

Л. П. Шатохина  
Е. М. Сигова  
Я. Ю. Белозёрова

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

РАСЧЁТЫ ПРИ СЛОЖНОМ  
СОПРОТИВЛЕНИИ

Учебное пособие

Политехнический институт



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Л. П. Шатохина**  
**Е. М. Сигова**  
**Я. Ю. Белозёрова**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**РАСЧЁТЫ**  
**ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ**

Под общей редакцией кандидата технических наук  
Л. П. Шатохиной

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Красноярск  
СФУ  
2012

УДК 539.3/.6(07)  
ББК 30.121я73  
Ш288

Рецензенты:

*С. В. Доронин*, канд. техн. наук, доц., ст. науч. сотр. отдела безопасности технических систем СКТБ «Наука» КНЦ СО РАН;

*Н. А. Кокорин*, канд. техн. наук, доц. кафедры «Прикладная механика» СибГТУ

Ш288 ***Шатохина, Л. П.***

Сопротивление материалов. Расчёты при сложном сопротивлении : учеб. пособие / Л. П. Шатохина, Е. М. Сигова, Я. Ю. Белозёрова ; под общ. ред. Л. П. Шатохиной. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2012. – 140 с.

ISBN 978-5-7638-2308-0

Приведены краткие теоретические сведения по курсу «Сопротивление материалов», необходимые для выполнения расчётно-графических и курсовых работ. Рассмотрены расчёт прямого бруса при косом изгибе, внецентренном растяжении-сжатии, изгибе с кручением; расчёт плоских и пространственных рам; расчёт статически неопределимых рам и балок; расчёт при динамических воздействиях (учёт сил инерции, ударное нагружение, колебания); расчёт на устойчивость центрально-сжатого стержня.

Предназначено для студентов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям.

**УДК 539.3/.6(07)**  
**ББК 30.121я73**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие .....</b>	<b>4</b>
<b>Задача 1.</b> Определение допускаемой нагрузки при косом изгибе.....	6
<b>Задача 2.</b> Подбор размеров сечения при косом изгибе .....	17
<b>Задача 3.</b> Определение допускаемой нагрузки при внецентренном сжатии .....	23
<b>Задача 4.</b> Подбор диаметра вала при изгибе с кручением .....	40
<b>Задача 5.</b> Подбор размеров сечения бруса с ломаной осью.....	49
<b>Задача 6.</b> Расчёт плоской рамы .....	58
<b>Задача 7.</b> Расчёт статически неопределимой рамы.....	68
<b>Задача 8.</b> Расчёт статически неопределимой балки.....	84
<b>Задача 9.</b> Учёт сил инерции при вращении рамы .....	91
<b>Задача 10.</b> Определение допускаемой высоты падения груза при ударной нагрузке.....	106
<b>Задача 11.</b> Подбор сечения рамы при колебании.....	111
<b>Задача 12.</b> Подбор сечения центрально-сжатого стержня по условию устойчивости .....	116
<b>Задача 13.</b> Определение критической силы центрально-сжатого стержня.....	121
<b>Задача 14.</b> Проверочный расчёт центрально-сжатого стержня.....	124
<b>Приложения.....</b>	<b>126</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>138</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Рабочей программой курса «Сопротивление материалов» предусмотрено выполнение курсовой работы (КР) и расчётно-графических заданий (РГЗ), которые являются важной частью самостоятельной работы студента.

Цель настоящего пособия – помочь студентам в выполнении КР и РГЗ по второй части названного курса.

В пособии рассмотрены:

расчёт прямого бруса при косом изгибе, внецентренном растяжении-сжатии, изгибе с кручением;

расчёт плоских и пространственных статически определимых рам;

расчёт статически неопределимых рам и балок;

расчёты при динамических воздействиях (учёт сил инерции, расчёты при ударе и колебании);

расчёт на устойчивость центрально-сжатого стержня.

В учебном пособии представлены все три типа расчётов: проектный, проверочный и определение нагрузки. Расчёты выполняются по общепринятым и разработанным авторами методикам.

