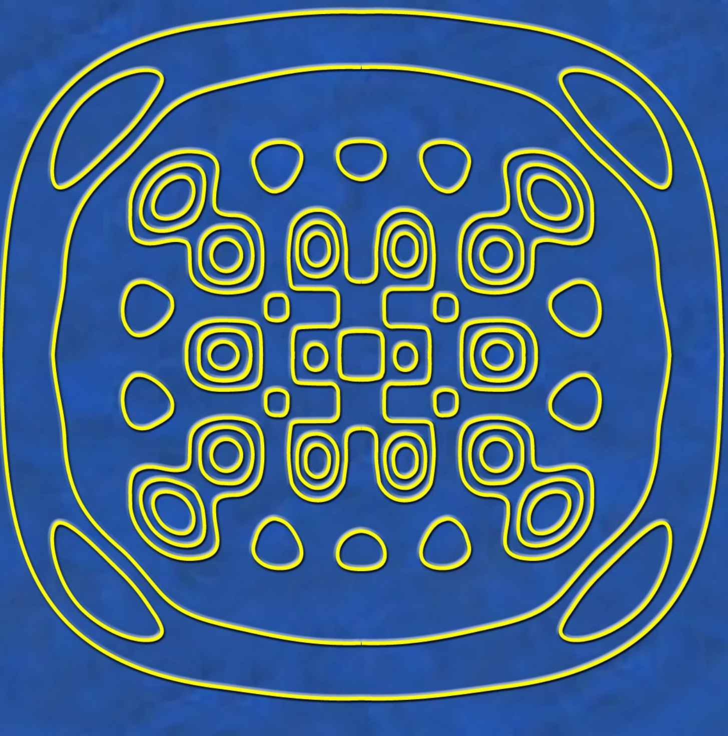
Современная оптика гауссовых пучков

Е. Г. Абрамочкин
В. Г. Волостников



УДК 534.2, 535.2
ББК 22.34
А 16

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-02-07021

Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. **Современная оптика гауссовых пучков.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 184 с. — ISBN 978-5-9221-1216-1.

Книга является введением в современную оптику гауссовых пучков и затрагивает широкий круг вопросов, связанных с формированием и преобразованием параксиальных световых полей, обобщающих классические пучки Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса. Впервые изложена теория структурно устойчивых световых полей, вращающихся при распространении. Рассмотрен ряд вопросов практического использования гауссовых пучков для задач лазерной фокусировки и манипуляций микрочастицами.

Методы, применяемые в книге при решении оптических задач, могут оказаться полезными для решения других задач, где используются специальные функции математической физики.

Книга рассчитана на специалистов в области когерентной оптики и лазерных технологий, а также студентов соответствующих. специальностей.

Научное издание

АБРАМОЧКИН Евгений Григорьевич
ВОЛОСТНИКОВ Владимир Геннадьевич

СОВРЕМЕННАЯ ОПТИКА ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

Редактор *Е.С. Артоболевская*
Оригинал-макет: *И.Г. Андреева*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 12.04.10. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 13. Тираж экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Неизвестная типография
...
...
...
...

ISBN 978-5-9221-1216-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В данной главе кратко изложены основы теории дифракции, рассмотрены уравнения Максвелла и Гельмгольца применительно к задачам оптики. Получено параболическое уравнение и показана его связь с преобразованием Френеля.

1.1. Уравнения Максвелла. Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца

При описании светового поля будем исходить из уравнений Максвелла. Они подробно рассмотрены в учебниках по электромагнетизму, поэтому здесь достаточно лишь сформулировать их. Итак, вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ связаны с вектором напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и вектором индукции $\mathbf{B}$ следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,. \tag{1.2}$$

Электрические векторы связаны друг с другом так называемым материальным уравнением, которое описывает свойство среды, в которой волна распространяется. В общем случае эта связь может быть весьма сложной, например, если среда анизотропна. Однако, для нашего рассмотрения можно предполагать простое линейное соотношение:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{1.3}$$

которое справедливо для линейной изотропной среды. Константа ε есть, как обычно, диэлектрическая проницаемость. Связь между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ задается аналогичным соотношением:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{1.4}$$

где μ — магнитная проницаемость.

При отсутствии электрических зарядов вектор $\mathbf{D}$ удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \tag{1.5}$$

Вектор же магнитной индукции всегда удовлетворяет аналогичному уравнению:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.1)–(1.6) полностью описывают любое электромагнитное поле в линейной изотропной среде без токов и зарядов.

