равновесия плоского слоя с твердыми стенками	227
§ 8.3. Возникновение микроконвекции в плоском слое со свободной границей.	238
§ 8.4. Устойчивость стационарного течения в вертикальном слое	249
Глава 9. Численное моделирование конвективных течений в условиях микрогравитации	260
§ 9.1. Численные методы, используемые для расчетов	260
§ 9.2. Численное исследование нестационарной микроконвекции в канонических областях с твердыми границами	272
§ 9.3. Численное исследование стационарной микроконвекции в областях со свободными границами	289
§ 9.4. Исследование конвекции, индуцированной объемным расширением	307
§ 9.5. Конвекция в смешивающихся жидкостях	328
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	354

Предисловие

Конвекция (от лат. *convectio* — принесение, доставка) — перемещение макроскопических частей среды (газа, жидкости), приводящее к переносу массы, тепла и других физических величин. Различают естественную, или свободную, конвекцию, вызванную неоднородностью среды (градиентами температуры, плотности и концентрации), и вынужденную, вызванную внешним механическим воздействием на среду (например, вибрацией). Так, наличие в жидкости градиентов плотности приводит к тому, что потенциальная энергия гравитации превращается в энергию движения под действием сил плавучести. Такие перепады плотности могут вызываться как нагревом жидкости, так и существующей разностью концентраций в смесях, подобных солевому раствору. Важность таких течений трудно переоценить: достаточно вспомнить о циркуляции воздушных масс в атмосфере Земли, которую нельзя объяснить без учета конвективных движений из-за солнечного нагрева. На самом Солнце свободная конвекция возникает в виде грануляции — видимых в телескоп зернистых структур (гранул) фотосферы. Гранулы имеют размер от 500 до 1000 км и покрывают весь диск Солнца; отдельная гранула возникает и распадается за 5–10 мин. В связи с развитием космической технологии появилось значительное количество работ, в которых изучается термокапиллярная конвекция, или конвекция Марангони. Такая конвекция возникает из-за зависимости поверхностного натяжения от температуры, изменяющейся вдоль свободной границы жидкости или поверхности раздела двух жидкостей. В земных условиях проявление эффекта Марангони, как правило, локализовано вблизи свободной поверхности, однако в слоях, имеющих толщину порядка миллиметра, термокапиллярная конвекция становится доминирующей формой конвективного течения жидкости.

В последнее время расширился круг задач, связанных с естественно- или свободноконвективными течениями. Естественная конвекция — один из видов макроскопического движения, который интенсивно изучается в современной фундаментальной науке. Хотя наблюдение и качественное описание естественной конвекции восходит к далеким временам, развитие ее количественных моделей началось в конце XIX столетия. Экспериментальные и теоретические исследования естественной конвекции привели к ее выделению в самостоятельный раздел механики жидкости и газа.

Механизмы естественной конвекции определяют различные процессы, имеющие широкое применение и познавательную ценность. С развитием наукоемких технологий закономерно возросла и прикладная

значимость получаемых результатов. Достижения в исследовании естественной конвекции применяются в теплоэнергетике, металлургии, экологии, метеорологии, гео- и астрофизике, аэрокосмонавтике, химии, кристаллофизике и других научных отраслях. Возросшая точность измерений, сложность математических моделей позволяют ставить и успешно решать все новые задачи в этой области, например получение сверхчистых материалов при пониженной гравитации.

Изучение свойств жидкости, будь то вода, раствор химического реагента или расплав металла, приводит к необходимости проведения исследований ее внутреннего состояния. Так, для жидкости, находящейся в состоянии покоя, большое значение имеет формулировка законов воздействия внешних факторов, способных в определенных условиях привести к потере устойчивости механического равновесия. Большой практический интерес имеют задачи о формировании конвекции в жидкости. Динамика развития структур течения существенно зависит от граничных условий или внутренних источников. Кроме того, значительное влияние могут оказать внутренние поверхности раздела, фронты химических реакций, потоки тепла и примеси.

Указанные процессы, возникающие в жидкости, характеризуются нестационарностью и нелинейностью, что значительно затрудняет их изучение. Трудности экспериментального исследования таких задач связаны со сложностью воссоздания условий, в которых наблюдается исследуемое явление, проблемами необходимости соблюдения высокой точности измерений во всей исследуемой области, а также значительными энерго- и ресурсозатратами. Поэтому методы математического моделирования представляют в настоящее время важный и актуальный способ проведения исследований самого широкого диапазона конвективных течений.

Значительное влияние имеет и правильность выбора соответствующей математической модели исследуемого явления. Это заранее позволяет определить параметры задачи, где те или иные процессы будут преобладать. Так, модель Обербека–Буссинеска, зачастую используемая в задачах по исследованию естественной конвекции, становится неприемлемой в условиях микрогравитации или микромасштабах.

Другим важным аспектом является методика проведения исследований математической модели. Разработка численных схем и построение оптимальных вычислительных алгоритмов, проведение расчетов течений со сложной внутренней структурой должны быть непрерывно связаны с аналитическими свойствами модельных уравнений, определяющими асимптотику и предельные решения общих уравнений.

Моделирование конвективных течений представляет собой комплекс задач и проблем, возникающих при прогнозировании природных явлений, динамики различных технологических процессов. Изучение полей скорости вблизи границ раздела и в поверхностных слоях позволяет эффективно учитывать явления переноса температуры и примеси, определять формы воздействующих факторов. Для описания таких

процессов необходимо использование новых математических моделей тепловой и концентрационной конвекции, когда плотность зависит не только от температуры, но и от давления и концентрации. В предлагаемой монографии предусматривается комплексное изучение механизмов возникновения конвекции, структуры течений и их устойчивости к возмущениям на границе раздела с учетом деформации самой границы. Приведем краткое изложение материала книги.

Глава 1. *Уравнения движения жидкости.* Целью настоящей главы является формулировка уравнений движения жидкости под действием массовых и внутренних сил, а также источников тепла. Кроме того, здесь выводится ряд формул, используемых в следующих главах. В целом же эта глава об основных элементах гидродинамики написана для замкнутости изложения.

Глава 2. *Условия на границе раздела жидкостей и на твердых стенках.* Приводится постановка задачи о движении двух несмешивающихся жидкостей с общей поверхностью раздела. Дан подробный вывод динамического и энергетического условий из интегральных законов сохранения. Формулируется важное понятие свободной границы и рассматриваются соотношения на ней. Обсуждаются дополнительные условия, связанные с наличием твердых стенок и движущихся линий контакта.

Глава 3. *Модели конвекции изотермически несжимаемой жидкости.* В этой главе рассматривается конвекция, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры, а плотность является функцией только температуры. Исходя из общих термодинамических соотношений показывается, что при постоянной удельной теплоемкости удельный объем всегда линейно зависит от температуры. Для полученной системы обсуждаются возможные постановки начально-краевых задач. Выясняется, что в общем случае в начальный момент можно задавать произвольно (согласуясь лишь с краевыми условиями) поля скорости, давления и температуры. Если в уравнении энергии пренебречь малым членом с производной давления по времени, то начальное распределение давления задавать уже нельзя. Более того, оказывается, что в задаче конвекции в замкнутом объеме необходимо учитывать упругие свойства контейнера, что позволяет правильно описывать влияние стенки на конвективные потоки. Рассмотрены также свойства некоторых моделей, учитывающих деформируемость границы области течения.

Глава 4. *Иерархия моделей конвекции в замкнутых областях.* Исследуются модели для описания естественной конвекции жидкости в замкнутых объемах при постоянных коэффициентах переноса. Для модели микроконвекции доказана теорема существования и единственности. Обсуждаются возможные обобщения и следствия постановок возникающих начально-краевых задач. С использованием приближения гипозвукового течения проводится полный анализ сравнительного влияния изменений теплофизических параметров с температурой

и давлением и работы сил давления на формирование естественной конвекции в слабонеизотермической среде в условиях, когда внешние массовые силы очень малы. Определяются пределы применимости приближения Обербека–Буссинеска для описания конвекции этого рода. Выводится асимптотически точная математическая модель для описания конвекции в слабых силовых полях с учетом малых изменений свойств среды. Устанавливается однозначная разрешимость основных краевых задач, изучается задача о локальной точной управляемости. Приведена модель конвекции термически неоднородно слабосжимаемой жидкости, в которой все коэффициенты переноса являются нелинейными функциями.

Глава 5. *Инвариантные подмодели уравнений микроконвекции.* В этой главе изучены групповые свойства уравнений модели микроконвекции. Построены оптимальные системы подалгебр Θ_1 и Θ_2 , выписаны все фактор-системы. Для некоторых из них поставлены и решены начально-краевые задачи. Рассмотрен вопрос об инвариантности условий на поверхности раздела и свободной границе.