Задачи для КР и РГЗ выбираются преподавателем для конкретной специальности. По усмотрению преподавателя некоторые пункты задания могут быть опущены или заменены другими. Исходные расчётные схемы задач и числовые данные также выбираются преподавателем.

Чтобы выполнить КР и РГЗ, студенту необходимо освоить следующий учебный материал по лекциям, учебникам и пособиям [2–4]:

построение эпюр внутренних силовых факторов в плоских и пространственных системах;

условия прочности при сложном сопротивлении;

вычисление перемещений методом Мора и способом Верещагина;

раскрытие статической неопределимости систем.

Для успешного выполнения КР и РГЗ необходимо знание и других дисциплин: математики, физики, начертательной геометрии и черчения, теоретической механики, материаловедения.

Выполненные КР и РГЗ оформляются студентом в виде *сборника решений задач и заданий* на листах формата А4 (297×210), который должен содержать необходимые чертежи и расчёты. В сборник включается:

*1-й лист* – титульный лист (см. прил. 2 данного пособия);

*2-й лист* – содержание;

*дальнейшие листы* содержат описание решения задач и выполненного задания.

Текстовую часть нужно выполнять от руки, хорошо читаемым почерком, оставляя поля: слева, снизу и сверху – по 3 см, справа – 1 см. Обозначение тригонометрических функций, букв греческого и латинского алфа-

витов выполнять правильным начертанием (см. табл. П.1.1). Все страницы сборника решений нужно пронумеровать. Номер страницы проставляется в правом нижнем углу.

На титульном листе сборника КР и РГЗ записывается тема работы: «Сложное сопротивление» (см. прил. 2). На следующей строке указывается номер варианта и номер строки числовых данных из таблиц к задачам. Ниже – фамилия и инициалы студента, шифр его группы, на следующей строке – фамилия и инициалы руководителя (преподавателя).

Оформление каждой задачи начинается с нового листа. Вначале необходимо указать номер задачи и тему. Далее надо написать её условие, указать требуемые пункты задания и исходные данные, вычертить заданную схему в масштабе, указав на ней все размеры и действующие нагрузки.

При изложении решения задачи к расчётной схеме добавляются необходимые дополнительные построения. При этом эпюры внутренних усилий нужно располагать непосредственно под расчётными схемами. На эпюрах следует указывать значения характерных ординат и единицы измерения откладываемой величины. Все схемы и эпюры выполняются по правилам и нормам машиностроительного черчения.

Решение задач должно сопровождаться последовательными, краткими и чёткими пояснениями. Размерность величин следует приводить в единицах СИ (см. табл. П.1.2 и П.1.3), значения представлять в виде десятичных или простых дробей. В вычислениях следует ограничиваться тремя значащими цифрами. Каждая задача должна содержать вывод согласно условию задачи: назначение размеров, вывод о прочности и жёсткости конструкции, указание о более предпочтительном выборе поперечного сечения, материала и т. п.

Сдача КР и РГЗ преподавателю производится в форме собеседования: студент должен изложить решение и результаты, а также решить задачи по соответствующей тематике. Полученная оценка и дата проставляются преподавателем на строке титульного листа, где указана фамилия и инициалы руководителя (преподавателя).

## Задача 1

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКАЕМОЙ НАГРУЗКИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

#### Условие задачи

Для балки задано двутавровое сечение и вид нагрузки. Значение интенсивности  $q$  нагрузки неизвестно. Расчётные схемы балок даны в двух вариантах:

вариант 1 – двухопорная балка (рис. 1.3);

вариант 2 – консольная балка (рис. 1.5).

Требуется найти допускаемую величину интенсивности  $[q]$  нагрузки, построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ , указать положение нулевой линии.

#### Краткие теоретические сведения

В реальных балочных конструкциях (балках) встречаются случаи, когда изгиб вызывается силами и моментами, расположенными либо в обеих плоскостях инерции бруса (рис. 1.1, а), либо в одной плоскости, проходящей через ось бруса и не совпадающей с главными плоскостями инерции (рис. 1.1, б). При этом изогнутая ось балки не располагается в главных плоскостях инерции сечения (рис. 1.1, в), т. е. изгиб является неплоским. За таким видом деформирования закрепилось название «косой изгиб».

