

А. И. Ларкин

**Собрание трудов
Том 1**

МЦНМО

УДК 53
ББК 22.3
Л 25

Ларкин А. И.
Собрание трудов. Т. 1
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
714 с.
ISBN 978-5-4439-2020-7

Настоящая книга представляет собой первый том полного собрания научных трудов академика Анатолия Ивановича Ларкина (1932–2005). Его труды относятся к различным областям теоретической физики: теории плазмы, физики ядра, квантовой теории поля, теории фазовых переходов, сверхпроводимости и другим разделам теории конденсированного состояния.

В первом томе собраны статьи, опубликованные с 1959 по 1976 г.

Книга предназначена научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики.

Подготовлено на основе книги: *А. И. Ларкин. Собрание трудов. Т. 1.* — М.: МЦНМО, 2009.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
<http://www.mcsme.ru>

Содержание

Предисловие	6
Уравнение состояния плазмы	10
Прохождение частиц через плазму	22
Термодинамические функции низкотемпературной плазмы	33
О применении методов теории сверхпроводимости к вопросу о массах элементарных частиц	37
Масса частицы в одномерной модели с четырехфермионным взаимодействием	42
О возможности сверхпроводимости у полупроводников	50
Коллективные возбуждения в сверхпроводнике	57
О коллективных возбуждениях при спаривании с моментом, отличным от нуля	74
О K -мезон-гиперонных резонансах	82
Решение уравнений Бете—Салпетера для модели Ферми—Янга	93
Теория сверхтекучей ферми-жидкости. Применение к ядру	100
Полюса Редже в нерелятивистской задаче с нелокальным и сингулярным взаимодействием	118
Феноменологический подход к теории ядра	130
Особенность амплитуды при $l = -1$ в уравнениях Бете—Салпетера	147
Влияние коллективных возбуждений на электродинамику сверхпроводников	164
Неоднородное состояние сверхпроводников	181
Векторное спаривание в сверхпроводниках малых размеров	194
Вращательный спектр ядер при больших моментах	197
The disappearance of nuclear pairing correlations as influenced by rotation	211
Сверхпроводник малых размеров в сильном магнитном поле	215
О фазовых переходах второго рода	227
Модель Изинга при взаимодействии с ближайшими соседями	245
О методе самосогласованного поля при описании фазовых переходов	257
О граничном условии эффекта Джозефсона	274
Туннельный эффект между сверхпроводниками в переменном поле	279

Коллективные возбуждения вблизи точек фазового перехода второго рода	289
Термодинамика идеального ферромагнетика	309
Аналог эффекта Джозефсона в ядерных превращениях	330
Спиновые волны и корреляционные функции в ферромагнетике	337
Ширина линии излучения при эффекте Джозефсона	357
Влияние флуктуаций на свойства сверхпроводника при температурах выше критической	363
The influence of fluctuation pairing of electrons on the conductivity of normal metal	372
Тепловые колебания и эффект Мессбауэра в области фазовых переходов в сегнетоэлектриках	374
Эффект Джозефсона в сверхпроводниках, разделенных нормальным металлом	387
О квазиклассическом методе в теории сверхпроводимости	401
О слоистой структуре в сегнетоэлектриках-фотопроводниках	413
О фазовых переходах первого рода, близких ко второму	425
Фазовый переход в одноосных сегнетоэлектриках	438
Эффект Джозефсона в точечных сверхпроводящих контактах	452
Флуктуации в сверхпроводниках	456
Влияние неоднородностей на структуру смешанного состояния сверхпроводников	458
Вириальное разложение для магнитных примесей в металлах	463
Вириальное разложение для магнитных примесей в металлах	469
О возможных состояниях квазиодномерных систем	483
Влияние неоднородностей на свойства сверхпроводников	494
Магнитные примеси в почти магнитном металле	505
Плотность состояний в неоднородных сверхпроводниках	518
Fluctuation conductivity in the vicinity of the superconducting transition	533
Сопrotивление сверхпроводников вблизи критического поля H_{c2}	547
Корреляционные функции одномерной ферми-системы с дальним действием (модель Томонага)	557
Электродинамика неоднородных сверхпроводников второго рода	574
Влияние флуктуаций на температуру перехода в квазиодномерных сверхпроводниках	586
Вклад парамагнетизма в свободную энергию Ne^3	600
Флуктуационная магнитная восприимчивость сверхпроводников и нормальных металлов	604
Спаривание с ненулевым спином в слоистых и в квазиодномерных сверхпроводниках	620
Эффект Джозефсона в широких сверхпроводящих контактах	629
Изолированная точка на кривой перехода первого рода	640

Нелинейная проводимость сверхпроводников в смешанном состоянии	652
Корреляционные функции в одномерных системах с сильным взаимодействием	667
Спонтанное нарушение симметрии первого рода	682
Вязкость вихрей в чистых сверхпроводниках	694
Сверхпроводящие контакты с неравновесной функцией распределения электронов	698
Влияние примесей на фазовые переходы в квазиодномерных проводниках	709

Предисловие

От редакторов

Настоящая книга представляет собой первый том полного собрания научных трудов академика Анатолия Ивановича Ларкина (1932–2005). Здесь собраны статьи, опубликованные с 1959 по 1976 гг. Более поздние работы войдут во второй и третий тома издания, которые, как мы надеемся, выйдут из печати в ближайшее время.