Глава 6. *Групповые свойства уравнений термодиффузионного движения.* В этой главе изучаются групповые свойства уравнений неизотермических движений бинарных смесей. Найдены основные алгебры Ли, преобразования эквивалентности и решена задача групповой классификации. Проведена классификация инвариантных решений: построены оптимальные системы подалгебр первого и второго порядков для бесконечномерной алгебры операторов, допускаемой уравнениями плоских движений. Построены новые классы точных решений и обобщения ранее известных решений уравнений термодиффузионного движения. Выделены подгруппы непрерывных преобразований, относительно которых остаются инвариантными условия на поверхности раздела или свободной границе.

Глава 7. *Устойчивость равновесных состояний в модели Обербека–Буссинеска.* В этой главе исследуются условия возникновения конвективных течений в слоях со свободной границей, поверхностью раздела и твердыми стенками. Рассмотрен слой конечной глубины, верхняя граница которого свободная, а нижняя — твердая. Температура нижней границы считается постоянной, а верхней — периодически изменяющейся по времени. Это приводит к неоднородному по глубине и периодическому по времени равновесному градиенту температуры, влияние которого изучается численно. Исследована конвективная устойчивость равновесия системы двух несмешивающихся жидкостей с близкими плотностями. Построено обобщенное приближение Буссинеска, позволяющее корректно учитывать деформации поверхности раздела. Исследована устойчивость равновесия системы двух жидкостей в горизонтальном слое при вертикальном градиенте температуры. Обнаружено существование нескольких механизмов неустойчивости: длинноволновых и ячеистых монотонных возмущений, колебательных возмущений. Изучено

влияние деформируемости границы на характеристики неустойчивости. Показано, что увеличение деформируемости приводит к смене механизмов неустойчивости. Рассмотрена задача о дестабилизации вращающейся жидкости за счет градиента температуры.

Глава 8. *Малые возмущения и устойчивость плоских слоев в модели микроконвекции.* Выведены уравнения малых возмущений произвольных движений жидкости в модели микроконвекции. На их основе исследована устойчивость равновесного состояния плоского слоя, ограниченного твердыми стенками либо твердой стенкой и свободной границей. Найдено асимптотическое поведение комплексного декремента в случае длинноволновых и коротковолновых возмущений. Приведены результаты расчетов полной спектральной задачи для расплава кремния. В отличие от классической модели Обербека–Буссинеска, здесь возмущения не являются монотонными, что связано с несамосопряженностью краевой задачи. Показано, что при малом параметре Буссинеска спектр этой задачи аппроксимирует спектры соответствующих задач для вязкой теплопроводной жидкости или для тепловой гравитационной конвекции, когда число Релея конечно. Изучена устойчивость стационарных течений в плоском слое для линейного и экспоненциального распределений температуры поперек слоя. Установлена устойчивость течений относительно длинноволновых возмущений. Численно построены нейтральные кривые и найдены критические числа Грасгофа для расплава кремния. Показано, что в модели микроконвекции неустойчивость наступает при меньших значениях волнового числа. Этот эффект связан со сжимаемостью жидкости.

Глава 9. *Численное моделирование конвективных течений в условиях микрогравитации.* В данной главе приведено описание основных численных методов, используемых для расчета конвективных течений. Кроме того, рассмотрена их адаптация для предложенных моделей конвекции. С использованием модели микроконвекции рассмотрены задачи о влиянии нестационарного, а также пространственно-неоднородного подогрева в канонических областях с твердыми и свободными границами для однородной жидкости и бинарной смеси. Определены характерные структуры течения, траектории движения частиц и их кинематические параметры в зависимости от свойств жидкости, граничных условий и геометрии расчетной области. Подтверждены количественные и качественные отличия в характеристиках течений, рассчитанных в рамках классической модели и модели микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости. Для смешивающихся жидкостей рассмотрена задача о влиянии неоднородности толщины переходной зоны на формирование конвекции. Данная задача изучена в полной постановке, а также для модельной задачи с понижением ее пространственной размерности. Показано, что начальные возмущения толщины распространяются вдоль всей переходной зоны, что оказывает воздействие на структуру течения и кинематические характеристики.

В силу вышеизложенного монография существенно отличается от имеющихся монографий [1–9], посвященных, как правило, только одному изучаемому явлению конвекции.

Гл. 1, 3, 4 (§§ 4.9, 4.10), 5 (§§ 5.1–5.3, 5.5), 6, 7 (§§ 7.1, 7.2), 8 написаны В.К. Андреевым, гл. 9 (§§ 9.1, 9.4, 9.5) — Ю.А. Гапоненко, гл. 5 (§ 5.4), гл. 9 (§§ 9.2, 9.3) — О.Н. Гончаровой, гл. 2, 4 (§§ 4.1–4.8), 7 (§ 7.3) — В.В. Пухначёвым.

Авторы благодарят Н.Ф. Ильину за большую помощь, оказанную при оформлении рукописи.

Российская академия наук

Сибирское отделение

Институт вычислительного моделирования;

Институт гидродинамики им. ак. М.А. Лаврентьева;

Сибирский федеральный университет

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Формулируются уравнения движения жидкости под действием внешних и внутренних сил, а также тепловых источников. Этот ставший уже классическим раздел механики сплошной среды подробно излагается в различных учебниках [1–5]. Здесь в краткой форме приводятся основные понятия гидродинамики, что делает материал монографии более замкнутым.

§ 1.1. Основные гипотезы сплошной среды

Механика сплошных сред, по существу, основана на трех утверждениях:

- 1) справедлива классическая механика Ньютона;
- 2) справедлива классическая термодинамика;
- 3) справедлива гипотеза сплошности.

Первое утверждение предполагает, что изучаются движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассматриваются макроскопические объекты, размеры которых существенно превосходят размеры микромира.

Второе утверждение предполагает, что в окрестности каждой точки среда находится в состоянии термодинамического равновесия или близком к нему, вследствие чего можно пользоваться законами классической термодинамики.

Третье утверждение предполагает замену реальной среды с ее дискретным молекулярным строением моделью сплошного распределения вещества по рассматриваемому объему. Возможность такой замены и носит название гипотезы сплошности.

Элементарная частица. Выделим объем среды $\delta\Omega$, ограниченный поверхностью $\delta\Sigma$, и будем считать, что в нем заключена масса δm . Средняя плотность среды есть $\rho_{\text{ср}} = \delta m / \delta\Omega$. Если объем $\delta\Omega$ достаточно велик, то в силу неоднородности среды средняя плотность будет зависеть от его величины. По мере уменьшения объема $\delta\Omega$ распределение масс будет все более однородным и $\rho_{\text{ср}}$ постепенно примет постоянное значение. Как только линейные размеры выделенного объема среды станут сопоставимы с размерами молекул, средняя плотность вновь начнет испытывать резкие колебания [6], так как в объеме

может находиться разное число молекул. Отсюда возникает определение элементарной частицы (или просто частицы). Ее размеры должны быть пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами изучаемого явления, вследствие чего средние характеристики среды по объему можно считать постоянными. С другой стороны, размеры частицы должны быть достаточно велики, чтобы не учитывать молекулярную структуру жидкости. В этом случае говорят о бесконечно малом объеме среды, эффективно равном нулю. Сформулированное определение частицы позволяет приписывать характеристикам сплошной среды значение в точке. Следует подчеркнуть принципиальное различие между элементарной частицей, стягиваемой в точку, и точкой пространства: *точка* есть место в пространстве, а *частица* — малая часть материального объема.

Совокупность одних и тех же частиц, во все время движения остающихся на одном контуре, поверхности или в объеме, называется, движущимся контуром, движущейся поверхностью или движущимся объемом соответственно.

Итак, принятие гипотезы сплошности как основы математического описания поведения материалов (в широком смысле) означает, что функции, характеризующие их состояние, должны быть достаточно гладкими, т. е. непрерывными и дифференцируемыми в пространстве и времени. Нарушение непрерывности допускается лишь в отдельных точках, линиях или поверхностях.

Плотность. Перейдем к определению некоторых фундаментальных величин механики сплошной среды. Плотность среды в данной точке находится как предел (он существует по гипотезе сплошности):

$$\rho = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta\Omega}. \quad (1.1)$$

Таким образом, плотность есть функция переменных $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и времени t . В системе СИ ее размерность $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$; в технических приложениях часто используется удельный вес $\gamma = \rho g$, где g — ускорение силы тяжести, $[\gamma] = \text{н}/\text{м}^3$.

Объемные и поверхностные силы. Силы, действующие на сплошную среду, подразделяются на два типа: *объемные* и *поверхностные*.

К объемным (или массовым) силам принадлежат, например, силы тяжести, силы инерции, в частности центробежная сила. Массовые силы другой природы здесь не рассматриваются. Объемные силы действуют в каждой точке элементарного объема сплошной среды.

Пусть $\delta\mathbf{f}$ — главный вектор объемных сил, действующих в объеме $\delta\Omega$. Тогда вводится понятие плотности распределения объемных сил в виде предела

$$\mathbf{f} = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\delta\mathbf{f}}{\rho\delta\Omega} \quad (1.2)$$

и $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Размерность \mathbf{f} соответствует размерности ускорения, $[\mathbf{f}] = \text{м}/\text{с}^2$, а весу — равенство $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.