Известно, что деформации балок в пределах упругих деформаций от суммы нагрузок равны сумме деформаций от каждой нагрузки (это принцип сложения или суперпозиции), поэтому неплоский *косой изгиб рассматривают как совокупность двух плоских изгибов, совершаемых в главных плоскостях инерции сечения*.

Часто главные плоскости инерции балки лежат в горизонтальной и вертикальной плоскостях. В этом случае косой изгиб удобно представлять одновременным плоским изгибом в этих плоскостях. Например, для балки, изображённой на рис. 1.1, б, силу  $P$  можно представить в виде векторной суммы  $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$  (рис. 1.1, в), тогда от силы  $P_y = P \sin \varphi$  возникает изгиб в вертикальной плоскости инерции балки, а от силы  $P_x = P \cos \varphi$  – в горизонтальной (рис. 1.1, в).

Изобразим векторы нормальных напряжений, возникающие отдельно от изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 1.1, д). Они направлены по одной прямой, поэтому их можно алгебраически складывать (рис. 1.2). Тогда для любой точки поперечного сечения нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (1.1)$$

где  $x, y$  – координаты этой точки;  $J_x, J_y$  – главные моменты инерции поперечного сечения. Точки, в которых напряжения  $\sigma = 0$ , образуют так называемую *нулевую линию* (линия  $n-n$  на рис. 1.2). Угол  $\beta$  наклона этой линии можно найти, записав  $\sigma = 0$ . При этом получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_x M_y}{J_y M_x} = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.2)$$

Здесь  $\varphi = \frac{M_y}{M_x}$  – угол наклона линии суммарного изгибающего момента в этом сечении, определяемого как  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ . Эта линия называется *силовой* (рис. 1.1,  $d$ ). Положительным направлением угла  $\varphi$  принят поворот от вертикальной оси  $y$  по часовой стрелке, положительным направлением угла  $\beta$  – поворот от горизонтальной оси  $x$  по часовой стрелке.

Из (1.2) следует, что при  $J_x \neq J_y$  имеем  $\beta \neq \varphi$ . Это означает, что *нулевая линия при косом изгибе не перпендикулярна силовой*.

Суммируя векторы прогибов сечения в вертикальной и горизонтальной плоскостях  $\overline{f_x}$  и  $\overline{f_y}$ , получим полное реальное перемещение сечения

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Для сечений, у которых  $J_x \neq J_y$  перемещение  $f$  не располагается в плоскости суммарного изгибающего момента, т. е. линия перемещения сечения не совпадает с силовой линией в сечении. Получается, что перемещение сечения происходит под углом к силовой линии сечения. Отсюда и возникло название «*косой изгиб*». Но следует помнить, что *линия полного прогиба перпендикулярна нулевой линии*.

Заметим, что для сечений с равными моментами инерции  $J_x = J_y$  косоугольного изгиба нет, но если для них задана разная нагрузка в вертикальной и горизонтальной плоскостях, то расчёт удобно вести по методике косоугольного изгиба, т. е. изгиб представлять как сумму изгибов в этих плоскостях.

По мере удаления от нулевой линии величина нормальных напряжений растёт и достигает наибольшего значения  $\sigma_{\max}$  в *опасной точке*. Для сечений в виде прямоугольника, двутавра и др., имеющих углы, опасной при косом изгибе является угловая точка. Подставив для этой точки  $|y| = y_{\max}$  и  $|x| = x_{\max}$ , получим условие прочности

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (1.3)$$

где  $W_x$  и  $W_y$  – осевые моменты сопротивления сечения.