Из уравнений Максвелла многими способами можно получать уравнения, удобные для тех или иных конкретных физических ситуаций. Например, подставим (1.4) в уравнение (1.2) и применим оператор rot к обеим частям. В результате получим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathbf{H}). \tag{1.7}$$

Подстановка (1.1) и (1.3) в (1.7) приводит к уравнению, содержащему только вектор $\mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.8}$$

Ввиду того, что оператор $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ не очень удобен для применения, целесообразно воспользоваться векторным тождеством:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \tag{1.9}$$

где $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial l^2}$ — оператор Лапласа в декартовых координатах (x, y, l). Здесь и далее мы будем использовать в качестве третьей декартовой координаты букву l вместо более привычной z, поскольку z нам понадобится для обозначения комплексных переменных.

Так как $\varepsilon = \mathrm{const}$, то $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, и уравнение (1.8) перепишется в следующем виде:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{1.10}$$

Из курса уравнений математической физики известно, что это — волновое уравнение, причем каждая декартова компонента электрического поля удовлетворяет, соответственно, скалярному волновому уравнению вида:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{1.11}$$

где величина $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ имеет физический смысл скорости света в среде с постоянными ε и μ.

Смысл волнового уравнения становится понятным, если учесть, что любая функция вида:

$$f\left(t - \frac{1}{v}\mathbf{nr}\right) \tag{1.12}$$

удовлетворяет этому уравнению, при условии, что существуют соответствующие производные. Компоненты вектора $\mathbf{r}$ являются координатами точки наблюдения поля, $\mathbf{n}$ — единичный вектор.

Решение (1.12) представляет собой плоские волны, распространяющиеся в пространстве. Действительно, рассмотрим некоторое фиксированное значение аргумента:

$$u = t - \frac{1}{v}\mathbf{nr}. \tag{1.13}$$

При любом заданном значении u функция f имеет соответствующее фиксированное значение $f(u)$. Величина $u = \mathrm{const}$ при фиксированном времени t реализуется в плоскости $\mathbf{nr} = \mathrm{const}$. Вектор $\mathbf{n}$ направлен перпендикулярно плоскости, и функция имеет одно значение на этой плоскости, движущейся со скоростью v.

Весьма важным частным случаем являются решения уравнения (1.11), которые в каждой точке пространства изменяются во времени по гармоническому закону. Такую волну можно представить, например, в виде:

$$g = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\mathbf{nr}\right). \tag{1.14}$$

Частота колебаний $\nu = \omega/2\pi$, ω — круговая частота.

Удобно ввести волновой вектор:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v}\,\mathbf{n}. \tag{1.15}$$

Тогда:

$$g = A\cos(\omega t - \mathbf{kr}). \tag{1.16}$$

Значение волн вида (1.16) обусловлено тем фактом, что, вообще говоря, $\mathbf{k}$ не является константой, а функцией частоты $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$ — это называется дисперсией, из-за чего выражения (1.1)–(1.2) описывают плоские волны лишь в отсутствие дисперсии.

Общее решение волнового уравнения в виде гармонической волны может быть представлено в комплексном виде:

$$g = \psi(x, y, l)e^{-i\omega t}. \tag{1.17}$$

Подставляя (1.17) в волновое уравнение (1.11), получим уравнение:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \tag{1.18}$$

где $k^2 = \omega^2/v^2$.

Уравнение (1.18) называется уравнением Гельмгольца, или приведенным волновым уравнением. В нем отсутствуют временные зависимости (описывает пространственное изменение поля, однако, всегда следует помнить о временно́й составляющей).

Как известно, электромагнитная волна переносит энергию. Вернемся к системе уравнений Максвелла (1.1)–(1.2) и получим закон сохранения энергии электромагнитного поля. Для этого умножим первое уравнение на $\mathbf{E}$, а второе — на $\mathbf{H}$ и вычтем одно из другого. Получим:

$$\frac{\varepsilon}{c}\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu}{c}\mathbf{H}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\,\mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}\right) + \mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\right) = 0. \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) — уравнение непрерывности, или сохранения энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля равна:

$$W_0 = W_e + W_h = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}, \tag{1.20}$$

и поток энергии этого поля (называемый вектором Умова–Пойнтинга) определяется выражением:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]. \tag{1.21}$$