К поверхности относятся силы, которые действуют на элемент поверхности, будь то часть граничной или любой внутренней поверхности. Например, силы давления, силы внутреннего трения (вязкости), силы контактного взаимодействия между телами суть поверхностные силы.

Пусть $\delta\mathbf{p}_n$ — главный вектор сил, приложенных со стороны среды к некоторой выделенной в среде малой площадке $\delta\Sigma_n$. Индекс n означает не проекцию силы, а указание на то, что сила действует на площадке $\delta\Sigma_n$, произвольно ориентированной в среде. Аналогично (1.2) поверхностные силы задаются *напряжением*

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\delta\Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\delta\mathbf{p}_n}{\delta\Sigma_n}. \quad (1.3)$$

Следует отметить основное различие между векторами \mathbf{f} и \mathbf{p}_n : \mathbf{f} является однозначной векторной функцией точек пространства и времени, т. е. образует *векторное поле*, \mathbf{p}_n принимает в каждой точке пространства бесконечное множество значений в зависимости от *ориентировки* площадки $\delta\Sigma_n$, к которой приложено напряжение, и, таким образом, *векторного поля не образует*.

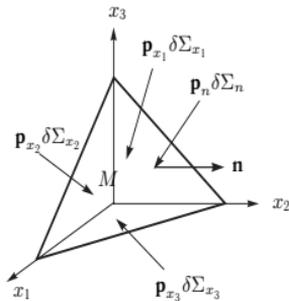


Рис. 1.1

По третьему закону Ньютона (см. утверждение 1) из (1.3) имеем: $\mathbf{p}_n = -\mathbf{p}_{-n}$. Зависимость вектора напряжений от нормали, следуя Коши, можно существенно уточнить. Для этого рассмотрим элементарный объем в виде тетраэдра, три грани которого параллельны координатным плоскостям, а четвертая ориентирована произвольным образом, рис. 1.1. Обозначим площади граней $\delta\Sigma_{x_1}$, $\delta\Sigma_{x_2}$, $\delta\Sigma_{x_3}$ и $\delta\Sigma_n$, геометрический смысл которых ясен из рисунка. Ориентация площадки однозначно опре-

деляется единичной нормалью $\mathbf{n} = (\cos(n, x_1), \cos(n, x_2), \cos(n, x_3))$, тогда

$$\delta\Sigma_{x_1} = \cos(n, x_1)\delta\Sigma_n, \quad \delta\Sigma_{x_2} = \cos(n, x_2)\delta\Sigma_n, \quad \delta\Sigma_{x_3} = \cos(n, x_3)\delta\Sigma_n.$$

Пусть высота тетраэдра из точки M на $\delta\Sigma_n$ равна ε , тогда его объем $\delta\Omega = \varepsilon\delta\Sigma_n/3$. По второму закону Ньютона (утверждение 1), примененному к элементарному объему $\delta\Omega$, получим уравнение движения

$$\frac{1}{3}\varepsilon\delta\Sigma_n\rho\mathbf{a} = \frac{1}{3}\varepsilon\delta\Sigma_n\rho\mathbf{f} + \mathbf{p}_n\delta\Sigma_n - \mathbf{p}_{x_1}\delta\Sigma_{x_1} - \mathbf{p}_{x_2}\delta\Sigma_{x_2} - \mathbf{p}_{x_3}\delta\Sigma_{x_3},$$

где \mathbf{a} — ускорение центра масс тетраэдра.

Переходя к пределу (устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$), согласно гипотезе сплошности получим в точке M

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1} \cos(n, x_1) + \mathbf{p}_{x_2} \cos(n, x_2) + \mathbf{p}_{x_3} \cos(n, x_3). \quad (1.4)$$

Это и есть формула Коши (1822), утверждающая, что напряжения на гранях образуют систему взаимно уравновешенных напряжений. Таким образом, из (1.4) имеем

$$\mathbf{p}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.5)$$

где

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{23} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{32} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{p}_{x_1}, \mathbf{p}_{x_2}, \mathbf{p}_{x_3}) \quad (1.6)$$

— тензор второго ранга, называемый *тензором напряжений*. Формулы (1.4)–(1.6) означают, что напряженное состояние в произвольной точке сплошной среды характеризуется девятью компонентами \mathcal{P}_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

§ 1.2. Два способа описания движения сплошной среды. Формула переноса

Пусть $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ — прямоугольная система координат, которая предполагается инерциальной. Любая тройка чисел (x_1, x_2, x_3) отождествляется с точкой пространства и обозначается через \mathbf{x} . Рассмотрим частицу, движущуюся вместе со средой. Пусть в момент времени $t = 0$ она находится в точке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а в момент времени t — в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Поэтому определено отображение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (1.7)$$

характеризующее движение среды. Если $\boldsymbol{\xi}$ фиксирована, то соотношение (1.7) задает траекторию частицы, первоначально находившейся в точке $\boldsymbol{\xi}$. С другой стороны, при фиксированном t равенство (1.7) определяет преобразование, занимаемое средой в начальный момент времени $t = 0$, в область, занимаемую средой в момент времени t .

Предполагается, что отображение имеет обратное:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

Всюду считается, что $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ являются достаточно гладкими вектор-функциями своих аргументов.

Замечание 1. Вместо декартовых координат начального положения точки можно взять любые другие ее криволинейные координаты $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, связанные с $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ соотношением $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a})$, причем якобиан преобразования $\partial(\boldsymbol{\xi})/\partial(\mathbf{a}) \neq 0$.

Переменные (ξ, t) (или (\mathbf{a}, t)) называются *переменными Лагранжа*, а (\mathbf{x}, t) носят название *переменных Эйлера*. Основное отличие описания движения в координатах Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в первом величины x_1, x_2, x_3 — переменные координаты движущихся частиц жидкости, во втором — это координаты фиксированных точек пространства, мимо которых в данный момент времени проходят различные частицы жидкости. При лагранжевом описании скорость движения частиц $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ выразится через производную радиуса-вектора:

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\xi, t) = \frac{d\mathbf{x}(\xi, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t},$$

а ускорение — через производную скорости

$$\overset{\circ}{\mathbf{w}}(\xi, t) = \frac{d\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\xi, t)}{dt} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t^2}.$$

В этих двух формулах при дифференцировании параметры ξ_1, ξ_2, ξ_3 являются фиксированными, \mathbf{x} и $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ суть функции только времени и операции дифференцирования d/dt и $\partial/\partial t$ тождественны. Если вектор-функция $\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\xi, t)$ известна, то траектории частиц находятся посредством квадратуры:

$$\mathbf{x} = \xi + \int_0^t \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\xi, \tau) d\tau.$$

Знание отображения (1.7) (и обратного к нему (1.8)) позволяет любую функцию $F(\mathbf{x}, t)$ эйлеровых переменных (лагранжевых переменных) выразить в переменных Лагранжа (Эйлера):

$$F(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \overset{\circ}{F}(\xi, t) \quad (\overset{\circ}{F}(\xi(\mathbf{x}, t), t) = F(\mathbf{x}, t)).$$

Дифференцируя первое равенство по времени, найдем

$$\frac{\partial \overset{\circ}{F}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F,$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\xi(\mathbf{x}, t), t)$ — вектор скорости в переменных Эйлера, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ — оператор-градиент. Дифференциальный оператор над F носит название оператора *полного дифференцирования по времени*, а выражение

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F \quad (1.9)$$

— *полной производной* (синонимы: *индивидуальная производная, материальная производная, производная в частице, производная вдоль*

траектории) функции $F(\mathbf{x}, t)$. В частности, при $F = x_i$, $i = 1, 2, 3$, получим из (1.9)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.10)$$

Полная производная от скорости по времени есть ускорение. В переменных Эйлера, согласно (1.9), имеем

$$w_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i,$$

или, в инвариантной форме,

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

Это означает, что полное ускорение $d\mathbf{v}/dt$ частицы состоит из двух частей: *локального ускорения* $\partial \mathbf{v}/\partial t$, обусловленного изменением скорости по времени в данной точке, и *конвективного ускорения* $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, связанного с неоднородностью поля скорости в окрестности данной точки.

Предположим, что в (1.10) вектор скорости известен как функция эйлеровых координат, тогда (1.10) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для x_1, x_2, x_3 . Присоединяя к ней начальные данные при $t = 0$,

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}, \quad (1.12)$$

приходим к задаче Коши, решение которой определяет отображение (1.7), а вместе с ним и траектории частиц среды.

Введем матрицу Якоби $M = \partial(\mathbf{x})/\partial(\boldsymbol{\xi})$ отображения (1.7) при фиксированном t . Вследствие (1.10), (1.12) она удовлетворяет линейной задаче Коши

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})} M, \quad M|_{t=0} = E, \quad (1.13)$$

где $\partial(\mathbf{v})/\partial(\mathbf{x})$ — матрица с элементами $\partial v_i/\partial x_j$, $i, j = 1, 2, 3$, E — единичная матрица. Поскольку якобиан этой матрицы $J = \det M$ есть определитель Вронского для системы (1.13) [7], то отсюда вытекает формула Эйлера

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.14)$$

так как $Sp(\partial(\mathbf{v})/\partial(\mathbf{x})) = \operatorname{div} \mathbf{v}$.