Научные интересы Анатолия Ивановича были чрезвычайно широки. Его труды относятся к различным областям теоретической физики: теории плазмы, физики ядра, квантовой теории поля, теории фазовых переходов, сверхпроводимости и другим разделам теории конденсированного состояния. Кроме того, работы А. И. Ларкина часто устанавливали или проясняли внутренние связи между различными областями физики. Хотя основные результаты А. И. Ларкина хорошо известны в научном сообществе, в оригинальных статьях есть множество ценных идей и вычислений, неизбежно выпадающих из обзоров и монографий. Нам и нашим коллегам часто приходится обращаться к журнальным статьям А. И., в том числе и очень давним. Эффективный способ знакомства с этими работами, предоставляемый настоящим изданием, окажется особенно полезен для студентов-теоретиков, не имевших возможности лично общаться с Анатолием Ивановичем.

Статьи упорядочены хронологически и представлены на языке оригинального издания (в первом томе имеется лишь несколько англоязычных статей, во втором и третьем томах их будет значительно больше). При подготовке издания мы постарались исправить замеченные в журнальных изданиях опечатки. Выражаем благодарность коллегам, помогавшим нам в работе над этим изданием: И. С. Бурмистрову, В. Г. Ваксу, В. Б. Гешкенбейну, Л. Б. Иоффе, Ю. Н. Овчинникову, П. М. Островскому, И. В. Протопопову, К. С. Тихонову, М. Н. Сербину, Я. В. Фоминову.

Представляется правильным сопроводить собрание трудов предисловием, общающим читателю об их авторе. В качестве такового мы решили использовать краткую биографию А. И. Ларкина, написанную его учениками и соавторами и опубликованную в сентябрьском номере журнала «Успехи физических наук» за 2005 г. С любезного согласия редакции УФН мы воспроизводим ниже этот текст.

*М. А. Скворцов и М. В. Фейгельман
Черноголовка, 2008 г.*

Памяти Анатолия Ивановича Ларкина¹

5 августа 2005 г. скончался Анатолий Иванович Ларкин — один из самых самобытных физиков-теоретиков своего поколения, внесший определяющий вклад почти во все области физики конденсированного состояния. Анатолий Иванович умер неожиданно, полный новых идей и творческих планов, не завершив многообещающих начинаний.

Анатолий Иванович Ларкин родился 14 октября 1932 г. в г. Коломна. Научная биография академика РАН, заведующего сектором Института теоретической физики им Л. Д. Ландау, профессора МГУ, профессора физики и члена Института теоретической физики университета Миннесоты (Миннеаполис, США), лауреата престижных международных знаков признания — премии им. Хьюлетта и Пакарда, премии Ф. Лондона, премии Л. Онсагера и премии Дж. Бардина — начиналась в Москве, более полувека назад. Поступив в МИФИ, он учился физике у блестящих учителей: И. Е. Тамма, М. А. Леонтовича, И. Я. Померанчука, А. Б. Мигдала.

Свою первую научную работу он выполнил под руководством А. Д. Сахарова, после чего был принят сначала в аспирантуру, а затем и на работу в ЛИПАН (ныне Российский научный центр «Курчатовский институт») в группу А. Б. Мигдала, где в то время работали Б. Т. Гейликман, В. М. Галицкий, С. Т. Беляев, В. Г. Вакс. В те времена теоретическая физика еще не распалась на множество узких направлений, и молодые ученые, следуя опыту своих учителей, успешно работали в различных ее областях. В своих первых работах А. И. Ларкин применяет недавно развитую технику гриновских функций к изучению термодинамики и потерь быстрых частиц в плазме. В другой серии работ совместно с А. Б. Мигдалом он распространяет теорию ферми-жидкости Ландау на физику атомного ядра. С начала 60-х годов его привлекает развитие теории сверхпроводимости, которая становится увлечением на всю жизнь.

Так, в 1964 г. А. И. Ларкин и Ю. Н. Овчинников впервые рассматривают куперовское спаривание с ненулевым импульсом — этот результат окажется понастоящему оценен значительно позже.

В 1966 г. А. И. Ларкин переходит в только что организованный Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау. С этим институтом связаны многие годы его жизни. Эта связь не прерывается и после перехода Анатолия Ивановича в 1995 году в Институт теоретической физики университета Миннесоты (Миннеаполис, США), где А. И. Ларкин работал до последних дней жизни и нашел новых друзей, учеников и соавторов.

А. И. Ларкин интенсивно и плодотворно работает над проблемами ядерной физики и теории частиц, магнитных и неупорядоченных систем, вплотную подходит к решению загадки фазовых переходов второго рода. В то же время он снова и снова возвращается к проблемам физики сверхпроводников. Вклад А. И. Ларкина в решение этих проблем действительно монументален. Отметим самые выдающиеся из его достижений в этой области физики: теория сверхпроводящих флуктуаций (совместно с Л. Г. Асламазовым), теория эффекта Джозефсона в SNS-контактах (совместно с Л. Г. Асламазовым и Ю. Н. Овчинниковым), теория слабого пиннинга, теория коллективного крипа, квазиклассическая теория неравновесных

¹ Успехи физических наук. 2005. Т. 175 (9). С. 1011.