Если рассматривается гармонический во времени волновой процесс, то физический смысл имеют средние за период значения $\mathbf{S}$ и W. Но, поскольку $\mathbf{S}$ и W — квадратичные функции от векторов поля, то при использовании комплексной формы нужно подставлять для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ их действительные выражения: $\frac{1}{2}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*)$ и $\frac{1}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{H}^*)$. Тогда для среднего по времени вектора $\mathbf{S}$ имеем:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi}\left[\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*} + \overline{\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}^*}\right]. \tag{1.22}$$

Учитывая, что зависимость полей от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, получим:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi}\left[\overline{\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*}\right] = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left[\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*}\right]. \tag{1.23}$$

Из уравнений (1.1)–(1.2) для решений (1.12) легко получить, что

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}], \qquad |\mathbf{E}|\sqrt{\varepsilon} = |\mathbf{H}|\sqrt{\mu}\,,$$

тогда

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\,\frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\mathbf{n} = vW_e\mathbf{n}.$$

1.2. Параболическое уравнение и преобразование Френеля

При исследовании волновых электромагнитных процессов обычно от уравнений Максвелла (1.1) и Гельмгольца (1.18) переходят к более простому уравнению, если на поле наложены некоторые дополнительные условия. Мы будем рассматривать узкие световые (лазерные) пучки. В таких пучках поле сконцентрировано около одной продольной координаты (оси пучка) и быстро спадает до нуля в поперечных координатах. Учесть это можно следующим образом. Предположим, что световая волна распространяется в направлении оси l и ее амплитуда быстро уменьшается в поперечном направлении. Тогда любую из компонент поля можно представить в виде произведения $F(x,y,l)e^{ikl}$, где F — медленно меняющаяся с ростом l комплексная функция. Подставляя это произведение в уравнение Гельмгольца (1.18) и пренебрегая членом $\dfrac{\partial^2 F}{\partial l^2}$ по сравнению с $k\dfrac{\partial F}{\partial l}$ и другими членами, получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial F}{\partial l} = 0. \tag{1.24}$$

Уравнение (1.24) называется параболическим, или уравнением Леонтовича–Фока, которые впервые его получили в теории распространения радиоволн. Это уравнение оказалось весьма эффективным в таких различных областях, как лазерная оптика и оптика рентгеновских лучей, в атомной оптике, так как дает полезный и практически важный инструмент для решения различных задач.

До сих пор мы рассматривали скалярное параболическое уравнение, считая, что это уравнение для одной из компонент поляризованного излучения. Обычно в литературе этот вопрос освещается, на наш взгляд, недостаточно четко. Например, отмечается, что, так как различные компоненты напряженности электрического вектора независимы, то для каждой из них распространение описывается параболическим уравнением. Это верно, однако, надо помнить, что поле в целом должно подчиняться уравнениям Максвелла, и в этом смысле компоненты не являются независимыми. Для некоторого изучения этого вопроса рассмотрим внимательнее распространение плоскополяризованного светового поля вдоль оси l.

Пусть декартовы компоненты электрического поля лежат в плоскости (x,l):

$$E_x = f(x,y,l)e^{-i\omega t+ikl}, \quad E_y = 0, \quad E_l = g(x,y,l)e^{-i\omega t+ikl}, \tag{1.25}$$

где f, g — функции, медленно меняющиеся с изменением l. Тогда уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}$$

для компонент поля (1.25) будут следующими:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial g}{\partial y}\,e^{-i\omega t+ikl}, \\ H_y &= -\frac{i}{\omega\mu}\left(ikf - f' + \frac{\partial g}{\partial x}\right)e^{-i\omega t+ikl}, \\ H_l &= -\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial f}{\partial y}\,e^{-i\omega t+ikl}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь и далее, штрих обозначает производную по l: $f' = \partial f/\partial l$, $g' = \partial g/\partial l$.

Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, при подстановке компоненты E_x дает следующее:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + ikg + g' = 0. \tag{1.27}$$

Подставляя теперь компоненты H_y и H_l в (1.27) уравнение Максвелла для x-компоненты $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{i\omega\mu}{c}\mathbf{E}$, получим следующее уравнение:

$$-\frac{i}{\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k^2 f + 2ikf' - ik\frac{\partial g}{\partial x} + f'' - \frac{\partial g'}{\partial x}\right) = \frac{i\omega\varepsilon}{c^2}\,f.$$

Учитывая, что $|f''| \ll |k^2 f|$, и подставляя в это уравнение g из (1.27) (т. е. $g = -\dfrac{1}{ik}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + g'\right)$), получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f + 2ikf' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\,f. \tag{1.28}$$

Теперь, если положим $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu/c^2$, то из этого уравнения получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2ikf' = 0. \tag{1.29}$$

Таким образом, это тоже параболическое уравнение.