Движущимся, или *материальным*, объемом называется объем ω_t , состоящий для всех $t \geq 0$ из одних и тех же частиц; объем ω_0 есть область изменения лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$. Для произвольной гладкой функции $F(\mathbf{x}, t)$ интеграл

$$\int_{\omega_t} F d\omega$$

есть функция времени. *Формула переноса* дает выражение для производной этой функции, а именно

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} F d\omega = \int_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\omega, \quad (1.15)$$

где dF/dt — полная производная F из (1.9).

Доказательство (1.15) основано на переходе в интеграле в левой части к лагранжевым координатам по формуле (1.7), в результате чего область интегрирования ω_t переходит в область ω_0 , не зависящую от времени, а интеграл примет вид

$$\int_{\omega_0} \overset{\circ}{F}(\boldsymbol{\xi}, t) \overset{\circ}{J}(\boldsymbol{\xi}, t) d\omega_0.$$

Здесь $\overset{\circ}{J}(\boldsymbol{\xi}, t) = J(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t)$ — якобиан отображения (1.7), выраженный в лагранжевых переменных. Производная подынтегральной функции по t в силу (1.14) и определения полной производной (1.9) такова:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{\circ}{F} \overset{\circ}{J}) = \frac{d}{dt} (FJ) = \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{v} \right) J.$$

Обратный переход от лагранжевых переменных к эйлеровым и приводит к формуле (1.15).

§ 1.3. Интегральные законы сохранения. Уравнения непрерывных движений

Важнейшими характеристиками материального объема являются его *масса, количество движения (импульс), момент количества движения и полная энергия*. Будучи аддитивными функциями множеств, эти величины, соответственно, для любой занимаемой средой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеют вид

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= \int_{\Omega} \varrho d\Omega, & \mathbf{K}(\Omega) &= \int_{\Omega} \varrho \mathbf{v} d\Omega, \\ \mathbf{H}(\Omega) &= \int_{\Omega} \varrho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\Omega, & E(\Omega) &= \int_{\Omega} \varrho \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) d\Omega, \end{aligned}$$

где $\varrho(\mathbf{x}, t)$ — плотность среды, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости, $U(\mathbf{x}, t)$ — удельная внутренняя энергия.

Пусть $\omega_t \subset \Omega$ — произвольный движущийся объем. Изменение \mathbf{K} , \mathbf{H} и E при движении происходит под действием силовых и энергетических воздействий на объем ω_t (масса M не изменяется). Эти

воздействия осуществляются с помощью:
главного вектора сил

$$\mathbf{F}(\omega_t) = \int_{\omega_t} \varrho \mathbf{f} d\omega + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{p}_n d\Sigma,$$

главного момента сил

$$\mathbf{G}(\omega_t) = \int_{\omega_t} \varrho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\omega + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n d\Sigma,$$

вносимой мощности

$$N(\omega_t) = \int_{\omega_t} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_n d\Sigma + \int_{\partial\omega_t} q_n d\Sigma + \int_{\omega_t} \varrho h d\omega.$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}_n(\mathbf{x}, t)$ — плотности массовых и поверхностных сил; Σ — кусочно-гладкая граница ω_t ($\Sigma = \partial\omega_t$), так что вектор нормали \mathbf{n} определен почти в каждой ее точке; $q_n(\mathbf{x}, t)$ — поверхностная плотность потока тепла, поступающего в объем через $\partial\omega_t$; $h(\mathbf{x}, t)$ — объемная плотность внутренних источников тепла, например радиоактивных, химических.

В движущейся сплошной среде для любого движущегося объема ω_t справедливы равенства

$$\frac{d}{dt} M(\omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \varrho d\omega = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \varrho \mathbf{v} d\omega = \int_{\omega_t} \varrho \mathbf{f} d\omega + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{p}_n d\Sigma, \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}(\omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \varrho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\omega = \int_{\omega_t} \varrho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\omega + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n d\Sigma, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \varrho \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) d\omega = \int_{\omega_t} \varrho (\mathbf{v} \times \mathbf{f}) d\omega + \\ &+ \int_{\partial\omega_t} \mathbf{v} \times \mathbf{p}_n d\Sigma + \int_{\partial\omega_t} q_n d\Sigma + \int_{\omega_t} \varrho h d\omega. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Каждое из этих равенств принято называть *законом сохранения* соответствующей механической величины.

Вообще говоря, функции \mathbf{p}_n , q_n , \mathbf{f} , h , стоящие в правых частях (1.17)–(1.19), не обязаны быть непрерывными, поскольку для справедливости интегральных законов сохранения это не требуется. Однако

класс движений, для которых основные величины являются достаточно гладкими функциями, представляет большой интерес в практических приложениях и допускает изучение средствами математического анализа. Движение среды называется *непрерывным*, если функции ρ , U , \mathbf{u} , \mathbf{p}_n , q_n непрерывны и непрерывно дифференцируемы, а \mathbf{f} , h непрерывны на области определения. Оказывается, для таких движений система законов сохранения (1.16)–(1.19) эквивалентна системе дифференциальных уравнений. Действительно, полагая в формуле переноса (1.15) $F = \rho$, получим из (1.16)

$$\int_{\omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\omega = 0.$$

Ввиду произвольности объема ω_t отсюда вытекает равенство

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.20)$$

называемое *уравнением неразрывности*. Оно эквивалентно закону сохранения массы на классе непрерывных движений. В свою очередь, уравнение (1.20) позволяет существенно упростить формулу (1.15) и придать ей вид (произведена замена $F \leftrightarrow \rho F$)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho F d\omega = \int_{\omega_t} \rho \frac{dF}{dt} d\omega, \quad (1.21)$$

удобный для преобразования левых частей (1.17)–(1.19).

Обратимся к закону сохранения импульса (1.17). Для преобразования его левой части последовательно воспользуемся формулой (1.21), полагая в ней $F = v_i$, $i = 1, 2, 3$. Поверхностный интеграл в правой части преобразуем по формуле Гаусса–Остроградского исходя из равенства (1.5) для вектора напряжений. В результате найдем, что

$$\int_{\omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\omega = \int_{\omega_t} (\operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}) d\omega,$$

где $\operatorname{div} \mathcal{P}$ есть вектор с компонентами

$$(\operatorname{div} \mathcal{P})_i = \sum_{j=1}^3 \partial \mathcal{P}_{ij} / \partial x_j$$

(см. формулу (1.6)). Учитывая произвольность ω_t , приходим к уравнению

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}, \quad (1.22)$$

которое называется *уравнением импульса*.

Для интегрального закона сохранения момента импульса (1.18) левая часть в силу (1.21), (1.10), равна

$$\int_{\omega_t} \rho \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) d\omega.$$

Для преобразования поверхностного интеграла в правой части (1.18) воспользуемся формулой Коши (1.4) и равенством

$$\operatorname{div} \mathcal{P} = \partial \mathbf{p}_{x_1} / \partial x_1 + \partial \mathbf{p}_{x_2} / \partial x_2 + \partial \mathbf{p}_{x_3} / \partial x_3.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial \omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n d\Sigma &= \\ &= \int_{\partial \omega_t} [\cos(n, x_1) \mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_1} + \cos(n, x_2) \mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_2} + \cos(n, x_3) \mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_3}] d\Sigma = \\ &= \int_{\omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_3}) \right] d\omega = \\ &= \int_{\partial \omega_t} \left(\mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathcal{P} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_1} \times \mathbf{p}_{x_1} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_2} \times \mathbf{p}_{x_2} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_3} \times \mathbf{p}_{x_3} \right) d\omega. \end{aligned}$$

Следовательно, закон сохранения (1.18) примет вид $(\partial \mathbf{x} / \partial x_1 = \mathbf{e}_1, \partial \mathbf{x} / \partial x_2 = \mathbf{e}_2, \partial \mathbf{x} / \partial x_3 = \mathbf{e}_3, \text{ где } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \text{ — единичные орты вдоль осей } x_1, x_2, x_3)$

$$\int_{\omega_t} \left[\mathbf{x} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div} \mathcal{P} - \rho \mathbf{f} \right) - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{p}_{x_1} - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{p}_{x_2} - \mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}_{x_3} \right] d\omega = 0.$$

Учитывая (1.22), получим равенство

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{p}_{x_1} + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{p}_{x_2} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}_{x_3} = 0, \quad (1.23)$$

справедливое для любой непрерывной среды, независимо от характера приложения объемных сил. Проецируя (1.23) на оси координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, убеждаемся в справедливости равенств

$$p_{x_1 x_2} = p_{x_2 x_1}, \quad p_{x_2 x_3} = p_{x_3 x_2}, \quad p_{x_3 x_1} = p_{x_1 x_3}, \quad (1.24)$$

($p_{x_1 x_1}, p_{x_1 x_2}, p_{x_1 x_3}$ — компоненты вектора \mathbf{p}_{x_1} ; $p_{x_2 x_1}, p_{x_2 x_2}, p_{x_2 x_3}$ — компоненты вектора \mathbf{p}_{x_2} ; $p_{x_3 x_1}, p_{x_3 x_2}, p_{x_3 x_3}$ — компоненты вектора \mathbf{p}_{x_3}).