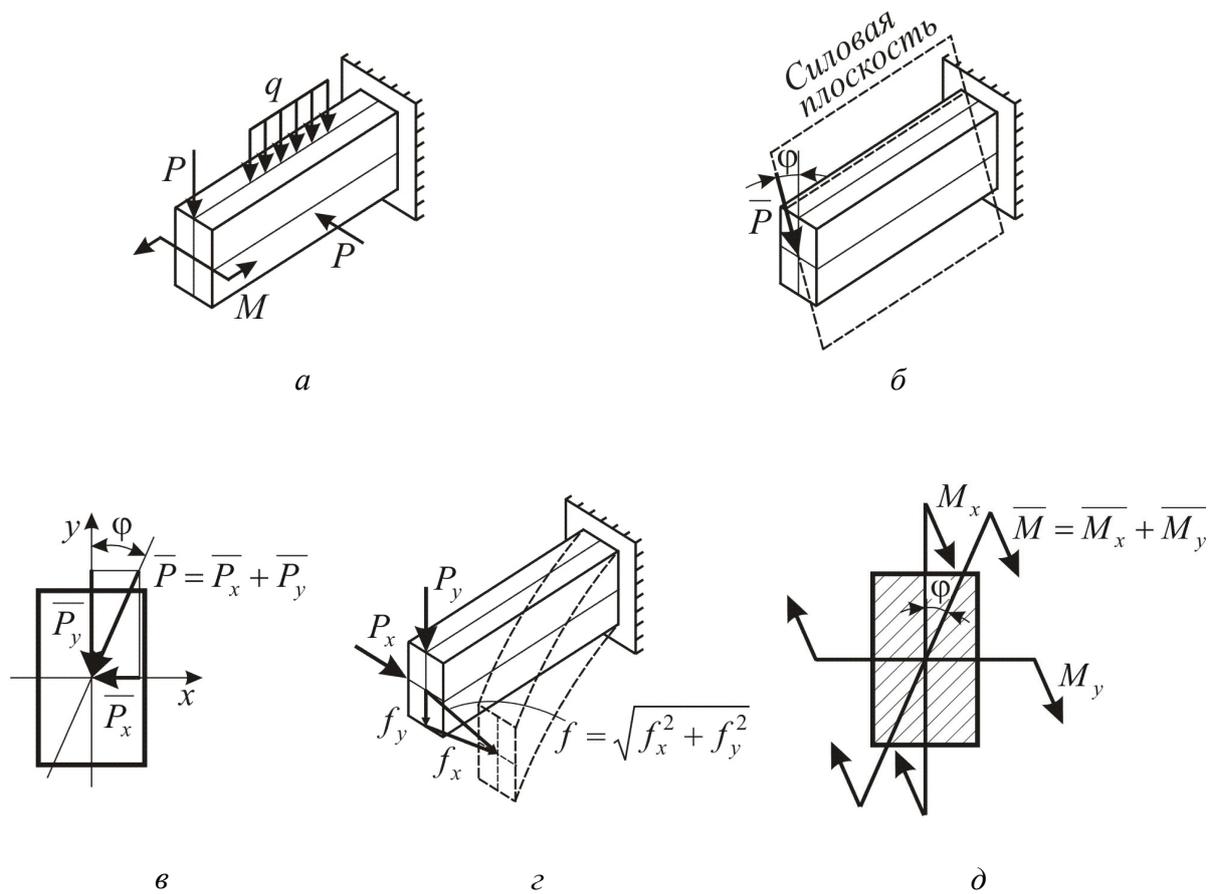


Рис. 1.1

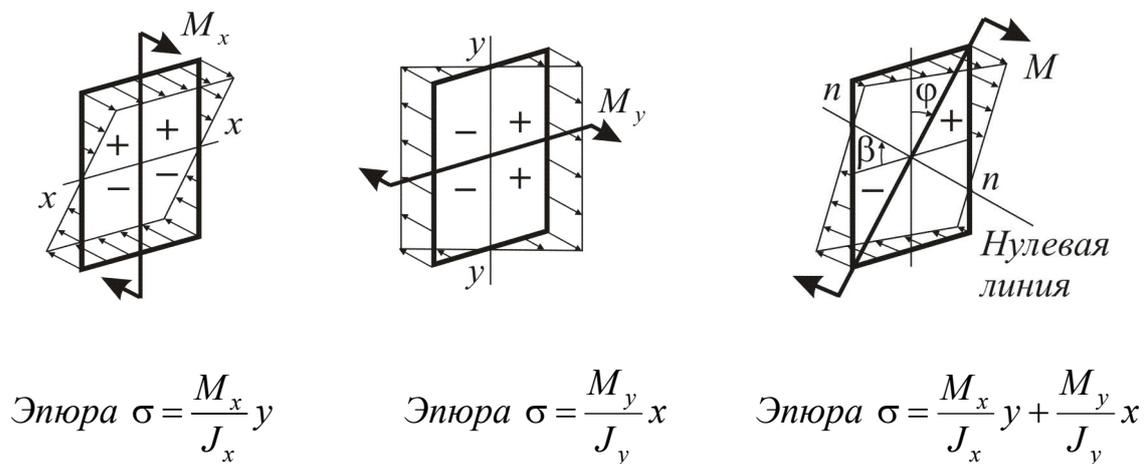


Рис. 1.2

Условие прочности балок составляют по (1.3) для так называемых *опасных сечений*, положение которых и опасные величины изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  можно определить, построив эпюры этих моментов.

## Решение

### Вариант 1. Двухопорная балка

Для двухопорной балки задана нагрузка в вертикальной и горизонтальной плоскостях инерции сечения (рис. 1.3, а). Дано:  $l = 1,6$  м;  $P = 0,8ql$ ;  $M = ql^2$ ; сечение балки – двутавр № 20.

#### 1. Определение допускаемой величины интенсивности нагрузки

Балка при действии нагрузки в вертикальной и горизонтальной плоскостях инерции испытывает кривой изгиб, поэтому допускаемую величину интенсивности  $[q]$  нагрузки найдём из условия прочности (1.3), для которого изгибающие моменты в горизонтальной и вертикальной плоскостях нагрузки  $M_x$  и  $M_y$  запишем через неизвестную величину интенсивности  $[q]$ , а значения осевых моментов сопротивления сечения  $W_x$  и  $W_y$  выпишем из ГОСТ 8239–93 по заданному номеру двутавра (см. табл. П.1.4): для двутавра № 20  $W_x = 184$  см<sup>3</sup>,  $W_y = 23,1$  см<sup>3</sup>.