Подставляя уравнения H_x и E_l в y-компоненту, используя уравнение (1.27), получим $(\operatorname{rot}\mathbf{H})_y = 0$, которое идентично y-компоненте 3-го уравнения Максвелла. Вычисляя 3-ю компоненту 3-го уравнения Максвелла, подставляя уравнения H_x и H_l, получим:

$$-\frac{i}{\omega\mu}\left(-ik\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) = \frac{i\omega\varepsilon}{c^2}\,g,$$

из которого, с учетом (1.27) и (1.28), получим аналогичное уравнение и на компоненту $g(x, y, l)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2ikg' = 0. \tag{1.30}$$

Последнее уравнение Максвелла, $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ удовлетворяется автоматически, так как $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$.

Из (1.27) видно, что электрическое поле не перпендикулярно к направлению распространения и имеет продольную компоненту, связанную с x-компонентой следующим образом:

$$g = -e^{-ikl}\int \frac{\partial f}{\partial x}\, e^{ikl}\, dl. \tag{1.31}$$

Форма (1.31) неудобна в работе. Воспользуемся тем, что $k \gg 1$ и возьмем интеграл в (1.31) по частям:

$$g = -e^{-ikl}\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{e^{ikl}}{ik} + e^{-ikl}\int \frac{e^{ikl}}{ik}\,\frac{\partial f'}{\partial x}\, e^{ikl}\, dl \approx -\frac{1}{ik}\,\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, векторное описание произвольного (не обязательно гауссова) плоскополяризованного параксиального поля имеет вид:

$$E_x = f(x,y,l), \qquad E_y = 0, \qquad E_l = \frac{i}{k}\,\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Например, для гауссова пучка $f(x,y,0) = \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{\rho^2}\right)$ получим

$$E_l = -\frac{2ix}{k\rho^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\right).$$

Параболическое уравнение играет важную роль во многих задачах естествознания. Как уже отмечалось, в оптике и радиофизике это уравнение впервые было предложено Леонтовичем и Фоком [1, 2] для анализа распространения радиоволн. Для задач оптики, например, функция $F(x,y,l)$ описывает поведение когерентного светового поля с длиной волны λ в вакууме в параксиальном приближении, т. е. в предположении, что при распространении изменение поля $F(x,y,l)$ вдоль x, y значительно слабее, чем вдоль l. В этом случае переменная l называется переменной распространения, параметр $k = 2\pi/\lambda$ — волновым числом [1]), а уравнение (1.24) — квазиоптическим или параболическим [2]) уравнением. Функция $F(x,y,l)$ обычно предполагается целой аналитической по x, y функцией и называется в оптике комплексной амплитудой.

---

[1]) Например, для лазерного пучка, выходящего из гелий-неонового лазера, $\lambda = 0{,}63$ мкм и, следовательно, $k \sim 10^7$ м$^{-1}$.

[2]) Это название не соответствует математической классификации уравнений в частных производных 2-го порядка, но является устоявшимся в оптике [3, 4].

В дальнейшем будет использоваться следующая, принятая в оптике терминология:

- $I(x,y,l) = F(x,y,l)\overline{F}(x,y,l) = |F(x,y,l)|^2$ — интенсивность,
- $\phi(x,y,l) = \arg F(x,y,l)$ — фаза функции F.
- $F(x,y,l) = \sqrt{I(x,y,l)}\,\exp\big(i\phi(x,y,l)\big)$ — комплексная амплитуда.

(Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение.)