Таким образом, тензор напряжений симметричен: $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$, $P_{ij} = P_{ji}$. Ясно, что из (1.24) обратными преобразованиями можно получить закон сохранения (1.18). Другими словами, в сплошной среде,

в которой нет других внутренних моментов, закон сохранения момента импульса (1.18) эквивалентен симметрии тензора напряжений.

Величины $p_{x_1x_1} = \mathcal{P}_{11}$, $p_{x_2x_2} = \mathcal{P}_{22}$, $p_{x_3x_3} = \mathcal{P}_{33}$ называют *нормальными напряжениями*, а $p_{x_1x_2} = \mathcal{P}_{12}$, $p_{x_2x_3} = \mathcal{P}_{23}$, $p_{x_3x_1} = \mathcal{P}_{31}$, ... — *касательными напряжениями*.

Равенства (1.24) составляют содержание так называемой теоремы о взаимности касательных напряжений. Теперь

$$(\operatorname{div} \mathcal{P})_i = \sum_{j=1}^3 \partial \mathcal{P}_{ij} / \partial x_j = \sum_{j=1}^3 \partial \mathcal{P}_{ji} / \partial x_j,$$

т. е. в координатной записи $\operatorname{div} \mathcal{P}$ можно не следить за порядком индексов.

Рассмотрим равенство Коши (1.4) для случая, когда касательные напряжения отсутствуют, т. е. $\mathcal{P}_{ij} = 0$, $i \neq j$. Тогда

$$p_{nx_j} = \mathcal{P}_{jj} \cos(n, x_j);$$

с другой стороны,

$$p_{nx_j} = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_j = p_n \cos(n, x_j),$$

где p_n — проекция вектора напряжений на нормаль к площадке. Сравнивая эти формулы, находим: $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22} = \mathcal{P}_{33} = p_n$. Введем понятие *давления* $p(\mathbf{x}, t)$ согласно равенствам

$$p = -p_n = -\mathcal{P}_{11} = -\mathcal{P}_{22} = -\mathcal{P}_{33}.$$

Поэтому в случае отсутствия касательных напряжений давление в точке является скалярной величиной, т. е. оно не зависит от ориентации площадки, проходящей через точку $M(x_1, x_2, x_3)$. Знак «минус» означает, что давление есть сжимающее напряжение. Размерность давления в системе СИ $[p] = \text{н}/\text{м}^2$, $1 \text{ н}/\text{м}^2 = 1 \text{ Па}$ (один паскаль). Кроме того, используются и другие единицы давления, например $1 \text{ кг} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = 9,80665 \text{ Па} \approx 10 \text{ Па}$, $1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ МПа}$, $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$, $1 \text{ мм рт. ст.} \approx 133 \text{ Па}$, $1 \text{ мм вод. ст.} \approx 10 \text{ Па}$, а также кратные и дольные единицы от паскаля: гигапаскаль ($1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}$), мегапаскаль ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$), килопаскаль ($1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$), миллипаскаль ($1 \text{ мПа} = 10^{-3} \text{ Па}$), пикопаскаль ($1 \text{ пПа} = 10^{-12} \text{ Па}$).

Замечание 2. Сплошные среды, для которых $\mathcal{P} = -pI$ (I — единичный тензор, $I_{ij} = \delta_{ij}$), называются *идеальными*.

Закон сохранения энергии (1.19) с помощью (1.21), с учетом симметрии тензора \mathcal{P} и формул

$$\int_{\partial \omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_n d\Sigma = \int_{\partial \omega_t} \mathcal{P} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\omega_t} \operatorname{div} (\mathcal{P} \mathbf{v}) d\omega,$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{P}\mathbf{v}) \equiv \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathcal{P} + \mathcal{P} : \mathcal{D}$$

запишется так:

$$\int_{\omega_t} \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) d\omega = \int_{\omega_t} (\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathcal{P} + \mathcal{P} : \mathcal{D}) d\omega + \\ + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega + \int_{\partial\omega_t} q_n d\Sigma + \int_{\omega_t} \rho h d\omega.$$

Использование уравнения импульса (1.22) упрощает предыдущее равенство до следующего:

$$\int_{\omega_t} \rho \frac{dU}{dt} d\omega = \int_{\omega_t} \mathcal{P} : \mathcal{D} d\omega + \int_{\partial\omega_t} q_n d\Sigma + \int_{\omega_t} \rho h d\omega, \quad (1.25)$$

где \mathcal{D} — так называемый *тензор скоростей деформаций* с элементами

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.26)$$

Часто пишут $\mathcal{D}(\mathbf{v})$, подчеркивая его зависимость от вектора скорости. Выражение $\mathcal{P} : \mathcal{D}$ называется *сверткой тензоров* \mathcal{P} и \mathcal{D} и имеет вид

$$\mathcal{P} : \mathcal{D} \equiv \sum_{j=1}^3 \mathcal{P}_{ij} \mathcal{D}_{ij}. \quad (1.27)$$

Закон сохранения (1.25) может быть записан в виде

$$\int_{\partial\omega_t} q_n d\Sigma = \int_{\omega_t} \psi d\omega, \quad (1.28)$$

где $\psi = \rho dU/dt - \mathcal{P} : \mathcal{D} - \rho h$. Плотность потока тепла q_n есть функция переменных \mathbf{x} , t и нормали \mathbf{n} ; положим $q_n = q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$. Покажем сначала, что $q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$. Поскольку форма области ω_t произвольна, то в качестве ω_t рассматривается шар с центром $M(x_1, x_2, x_3)$ малого радиуса ε . Плоскостью, проходящей через точку M ортогонально вектору \mathbf{n} , этот шар разбивается на два полушара, ω_{1t} и ω_{2t} , причем \mathbf{n} направлен в сторону ω_{2t} .

Пусть K_ε есть круг, получаемый в сечении. Применим равенство (1.28) к объемам ω_{1t} , ω_{2t} и ω_t :

$$\int_{\partial\omega_{1t}} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\Sigma + \int_{K_\varepsilon} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) d\Sigma = \int_{\omega_{1t}} \psi d\omega,$$

$$\int_{\partial\omega_{2t}} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\Sigma + \int_{K_\varepsilon} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\Sigma = \int_{\omega_{2t}} \psi d\omega,$$

$$\int_{\partial\omega_{1t} \cup \partial\omega_{2t}} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\Sigma = \int_{\omega_{1t}} \psi d\omega,$$

где $\partial\omega_{1t}$, $\partial\omega_{2t}$ — поверхности полусфер и $\partial\omega_{1t} \cup \partial\omega_{2t} = \partial\omega_t$. Складывая два первых равенства и вычитая третье, получим

$$\int_{K_\varepsilon} [q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})] d\Sigma = 0.$$

Поэтому, в силу непрерывности скалярного поля q на K_ε , в точке M должно быть $q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$.

Далее, возьмем в качестве ω_t тетраэдр, см. рис. 1.1. В тех же обозначениях равенство (1.28) дает соотношение

$$\int_{\delta\Sigma_n} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\Sigma + \int_{\delta\Sigma_{x_1}} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1) d\Sigma + \int_{\delta\Sigma_{x_2}} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_2) d\Sigma +$$

$$+ \int_{\delta\Sigma_{x_3}} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_3) d\Sigma = \int_{\omega_t} \psi d\omega.$$

В силу непрерывности подынтегральных функций интегралы слева имеют порядок ε^2 , а интегралы справа — ε^3 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Значит, в точке M справедливо равенство (учтены формулы $\delta\Sigma_{x_j} = \cos(n, x_j) \delta\Sigma_n$)

$$q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = q(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) \cos(n, x_1) +$$

$$+ (\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) \cos(n, x_2) + q(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3) \cos(n, x_3).$$

Другими словами, существует такое векторное поле $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, что

$$q_n = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.29)$$

Вектор \mathbf{q} называется *вектором потока тепла*. Знак минус взят для того, чтобы вектор \mathbf{q} показывал реальное направление переноса тепловой энергии, так как в качестве \mathbf{n} берется орт внешней нормали к границе $\partial\omega_t$ того объема, в который *вносится* поток тепла с поверхностной плотностью \mathbf{q} . Снова считая в (1.25) ω_t произвольным материальным объемом и учитывая (1.29), приходим к уравнению притока тепла:

$$\varrho \frac{dU}{dt} = \mathcal{P} : \mathcal{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \varrho h. \quad (1.30)$$

Замечание 3. Вышеприведенные рассуждения можно было бы применить и при выводе формулы Коши (1.4) из интегрального закона сохранения импульса (1.17) [2–4].