Чтобы установить величины расчётных моментов  $M_x$  и  $M_y$ , построим эпюры моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Для удобства вычислений изобразим отдельно нагрузки, действующие в горизонтальной и вертикальной плоскостях, далее выполним вычисления в каждой плоскости.

Вертикальная плоскость (рис. 1.3, б). Для двухопорной балки перед вычислением изгибающих моментов необходимо найти величины опорных реакций  $R_A^B$  и  $R_B^B$  из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B = 0, & \left\{ R_A^B \cdot 4l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0, \right. \\ \sum M_A = 0, & \left. \left\{ R_B^B \cdot 4l - q \cdot 2l^2 = 0. \right. \right. \end{cases}$$

Получим  $R_A^B = 1,5ql$ ,  $R_B^B = 0,5ql$ . Найденные величины реакций проверим неиспользованным уравнением равновесия, которое должно удовлетворяться тождественно:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0, \quad 1,5ql - 2ql + 0,5ql &\equiv 0, \\ 0 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Изобразим эпюру поперечных сил  $Q_y$  (рис. 1.3, б). На участке с распределённой нагрузкой будет наклонная линия, пересекающая базисную прямую в сечении  $C$ , в котором поперечная сила равна нулю, а момент на этом участке экстремален. Найдём координату сечения  $C$ , составив уравнение  $Q_y = 0$ :

$$R_A^B - qz_0 = 0,$$

отсюда  $z_0 = 1,5l$ .