Параболическое уравнение дает описание эволюции светового поля при распространении в дифференциальной форме. При наличии начального условия, например, при $l = 0$, можно, в принципе, получить распределение поля при любом l. Однако, для нашего дальнейшего рассмотрения гауссовых пучков во многих случаях более удобно представить решение параболического уравнения в виде некоторого интегрального преобразования начального поля. Чтобы получить эту связь, обратимся снова к уравнению (1.24) и представим световое поле в виде спектра плоских волн:

$$F(x,y,l) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(ik(px+qy)\big)A(p,q,l)\,dp\,dq. \tag{1.32}$$

Тогда для амплитуды спектра из (1.24) легко получить следующее уравнение:

$$\Big(2ik\frac{\partial}{\partial l} - k^2(p^2+q^2)\Big)A(p,q,l) = 0.$$

Из этого уравнения интегрированием найдем зависимость спектра от расстояния

$$A(p,q,l) = A_0(p,q)\exp\Big(-\frac{ikl}{2}(p^2+q^2)\Big). \tag{1.33}$$

Подставив (1.33) в (1.32), получим зависимость поля от l в интегральной форме

$$F(x,y,l) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(ik(px+qy) - \frac{ikl}{2}(p^2+q^2)\Big)A_0(p,q)\,dp\,dq \tag{1.34}$$

и, соответственно, связь поля и спектра при начальных условиях

$$F(x,y,0) = F_0(x,y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(ik(px+qy)\big)A_0(p,q)\,dp\,dq.$$

Подставляя в (1.34) начальный спектр в виде обратного Фурье-преобразования

$$A_0(p,q) = \Big(\frac{k}{2\pi}\Big)^2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-ik(px+qy)\big)F_0(x,y)\,dx\,dy,$$

из (1.34) получим:

$$F(x,y,l)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(ik(px+qy)-\frac{ikl}{2}(p^2+q^2)\Big)\times$$

$$\times\left[\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\exp\big(-ik(p\xi+q\eta)\big)F_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right]dp\,dq=$$

$$=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{\mathbb{R}^2}F_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\times$$

$$\times\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(ik[p(x-\xi)+q(y-\eta)]-\frac{ikl}{2}(p^2+q^2)\Big)\,dp\,dq.$$

Внутренний несобственный интеграл вычисляется явно, поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\exp(ibx+iax^2)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\,\exp\Big(-\frac{ib^2}{4a}+\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}a\Big)\qquad(a,b\in\mathbb{R}).$$

В результате мы получаем эволюцию светового поля в интегральной форме:

$$F(x,y,l)=\frac{k}{2\pi il}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\Big)\,F_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.\tag{1.35}$$

Это интегральное преобразование называется преобразованием Френеля, и прямым дифференцированием легко показать, что оно действительно является решением параболического уравнения (1.24).

Обратное к преобразованию (1.35) преобразование также является френелевским:

$$F_0(\xi,\eta)=-\frac{k}{2\pi il}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\Big)F(x,y,l)\,dx\,dy.\tag{1.36}$$

Если использовать интегральный оператор Френеля, то равенства (1.35) и (1.36) можно представить в символическом виде:

$$F(x,y,l)=\mathbf{FR}_l\big[F_0(\xi,\eta)\big],\qquad F_0(\xi,\eta)=\mathbf{FR}_{-l}\big[F(x,y,l)\big].$$

Обе формулы являются частными случаями более общего равенства, связывающего комплекснозначные распределения светового поля F в плоскостях l_1 и l_2:

$$F(x,y,l_2)=\mathbf{FR}_{l_2-l_1}\big[F(\xi,\eta,l_1)\big].\tag{1.37}$$

Для функций $F_0(\xi, \eta) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ равенство Парсеваля

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left|F(x,y,l)\right|^2 dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left|F_0(\xi,\eta)\right|^2 d\xi\,d\eta \tag{1.38}$$

выражает закон сохранения энергии световых полей: полная энергия светового поля постоянна и не зависит от выбора плоскости l.

Характерно, что решение в виде интеграла Френеля удовлетворяет параболическому уравнению (1.24). Таким образом, между дифференциальными уравнениями — параболическим и Гельмгольца — и решениями в виде интегралов установлена требуемая связь.

Глава 2

СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной главе рассматриваются двумерные интегральные преобразования типа Фурье (астигматические преобразования) известных структурно устойчивых решений параболического уравнения — пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Получены интегральные и алгебраические связи между данными семействами пучков. Установлены некоторые результаты относительно вида комплекснозначных полей, инвариантных к астигматическим преобразованиям.

2.1. Специальные функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса

В данной главе проводится поиск и исследование автомодельных решений параболического уравнения, а именно рассматривается следующий вопрос: существуют ли (и, если да, то какие именно) решения $F(x, y, l)$ параболического уравнения (1.24), интенсивность которых при изменении l сохраняет свою структуру с точностью до масштаба?