Совокупность уравнений (1.20), (1.22), (1.30) образует математическую модель непрерывных движений сплошной среды. Эта модель не является замкнутой, так как содержит пять скалярных уравнений и четырнадцать (с учетом симметрии тензора напряжений \mathcal{P}) искомым функций: ρ , v_1 , v_2 , v_3 , \mathcal{P}_{11} , \mathcal{P}_{12} , \mathcal{P}_{13} , \mathcal{P}_{22} , \mathcal{P}_{23} , \mathcal{P}_{33} , U , q_1 , q_2 , q_3 . Массовые плотности внешних сил \mathbf{f} и объемных источников тепла h считаются заданными функциями, поэтому возникает проблема «замыкания» модели, которая должна решаться на анализе дополнительной информации.

§ 1.4. Элементы термодинамики

Учет тепловой энергии в модели (1.20), (1.22), (1.30) требует привлечения законов термодинамики (точнее в данном случае было бы говорить «термостатики»). Термодинамика изучает связи между тепловой энергией и другими видами энергии, в первую очередь механической энергией, и устанавливает закономерности взаимного превращения одного вида энергии в другой.

Основное понятие термодинамики — понятие *состояния* среды. Феноменологическое описание состояния осуществляется с помощью *параметров состояния*. Например, удельная внутренняя энергия U , плотность ρ (или удельный объем $V = 1/\rho$) являются таковыми. Кроме них наиболее часто используются следующие параметры состояния: *абсолютная температура* θ , *удельная энтропия* s , *давление* p . В системе СИ температура выражается в кельвинах, $\theta \text{ K} = 273,15 + \theta \text{ }^\circ\text{C}$, размерность энтропии $[s] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$. Иногда параметрами состояния удобно считать компоненты тензора напряжений \mathcal{P} или какие-либо другие величины. Если для некоторой среды уже установлен набор характеризующих ее параметров состояния, то следующей задачей становится определение всех возможных связей между этими параметрами. Эти связи должны вытекать из общих физических законов и опытных закономерностей, регулирующих поведение изучаемой среды.

Пусть $Z = (z^1, z^2, \dots)$ обозначает набор характерных параметров состояния z^k какой-либо среды. Множество всех допустимых значений Z образует *пространство состояний*. Размерность ν этого пространства равна минимальному числу параметров, определяющих состояние среды. Если $\nu = 1$, то среда называется однопараметрической, если $\nu = 2$ — двухпараметрической и т. д.

Два состояния Z_1 и Z_2 могут быть соединены направленными кривыми (путями) $l(Z_1, Z_2)$, идущими от Z_1 к Z_2 . Если состояния

на кривой принципиально физически осуществимы, то пути называются *процессами*. Процесс $l(Z_1, Z_2)$ называется *обратимым*, если путь $l(Z_2, Z_1)$, идущий по той же кривой, тоже процесс. В противном случае процесс $l(Z_1, Z_2)$ называется *необратимым*.

Тепловая энергия Q (или *количество тепла*), определяемая как энергия хаотического движения молекул, вообще говоря, не является параметром состояния. Она зависит от процесса $l(Z_1, Z_2)$, переводящего среду из Z_1 в Z_2 . Если рассматривать дифференцируемые процессы, переводящие среду из состояния Z в $Z + dZ$, то количество тепла, вырабатываемого в этом элементарном процессе,

$$\delta Q = \sum_k B_k(Z) dz^k.$$

Здесь зависимость процесса от пути выражается в том, что правая часть не является полным дифференциалом какой-либо функции. Однако в термодинамике доказывается, что существует параметр состояния, называемый абсолютной температурой θ , с которым отношение $\delta Q/\theta$ для любого *обратимого* процесса есть полный дифференциал некоторой функции, называемой энтропией s . Итак, для любого обратимого процесса $l(Z_1, Z_2)$

$$s_2 - s_1 = \int_{l(Z_1, Z_2)} \theta^{-1} \delta Q \quad (ds = \theta^{-1} \delta Q), \quad (1.31)$$

где криволинейный интеграл не зависит от пути.

Если для среды такой набор параметров состояния установлен, то важной задачей будет нахождение всех возможных соотношений между этими параметрами. Такие соотношения должны вытекать из общих физических законов и опытных закономерностей, регулирующих поведение рассматриваемой среды.

Если в некотором элементарном физическом процессе среде сообщено количество тепла δQ , то она совершит механическую работу δA , а внутренняя энергия среды получит приращение dU . *Первый закон термодинамики* утверждает, что всегда справедливо равенство

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (1.32)$$

Этот физический закон, устанавливающий эквивалентность тепловой и механической энергии, является термодинамическим выражением закона сохранения энергии. Использование разных обозначений в (1.32) означает, что dU есть дифференциал U , т. е. линейная часть приращения U , в то время как δQ и δA обозначают бесконечно малые количества теплоты и работы.

Второй закон термодинамики утверждает, что при любом процессе, идущем в теплоизолированной среде (без внешнего подвода или

отвода тепла), энтропия этой среды не убывает, т. е.

$$\theta ds \geq \delta Q \quad (1.33)$$

для элементарных процессов. При этом процесс обратим тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\theta ds = \delta Q$. Для таких процессов из (1.31) и (1.32) следует *основное термодинамическое тождество*

$$\theta ds = dU + \delta A. \quad (1.34)$$

Важный класс сред составляют так называемые идеальные сплошные среды. Для них тензор напряжений пропорционален единичному: $P = -pI$, $p(\mathbf{x}, t)$ — давление. Элементарная работа дается формулой $\delta A = p dV$, а тождество (1.34) имеет вид

$$\theta ds = dU + p dV. \quad (1.35)$$

Состояние «идеальной» среды в общем случае зависит от пяти параметров:

$$\rho = 1/V; U; \theta; s; p.$$

Предположим, что «идеальная» среда двухпараметрическая. Учитывая, что в (1.35) стоят полные дифференциалы, можно найти два соотношения между этими пятью параметрами состояния. Поэтому для полного описания термодинамического состояния такой двухпараметрической среды достаточно задать еще одно соотношение, оно называется *уравнением состояния*. В приложениях чаще всего используются уравнения состояния следующего вида:

1) внутренняя энергия задается как функция параметров V, s :

$$U = U(V, s);$$

2) теплосодержание (энтальпия) — функция от p, s :

$$i = i(p, s) = U + pV;$$

3) свободная энергия $F = U - \theta s$ — функция от V, θ :

$$F = F(V, \theta) = U - \theta s;$$

4) термодинамический потенциал $\psi = U - \theta s + pV$ — функция от p, θ :

$$\psi = \psi(p, \theta) = U - \theta s + pV.$$

Поскольку основной мерой количества тепла является температура, то потоки тепла и вызываются ее разностью. Это в термодинамике формулируется как *закон Фурье*:

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta, \quad (1.36)$$

где k — новый параметр состояния — коэффициент теплопроводности. Теперь уравнение притока тепла (1.30) приводится к виду

$$\rho \frac{dU}{dt} = \mathcal{P} : \mathcal{D} + \operatorname{div}(k\nabla\theta) + \rho h. \quad (1.37)$$

Для полного замыкания системы дифференциальных уравнений механики сплошных сред требуется еще шесть уравнений. Эти уравнения, называемые также *уравнениями состояния*, связывают тензор напряжений с движением (или перемещением). Эти связи уже имеют различный вид для жидкостей и твердых тел.

§ 1.5. Классические модели жидкости и газа

Аксиомы Стокса. Жидкости и газы представляют собой легко подвижные сплошные среды, которые не остаются в равновесии, даже если на них действуют сколь угодно малые силы. Поэтому внутренние напряжения в жидкости и газах не зависят непосредственно. Однако, как показывает опыт, эти напряжения существенно зависят от того, насколько быстро происходит деформация, т. е. от скорости деформации. В феноменологической теории обычно дается следующее определение: *жидкость* или *газ* — это такая сплошная среда, в которой тензор напряжений \mathcal{P} является функцией тензора скоростей деформации \mathcal{D} . Кроме того, тензор напряжений может зависеть от некоторой совокупности термодинамических параметров состояния и, вообще говоря, от точки пространства \mathbf{x} и времени t .

Итак, для жидких сред

$$\mathcal{P} = F(\mathcal{D}, \Pi, \mathbf{x}, t), \quad (1.38)$$

здесь $\Pi = (\rho, U, \theta, s, p)$ — набор параметров состояния.

Для жидкостей и газов предполагается выполнение *аксиом Стокса*, которые конкретизируют зависимость (1.38):

а) *среда однородна*: F не зависит явно от \mathbf{x}, t ;

б) *среда изотропна*: F является изотропной тензорной функцией тензора скоростей деформации \mathcal{D} ;

в) *покоящаяся среда идеальна*: $F(0, \Pi) = -pI$, p — давление.