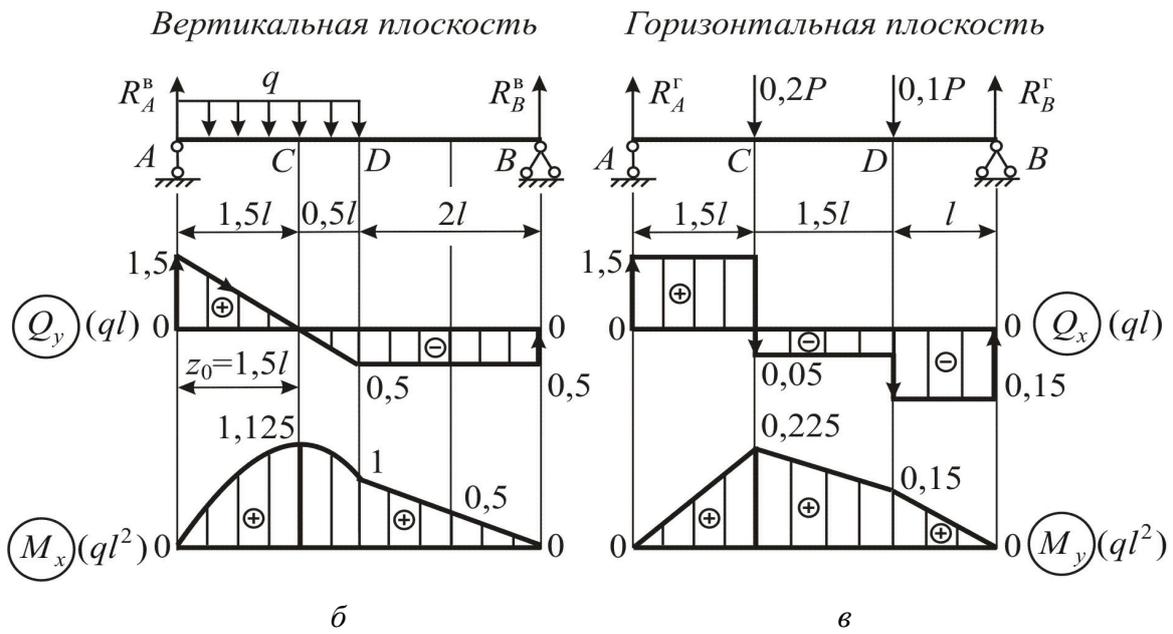
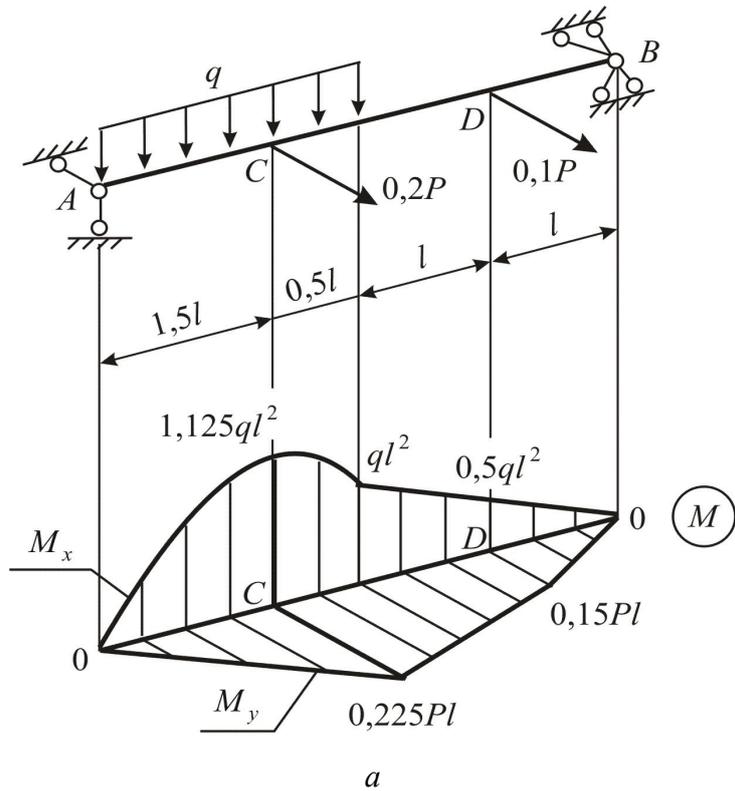


Рис. 1.3

Вычислим значения  $M_x$  в характерных сечениях  $C$  и  $D$ :

$$M_x^C = R_A^B \cdot 1,5l - q \frac{(1,5l)^2}{2} = 1,125ql^2, \quad M_x^D = R_B^B l = 0,5ql^2.$$

Изобразим эпюру моментов  $M_x$  (рис. 1.3, б): на участке с распределённой нагрузкой проводим кривую 2-го порядка, на втором – наклонную прямую.