Условие структурной устойчивости при этом может быть определено следующим образом:

$$I(x, y, l) = D(l) I_0 \left(\frac{x}{d(l)}, \frac{y}{d(l)} \right), \tag{2.1}$$

где $d(l) > 0$ — масштабное изменение интенсивности. Определим вещественные переменные X, Y равенством

$$X + iY = \frac{x + iy}{d(l)}. \tag{2.2}$$

Использование переменных (X, Y, l) вместо (x, y, l) позволяет записать условие структурной устойчивости интенсивности в наиболее компактном виде: функция $I_0(X, Y)$ не зависит от l. Применение закона сохранения энергии (1.38) позволяет выразить $D(l)$ через $d(l)$:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} I(x, y, l)\, dx\, dy = D(l) d^2(l) \iint\limits_{\mathbb{R}^2} I_0(X, Y)\, dX\, dY = \text{const}\,.$$

Следовательно, $D(l) = 1/d^2(l)$.

Таким образом, задача поиска автомодельных решений $F(x,y,l)$, интенсивность которых при распространении может только изменяться в масштабе, требует также нахождения функции $d(l)$, которая характеризует поведение $I(x,y,l)$ при изменении l.

Отправной точкой при решении поставленной задачи будет вещественная форма записи уравнения (1.24). В терминах интенсивности $I(x,y,l)$ и фазы $\phi(x,y,l)$ это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(I\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(I\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right) + k\dfrac{\partial I}{\partial l} = 0, \\ 2I\left(\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial I}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial I}{\partial y}\right)^2 - \\ \qquad\qquad - 4I^2\left[\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + 2k\dfrac{\partial \phi}{\partial l}\right] = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Подставляя выражение для интенсивности (2.1) в первое уравнение этой системы, перепишем его в переменных X, Y, l:

$$\boldsymbol{\nabla}\Big(I_0\boldsymbol{\nabla}\left[\phi - \frac{1}{2}k\,d(l)d'(l)(X^2+Y^2)\right]\Big) = 0,$$

где $\boldsymbol{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial X}, \dfrac{\partial}{\partial Y}\right)$.

Если определить функцию $\phi_0(X,Y,l)$ равенством

$$\phi(x,y,l) = \frac{1}{2}k\,d(l)d'(l)(X^2+Y^2) + \phi_0(X,Y,l),$$

то структурно устойчивое световое поле $F(x,y,l)$ примет вид

$$F(x,y,l) = \frac{1}{d(l)}\sqrt{I_0(X,Y)}\times \\ \times\exp\left(\frac{1}{2}ik\,d(l)d'(l)(X^2+Y^2) + i\phi_0(X,Y,l)\right), \tag{2.4}$$

а система (2.3) в переменных X, Y, l и функциях I_0, ϕ_0 будет следующей:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\left(I_0\boldsymbol{\nabla}\phi_0\right) = 0, \\ |\boldsymbol{\nabla}\phi_0|^2 + k^2d^3(l)d''(l)(X^2+Y^2) + \\ \qquad + 2kd^2(l)\dfrac{\partial \phi_0}{\partial l} - \dfrac{1}{2I_0}\left(\boldsymbol{\nabla}^2 I_0 - \dfrac{|\boldsymbol{\nabla} I_0|^2}{2I_0}\right) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

То обстоятельство, что фаза ϕ_0, в отличие от интенсивности I_0, зависит от всех трех переменных X, Y, l, не позволяет упростить нелинейную систему (2.5) и превращает поиск ее решений в чрезвычайно трудную задачу. Однако, если использовать дополнительное предположение об асимптотическом поведении интенсивности при больших $x^2 + y^2$, то применение комплексного анализа (а именно тех результатов, которые связывают свойства функций со свойствами их Фурье-преобразований) позволяет довести решение задачи до конкретных аналитических выражений.

2.2. Целые аналитические функции, порядок роста и структурный вид световых полей

Следующие две теоремы уточняют свойства автомодельных решений $F(x, y, l)$ и позволяют конкретизировать представление (2.4).