Изотропность тензорной функции $F(\mathcal{D})$ означает, что для любого ортогонального преобразования O справедливо равенство

$$OF(\mathcal{D})O^* = F(ODO^*),$$

откуда аксиома (б) дает зависимость [1–6]

$$\mathcal{P} = \alpha I + \beta \mathcal{D} + \gamma \mathcal{D}^2. \quad (1.39)$$

Здесь α, β, γ являются, вообще говоря, функциями инвариантов J_1, J_2, J_3 тензора \mathcal{D} , а также термодинамических параметров состояния Π .

Инварианты J_j , $j = 1, 2, 3$, определяются так: если \mathcal{D}_{ij} — компоненты тензора \mathcal{D} , то

$$J_1 = \text{Sp}\mathcal{D} = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33},$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{13} \\ \mathcal{D}_{13} & \mathcal{D}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{22} & \mathcal{D}_{23} \\ \mathcal{D}_{23} & \mathcal{D}_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \det(\mathcal{D}_{ij}).$$

Тензор \mathcal{D} удовлетворяет тождеству Гамильтона–Кэли

$$\mathcal{D}^3 - J_1\mathcal{D}^2 + J_2\mathcal{D} - J_3\mathcal{D} = 0.$$

Термодинамическое состояние жидкостей и газов достаточно хорошо описывается равенством (1.35). Конечно, указанное тождество справедливо лишь для обратимых процессов. Классическая термодинамика рассматривает состояния среды, близкие к равновесным, и взаимные превращения одного вида энергии в другой в этих состояниях, выражаемые тождеством (1.35). Жидкости и газы обычно считаются *двухпараметрическими средами*, что выполняется при рассмотрении однофазных однокомпонентных движений.

Часто независимыми параметрами считаются плотность ϱ и удельная энтропия s , тогда задается удельная внутренняя энергия $U = U(\varrho, s)$ и из (1.35) следуют формулы

$$\theta = \frac{\partial U(\varrho, s)}{\partial s}, \quad p = \varrho^2 \frac{\partial U(\varrho, s)}{\partial \varrho}. \quad (1.40)$$

Коэффициент теплопроводности k , входящий в уравнение притока тепла (1.37), также считается известной функцией параметров состояния: $k = k(\varrho, s)$.

Иногда удобно считать независимыми параметрами состояния абсолютную температуру и плотность, тогда задается $U = U(\varrho, \theta)$. При этом из (1.35)

$$ds = \frac{1}{\theta} U_\theta d\theta + \frac{1}{\theta} \left(U_\varrho - \frac{p}{\varrho^2} \right) d\varrho$$

и выражение в правой части этого тождества будет полным дифференциалом, если и только если существует функция $F(\varrho, \theta)$ (свободная энергия), такая что

$$U = -\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{F}{\theta} \right), \quad p = \varrho^2 F_\varrho, \quad (1.41)$$

конечно, теперь $k = k(\varrho, \theta)$.

Определенный практический интерес представляет *теплоемкость* жидкости, т. е. количество тепла, которое необходимо сообщить единице массы жидкости, чтобы увеличить ее температуру на один градус при обратимом изменении состояния. *Удельная теплоемкость*

записывается так: $c = \delta Q/d\theta$. Выделяют *главные* удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и при постоянном объеме c_V :

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{d\theta} \right)_{p=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p, \quad (1.42)$$

$$c_V = \left(\frac{\delta Q}{d\theta} \right)_{V=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_V.$$

Здесь учтен закон сохранения (1.35) $\delta Q = dU + p dV$. Введение энтропии дает возможность получить и другие выражения для удельных теплоемкостей. Действительно, поскольку $\delta Q = \theta ds$, то

$$c_p = \theta \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \right)_p, \quad c_V = \theta \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \right)_V. \quad (1.43)$$

Для замыкания системы уравнений, описывающих движение жидких сред, требуется знание зависимостей коэффициентов в формуле (1.39) от инвариантов $J = (J_1, J_2, J_3)$ тензора скоростей деформаций \mathcal{D} и параметров состояния ϱ, s (или других):

$$\alpha = \alpha(J, \varrho, s), \quad \beta = \beta(J, \varrho, s), \quad (1.44)$$

$$\gamma = \gamma(J, \varrho, s), \quad \alpha(0, \varrho, s) = -p.$$

В остальном зависимости (1.44) должны вытекать или из некоторых общих предположений, или из экспериментальных данных. Таким образом, модель состоит из уравнений (1.20), (1.22), (1.37), (1.39) и (1.44). Она содержит пять уравнений (тензор \mathcal{P} исключается посредством (1.39)) относительно пяти неизвестных функций: трех компонент вектора скорости \mathbf{v} и двух независимых параметров состояния. Однако в приложениях эта модель почти не используется, так как требует очень большого объема дополнительной информации (см. соотношения 1.44)).

Ньютоновские жидкости. Наиболее употребительной и достаточно общей является так называемая *классическая модель* жидкости (газа). Она основана на том, что зависимость тензора напряжений (1.39) линейна: $\mathcal{P} = \alpha I + \beta \mathcal{D}$. Такие жидкие среды называются еще *ньютоновскими*. Имеем, прежде всего:

$$\gamma = 0, \quad \alpha = -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}$$

и

$$\operatorname{div} \mathcal{P} = \nabla(-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div} (2\mu \mathcal{D}), \quad \mathcal{P} : \mathcal{D} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \Phi,$$

где *диссипативная функция*

$$\Phi = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathcal{D}' : \mathcal{D}', \quad (1.45)$$

а $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - 3^{-1} \operatorname{div} \mathbf{v} I$ — *девиатор* тензора \mathcal{D} ; введено обозначение $\mu = \beta/2$. Учитывая, что

$$\varrho \frac{dU}{dt} = \varrho \theta \frac{ds}{dt} - p \operatorname{div} \mathbf{v},$$

получим модель движения жидкости (газа)

$$\begin{aligned} \varrho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \varrho (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \nabla(-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div} (2\mu \mathcal{D}) + \varrho \mathbf{f}, \\ \theta \varrho (s_t + \mathbf{v} \cdot \nabla s) &= \operatorname{div} (k \nabla \theta) + \Phi + \varrho h, \end{aligned} \quad (1.46)$$

в которой λ , μ , k считаются известными функциями двух независимых параметров состояния, а p , ϱ , s , θ связаны двумя соотношениями (1.40) или (1.41). Приведенная модель (1.45), (1.46) замкнута, а коэффициенты λ и μ носят название *коэффициентов динамической вязкости* и отражают свойство жидкости сопротивляться сдвиговым усилиям.

Частные модели. Из модели (1.46) и получаются хорошо известные уравнения Навье–Стокса (λ , μ , k , $\varrho = \text{const}$), идеальной несжимаемой жидкости ($\mu = 0$, $\varrho = \text{const}$), газовой динамики ($\lambda = \mu = k = 0$).

Одной из наиболее простых и достаточно хорошо зарекомендовавших себя на практике является *модель несжимаемой жидкости*.

В этом случае движущийся объем ω_t остается неизменным во все моменты времени, т. е.

$$|\omega_t| \equiv \int_{\omega_t} d\omega = \text{const}.$$

Используя равенство (1.14), найдем

$$\frac{d}{dt} |\omega_t| = \int_{\omega_0} \frac{\partial J}{\partial t} d\omega_0 = \int_{\omega_t} \operatorname{div} \mathbf{v} d\omega = 0,$$

откуда условие несжимаемости эквивалентно *соленидальности* поля вектора скорости:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.47)$$

Теперь для таких жидкостей модель (1.46) упрощается до следующей (здесь $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$):

$$\begin{aligned} \varrho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \varrho (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla p + \operatorname{div} (2\mu \mathcal{D}) + \varrho \mathbf{f}, \\ \theta \varrho (s_t + \mathbf{v} \cdot \nabla s) &= \operatorname{div} (k \nabla \theta) + \Phi + \varrho h. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Из основного термодинамического тождества (1.35) и (1.43) получим

$$\frac{\theta ds}{dt} = \frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = c_V \frac{d\theta}{dt},$$

поскольку в силу первого уравнения системы (1.48) удельный объем сохраняется в частице (вдоль траектории). Теплоемкость должна рассматриваться как известная функция температуры θ , определяемая опытным путем. Уравнение энергии в системе (1.48) может быть записано в виде

$$\rho c_V (\theta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta) = \operatorname{div} (k \nabla \theta) + \Phi + \rho h. \quad (1.49)$$

Модель (1.48) используется при описании *стратифицированных течений* и называется моделью течений *неоднородной жидкости*.

Предположение о постоянстве плотности жидкости ($\rho = \text{const}$ — *однородные жидкости*) приводит к дальнейшим упрощениям. Прежде всего, в термодинамическом отношении среда становится *однопараметрической*. Давление p исчезает из термодинамических соотношений и уже не может рассматриваться как параметр состояния. Это объясняется тем, что в (1.35) работа $p dV = 0$; остается один параметр — температура θ .