Горизонтальная плоскость (рис. 1.3, в). Составим уравнения равновесия и вычислим значения реакций  $R_B^r$  и  $R_A^r$ :

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \end{cases} \begin{cases} R_B^r \cdot 4l - 0,2P \cdot 1,5l - 0,1P \cdot 3l = 0, \\ R_A^r \cdot 4l - 0,1Pl - 0,2P \cdot 2,5l = 0. \end{cases}$$

Получим  $R_B^r = 0,15ql$  и  $R_A^r = 0,15ql$ . Проверим правильность найденных значений реакций:

$$\sum F_y = 0: 0,15P - 0,2P - 0,1P + 0,15P = 0, \quad 0 = 0.$$

Для построения эпюры изгибающих моментов  $M_y$  вычислим значения  $M_y$  в сечениях  $C$  и  $D$ :

$$M_y^C = R_A^r \cdot 1,5l = 0,15P \cdot 1,5l = 0,225Pl,$$

$$M_y^D = R_B^r \cdot l = 0,15Pl = 0,15Pl.$$

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (рис. 1.3, в), отложив в принятом масштабе значения моментов в сечениях  $C$  и  $D$  и соединив их прямыми.

**Опасное сечение.** Чтобы нагляднее указать опасные сечения, построим эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  в изометрии (рис. 1.3, а).

По виду этих эпюр возможны такие случаи, когда нельзя назвать лишь одно сечение как опасное и приходится принимать за *возможно опасные* два и более сечений. В нашем примере по эпюре моментов в изометрии видно, что опасным является сечение  $C$ , тогда расчётные значения моментов (это *модули моментов в опасном сечении*)

$$M_x^C = 1,125ql^2 = 1,125q \cdot (1,6)^2 = 2,88q,$$

$$M_y^C = 0,225Pl = 0,225 \cdot 0,8q \cdot (1,6)^2 = 0,461q.$$

Подставим полученные расчётные значения моментов и величины  $W_x = 184 \text{ см}^3$ ,  $W_y = 23,1 \text{ см}^3$  в условие прочности (1.3):

$$\frac{2,88}{184 \cdot 10^{-6}} q + \frac{0,461}{23,1 \cdot 10^{-6}} q \leq 200 \cdot 10^6.$$

Отсюда  $q \leq 5\,618 \text{ Н/м}$ . Принимаем допускаемое значение интенсивности распределённой нагрузки  $[q] = 5,6 \text{ кН/м}$ .

## 2. Построение эпюры нормальных напряжений

Эпюра нормальных напряжений  $\sigma$  в аксонометрии для общего случая косоугольного изгиба показана на рис. 1.2. Для построения эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  в нашем расчёте надо вычислить значения  $\sigma$  в угловых точках 1–4 опасного сечения  $C$  (рис. 1.4), пользуясь формулой (1.1):

$$\sigma = \frac{M_x^C}{J_x} y + \frac{M_y^C}{J_y} x.$$

Установим знаки моментов. Как следует из схемы нагружения балки, в первой четверти сечения возникают сжимающие напряжения от  $M_x^C$  и растягивающие от  $M_y^C$ , поэтому  $M_x^C$  считаем отрицательным,  $M_y^C$  – положительным. Вычислим их значения, подставляя принятую величину интенсивности нагрузки  $[q] = 5,6$  кН/м:

$$M_x^C = -2,88q = -2,88 \cdot 5,6 = -16,13 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_y^C = 0,461q = 0,461 \cdot 5,6 = 2,58 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Учитывая знаки моментов и знаки координат точек, найдём напряжения в угловых точках сечения. Их можно записать следующим образом:

$$\sigma_1 = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{16,13 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,58 \cdot 10^3}{23,1 \cdot 10^{-6}} = -87,71 + 111,7 = 24 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = 87,71 + 111,7 = 199,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = 87,71 - 111,7 = -24 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -87,71 - 111,7 = -199,4 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру напряжений в удобной форме – в развёртке (рис. 1.4). Для этого на некотором расстоянии от сечения проведём линии, параллельные осям  $x$  и  $y$ , и отложим перпендикулярно линиям найденные значения напряжений (в принятом масштабе). Можно за отрицательное направление считать направление к сечению, за положительное – направление от сечения. Соединим намеченные точки.