Теорема 1 [5]. *Пусть $F(x, y, l)$ — автомодельное решение параболического уравнения в смысле (2.1) и при некоторых $C>0$, $A>0$, $\alpha \geqslant 2$ интенсивность на начальной плоскости $l=0$ удовлетворяет неравенству*

$$I(x, y, 0) \leqslant C \exp\bigl(-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)\bigr) \qquad \text{для всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

Тогда аналитическое продолжение функции $F(x, y, l)$ относительно переменных x, y есть целая функция второго порядка роста [1)] *и $\alpha = 2$. В частности, не существует автомодельных решений, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции $\exp\bigl(-A(x^2 + y^2)\bigr)$.*

Для доказательства данной теоремы потребуется ряд вспомогательных результатов, которые удобно представить в виде лемм.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая при некоторых $C > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$ неравенству*

$$|f(x)| \leqslant C \exp\bigl(-A|x|^\alpha\bigr) \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

[1)] Если $f(z)$ — целая функция одной комплексной переменной, то

$$\rho_f = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\ln\ln \max\limits_{|z|=R} |f(z)|}{\ln R}.$$

называется порядком роста функции $f(z)$. Это одна из основных характеристик поведения целой функции на бесконечности. Из данного определения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные константы A и C, что $|f(z)| \leqslant C \exp\left(A|z|^{\rho_f + \varepsilon}\right)$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Аналогично определяется порядок роста целой функции двух переменных $f(z, w)$:

$$\rho_f = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\ln\ln \max\limits_{|z|=|w|=R} |f(z, w)|}{\ln R}.$$

Соответственно, $|f(z, w)| \leqslant C \exp\left(A(|z|^{\rho_f+\varepsilon} + |w|^{\rho_f+\varepsilon})\right)$ для всех $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Если для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $C_0 > 0$, *что*

$$|f(z)| \leqslant C_0 \exp\bigl(\varepsilon |z|^\alpha\bigr) \qquad \text{для всех } z \in \mathbb{C},$$

то $f(z) \equiv 0$.

Лемма 1 является строгой формулировкой довольно очевидного факта: если целая функция быстро убывает на каком-то луче, то она должна быстро возрастать на каком-то другом луче. Аналогом данной леммы, серьезно усиливающим ее для случая $\alpha = 1$, является теорема Карлсона [6]: если $f(z)$ — целая функция, на вещественной оси $f(x) = O\left(e^{-a|x|}\right)$ для некоторого $a > 0$ и в верхней полуплоскости $f(z) = O\left(e^{k|z|}\right)$, то $f(z) \equiv 0$. Иначе говоря, если $f(z) \not\equiv 0$ — целая функция и $f(x) = O\left(e^{-a|x|}\right)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то $\rho_f > 1$. Формулировку леммы 1 тоже можно несколько усилить. Например, вместо произвольно малого ε можно взять $A/(6\alpha)$, однако такое уточнение не потребуется в дальнейшем. Основой доказательства данной леммы служат классический принцип Фрагмена-Линделефа и теорема об индикатрисе роста. Следующее определение и формулировки теорем взяты из [6, 7].

Определение. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z = re^{i\theta}$, которая регулярна в угле $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ и имеет порядок роста ρ. Тогда

$$h(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^\rho}$$

называется индикатрисой роста функции $f(z)$.

Теорема об индикатрисе роста. *Пусть* $f(z)$ — *аналитическая функция, регулярная в угле* $[\theta_1, \theta_2]$, *причем* $\theta_2 - \theta_1 < \dfrac{\pi}{\rho}$, $h(\theta_1) \leqslant h_1$ и $h(\theta_2) \leqslant h_2$. Тогда для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$h(\theta) \leqslant H(\theta) = \frac{h_1 \sin\rho\,(\theta_2 - \theta) + h_2 \sin\rho\,(\theta - \theta_1)}{\sin\rho\,(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$\left|f\bigl(re^{i\theta}\bigr)\right| \leqslant C\exp\bigl((H(\theta) + \varepsilon)r^\rho\bigr).$$

Принцип Фрагмена-Линделефа. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в замкнутом угле величины $\dfrac{\pi}{\alpha}$. Если $|f(z)| \leqslant M$ на лучах, образующих этот угол, и неравенство $|f(z)| \leqslant C\exp(|z|^\beta)$ при $\beta < \alpha$ выполняется равномерно во всем угле, то $|f(z)| \leqslant M$ во всем угле.

Доказательство леммы 1. На протяжении всего доказательства будем обозначать через C все положительные константы, используемые в оценках модуля функции $f(z)$. Такое допущение выбрано только для простоты изложения и не влияет на общность рассуждений.