Введем кинематическую вязкость $\nu = \mu/\rho$. В общем случае $\nu = \nu(\theta)$, но для простейшей модели можно считать $\nu = \text{const}$. Слагаемое $\operatorname{div} (2\mu D)$ в уравнении импульса преобразуется так:

$$\operatorname{div} (2\mu D) = 2\mu \operatorname{div} D \equiv \mu [\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \Delta \mathbf{v}] = \mu \Delta \mathbf{v},$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial^2 / \partial x_j^2$ — оператор Лапласа. Так возникает модель *вязкой несжимаемой жидкости*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (1.50)$$

Система уравнений (1.50) называется также *системой Навье–Стокса*.

Замечательно, что термодинамика вообще не участвует в модели (1.50). Температура θ определяется из уравнения притока тепла (1.49), которое еще можно записать в виде

$$\theta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{\rho c_V} \operatorname{div} (k \nabla \theta) + \Phi' + \frac{h}{c_V}, \quad (1.51)$$

где

$$\Phi' = 2\nu c_V^{-1} D : D.$$

Простота модели (1.50) обусловлена тем, что при изучении ее динамики путем решения уравнений жидкость описывается только двумя величинами: плотностью ρ и вязкостью ν . Эти постоянные определяются из эксперимента. Модель Навье–Стокса широко используется в расчетах конкретных движений жидкости.

Иногда эффекты, вызываемые вязкостью жидкости, несущественны (цунами, струйные течения, волны на воде и т.д.). В связи с этим

имеет место *модель идеальной жидкости*: $\nu = 0$. Система уравнений здесь такова:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Она называется системой *уравнений Эйлера*. Уравнение (1.51) для температуры упрощается, и если дополнительно предположить, что k и c_V — постоянные, то

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \Delta \theta + \frac{h}{c_V},$$

где $\chi = k/\rho c_V$ — коэффициент температуропроводности.

В отличие от жидкостей, *газы* являются сильно сжимаемыми средами, и часто вязкость газа незначительна. Кроме того, для многих быстропротекающих процессов в газе можно пренебречь и теплопроводностью. Полагая в (1.45)–(1.46) $\lambda = \mu = k = 0$, приходим к системе уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathbf{f}, \\ s_t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} &= 0, \\ p &= f(\rho, s), \end{aligned} \quad (1.53)$$

где последнее соотношение носит название *уравнения состояния газа* и определяется экспериментально.

Диссипация энергии. Свойства вязкости и теплопроводности жидкостей и газов проявляются, в частности, в том, что механическая энергия какой-либо части среды может необратимым образом перейти в тепловую, рассеяться в хаотическом тепловом движении молекул. Это рассеяние механической энергии называется *диссипацией*, а процессы, сопровождаемые диссипацией энергии, — *диссипативными процессами*.

С точки зрения термодинамики, диссипативный процесс необратим и должен сопровождаться возрастанием энтропии. Обратное, рост энтропии какой-либо части сплошной среды, происходящий без «подкачки» тепловой энергии извне, служит признаком того, что в этой части среды идет диссипативный процесс.

Рассмотрим два примера, показывающие, что для жидкостей и газов ответственными за диссипацию энергии являются свойства вязкости и теплопроводности.

Первый пример связан с энтропией движущегося объема ω_t :

$$S(\omega_t) = \int_{\omega_t} \rho s d\omega.$$

Вычислим производную по времени, используя уравнение притока тепла (1.46), равенство (1.36) и тождество

$$\frac{1}{\theta} \operatorname{div} (k \nabla \theta) = \operatorname{div} \left(\frac{k}{\theta} \nabla \theta \right) + \frac{k}{\theta^2} |\nabla \theta|^2.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) = \int_{\omega_t} \frac{1}{\theta} \Phi d\omega + \int_{\omega_t} \frac{k}{\theta^2} |\nabla \theta|^2 d\omega + \int_{\partial \omega_t} \frac{1}{\theta} q_n d\Sigma + \int_{\omega_t} \frac{1}{\theta} h d\omega. \quad (1.54)$$

Предположим, что объем ω_t теплоизолирован, так что $q_n = 0$, и нет внутренних источников тепла ($h = 0$). Тогда правая часть (1.54) есть сумма двух величин, вырабатываемых за счет различных факторов. Первое слагаемое возникает за счет движения, а второе — за счет неравномерного распределения температуры в объеме ω_t . Второй закон термодинамики требует, чтобы величина (1.54) была неотрицательна. Ввиду независимости слагаемых в правой части (1.54) получим неравенства

$$\Phi \geq 0, \quad k |\nabla \theta|^2 \geq 0, \quad \theta > 0.$$

Из них и вытекают неравенства для коэффициентов вязкости и теплопроводности:

$$k \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \lambda + \frac{2}{3} \mu \geq 0. \quad (1.55)$$

Конечно, неравенства (1.55) могут быть выполнены со знаком равенства, если $D = 0$ и $\nabla \theta = 0$. В этом случае среда движется как твердое тело: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ (\mathbf{v}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ — постоянные векторы), температура во всех точках одна и та же. При движении общего характера равенства (1.55) возможны, если только $k = \lambda = \mu = 0$. Последнее фактически означает, что среда является либо невязким теплопроводным газом, либо идеальной несжимаемой жидкостью.

Следовательно, в общем случае движения жидкостей и газов *энтропия теплоизолированного объема возрастает*.

Второй пример связан с изменением кинетической энергии движущегося объема для *уравнений Навье–Стокса* (1.52).

Обычно модель (1.51), (1.52) называется моделью движения *вязкой теплопроводной жидкости*. Вообще говоря, температура и другие характеристики движения связаны не только уравнением (1.52), но и граничными условиями (см. гл. 2).

Кинетическая энергия для модели (1.52) равна

$$E(\omega_t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_t} \rho |\mathbf{v}|^2 d\omega,$$

откуда

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\omega_t} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathcal{P} d\omega + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega.$$

Поскольку $\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathcal{P} = \operatorname{div} (\mathcal{P}\mathbf{v}) + p \operatorname{div} \mathbf{v} - \Phi$, то, используя равенство $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\omega_t} \Phi d\omega + \int_{\partial\omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_n d\Sigma + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega. \quad (1.56)$$

Предположим, что второй и третий интегралы в (1.56) равны нулю, т. е. поверхностные напряжения \mathbf{p}_n и внешние массовые силы \mathbf{f} над объемом ω_t в целом никакой работы не совершают. Тогда (1.56) дает скорость изменения кинетической энергии:

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\omega_t} \Phi' d\omega. \quad (1.57)$$

Равенство (1.57) показывает, что несмотря на отсутствие работы, совершаемой над объемом ω_t , его кинетическая энергия всегда не возрастает. Сохранение $E(\omega_t)$ равносильно равенству $\Phi' = 0$ в объеме ω_t , которое возможно либо когда $\mathcal{D} = 0$, либо когда $\mu = 0$. В первом случае объем ω_t движется как твердое тело, а во втором — жидкость идеальна. Следовательно, за исключением этих возможностей, *кинетическая энергия движущегося объема убывает*. Это и есть проявление диссипативного процесса в вязкой несжимаемой жидкости, за который отвечает коэффициент вязкости μ . Величина интеграла в (1.57) дает скорость диссипации кинетической энергии. Поэтому можно сказать, что диссипативная функция Φ равна *плотности скорости диссипации кинетической энергии*. Этим, в частности, оправдано название «диссипативная функция» для величины Φ .

УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ И НА ТВЕРДЫХ СТЕНКАХ

Приводится постановка задачи о движении двух несмешивающихся жидкостей с общей поверхностью раздела. Дан подробный вывод динамического и энергетического условий из интегральных законов сохранения. Формулируется важное понятие свободной границы и рассматриваются соотношения на ней. Обсуждаются дополнительные условия, связанные с наличием твердых стенок и движущихся линий контакта.

Данная глава базируется на работах [1, 2].

§ 2.1. Понятие границы раздела

В предыдущей главе были сформулированы уравнения движения однородной жидкости. Между тем в приложениях часто возникают ситуации, когда имеется совместное движение двух жидких сред (или жидкости и газа), контактирующих по некоторой поверхности. Если контактирующие жидкости нерастворимы друг в друге, то они образуют более или менее четко выраженную границу раздела. Типичный пример такой ситуации — система вода–нефть. Граница между этими средами стабильна в состоянии системы, близком к устойчивому равновесию (например нефтяное пятно на поверхности водоема). Даже при развитии неустойчивости границы раздела (что может иметь место, в частности, при вытеснении нефти водой в капиллярах) описание движения такой среды как системы несмешивающихся жидкостей зачастую оказывается адекватным, в том числе и в диапазоне параметров, характеризующемся изменением топологии поверхности раздела. Следует отметить, что при развитии вторичной неустойчивости и дальнейшем уменьшении характерных масштабов течения указанный подход к рассмотрению подобной системы становится малопродуктивным и рациональное описание ее движения дается на языке механики гетерогенных сред. Такое описание не входит в содержание данной монографии.

Задачи о движении вязких жидкостей с границами раздела в точной постановке стали предметом математического изучения около 35 лет назад. Систематический вывод условий на границе раздела несмешивающихся жидкостей при неустановившемся неизотермическом движении впервые дан в [2]. Этому выводу и посвящен данный