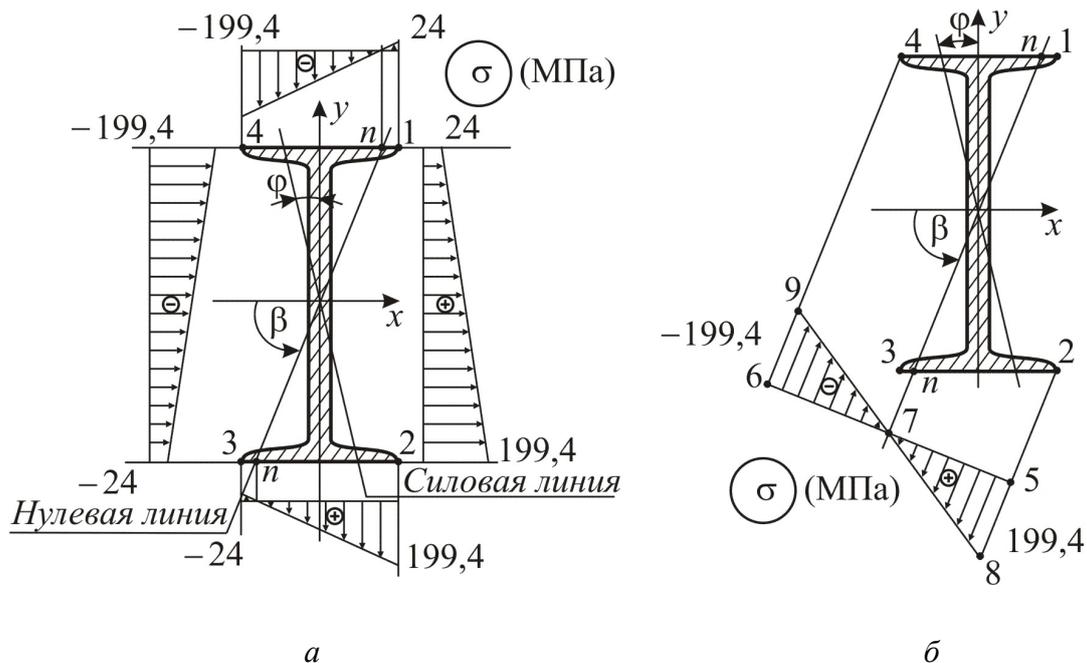


Рис. 1.4

### 3. Нахождение нулевой линии в опасном сечении

Проведём нулевую линию на сечении: точки, в которых  $\sigma = 0$ , снесём на контур сечения, получим точки  $n$  и  $n$ ; соединив их, получим нулевую линию  $n-n$ . Проверить правильность графического построения нулевой линии можно, вычислив угол наклона нулевой линии:

$$\beta = \arctg \left( \frac{J_x M_y^C}{J_y M_x^C} \right) = \arctg \left( \frac{1840 \cdot 2,58}{115 \cdot -16,13} \right) = -76,3^\circ.$$

Здесь подставлены значения осевых моментов инерции двутавра № 20:  $J_x = 1840 \text{ см}^4$  и  $J_y = 115 \text{ см}^4$ .

Отрицательный угол  $\beta$  отсчитывается от оси  $x$  против часовой стрелки, поэтому отложим угол  $76,3^\circ$  от оси  $x$  против часовой стрелки (рис. 1.4, а). Получаем то же направление нулевой линии, что и с помощью эпюры  $\sigma$ .

Нулевую линию можно использовать для построения плоской эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  (рис. 1.4, б). Для этого необходимо провести базис эпюры 5–6 перпендикулярно нулевой линии, далее – линии 2–5, 4–6 параллельно нулевой линии. Отложив от точки 5 в масштабе  $\sigma = 199,4 \text{ МПа}$ , поставим точку 8. Соединив точки 7 и 8, получим на продолжении точку 9, для которой  $\sigma = -199,4 \text{ МПа}$ . Такая эпюра хорошо иллюстрирует линейный характер изменения величин напряжений и положение опасной точки в сечении как наиболее удалённой от нулевой линии.