явлений в сверхпроводниках, теория макроскопического квантового туннелирования (последние четыре совместно с Ю. Н. Овчинниковым), теория гранулированных сверхпроводников (совместно с Л. Б. Иоффе, М. А. Скворцовым и М. В. Фейгельманом).

Вклад А. И. Ларкина в физику чрезвычайно разнообразен. Наряду с теорией сверхпроводимости, ему принадлежат фундаментальные результаты во множестве других областей теоретической физики. В 1961 г. в совместной работе с В. Г. Ваксом, посвященной физике мягких пионов, впервые высказывается фундаментальная идея о спонтанном нарушении симметрии как механизме возникновения динамической симметрии элементарных частиц. В 1969 г. А. И. Ларкин, совместно с Д. Е. Хмельницким, опубликовал работу по теории одноосных сегнетоэлектриков. В этой работе впервые в теории конденсированного состояния был применен метод ренормализационной группы. Сейчас этот метод является одним из основных инструментов теоретической физики. Эта работа сыграла важную роль в создании теории критических явлений. А. И. Ларкин оказал существенное влияние и на развитие теории одномерных систем. В работах, выполненных в соавторстве с И. Е. Дзялошинским и, позднее, с К. Б. Ефетовым, впервые были вычислены фермионные функции Грина и корреляционные функции. Тем самым были заложены основы современной теории одномерных электронных систем. Важным вкладом в эту область стало применение А. И. Ларкиным и К. Б. Ефетовым теории слабого пиннинга к динамике волны зарядовой плотности, а также вычисление А. И. Ларкиным и П. А. Ли энергии активации фрейлиховской проводимости. В 80-е годы происходит существенный прогресс в понимании физики неупорядоченных проводников и в этой области А. И. Ларкин становится общепризнанным лидером. Совместно со своими соавторами (Л. П. Горьков, Д. Е. Хмельницкий, К. Б. Ефетов, А. Г. Аронов, Б. Л. Альтшулер, С. Хиками, Й. Нагаока) он вносит значительный вклад в эту область и закладывает основы таких новых направлений, как слабая локализация, мезоскопика и квантовый хаос в электронных системах.

Список научных достижений А. И. Ларкина можно продолжать и продолжать. С середины 80-х годов XX в. и до конца жизни он активно работал в области теории высокотемпературной сверхпроводимости (совместно с Л. Б. Иоффе), теории вихревого состояния (совместно с Дж. Блаттером, В. М. Винокуром, В. Б. Гешкенбейном и М. В. Фейгельманом), теории флуктуаций (совместно с А. А. Варламовым и В. М. Галицким), физики наноструктур (совместно с Л. И. Глазманом и К. А. Матвеевым), теории диффузии и хаоса (совместно с И. Л. Алейнером и Ч. Тианом). Изучая его последние публикации можно только поражаться их глубине и актуальности, а также тому, что первая в списке его работ имеет уже полувековую давность. К сожалению, Анатолий Иванович написал совсем немного обзорных статей и всего одну, только что вышедшую, книгу (совместно с А. А. Варламовым). Выход ее русского издания будет уже посмертным.

Научные достижения А. И. Ларкина неразрывно связаны в его жизни с воспитанием молодых теоретиков. Анатолий Иванович никогда не имел одновременно много учеников, однако его выдающийся талант Учителя привел в теоретическую физику многих способных людей, очень разных по характеру и складу их дарования: Ю. Н. Овчинникова, Л. Г. Асламазова, Д. Е. Хмельницкого, К. Б. Ефетова,

П. Б. Вигмана, В. Н. Филева, Л. Б. Иоффе, В. Б. Гешкенбейна, В. М. Галицкого, К. А. Матвеева, Ч. Тиана.

До последних дней он оставался желанным соавтором для большого числа коллег как именитых, так и молодых. Всякому, кому посчастливилось работать с Анатолием Ивановичем, известно особое чувство восторга овладения новым знанием. Человечность, доброта, обаяние А. И. Ларкина и радость участия в совместном творчестве притягивали к нему стольких людей с различными характерами и талантами!

Анатолий Иванович Ларкин умер, не завершив множество начинаний, оставив ученикам и соавторам заканчивать десяток начатых, благодаря его идеям, исследований. Поэтому еще долго будут появляться работы с его именем.

*А. А. Абрикосов, Б. Л. Алтшулер, В. Г. Вакс,
А. А. Варламов, П. Б. Вигман, Л. П. Горьков,
Л. И. Глазман, И. Е. Дзялошинский, К. Б. Ефетов,
Л. Б. Иоффе, Ю. Н. Овчинников, Д. Е. Хмельницкий*

Уравнение состояния плазмы

А. А. Веденов, А. И. Ларкин

Свободная энергия F полностью ионизованного газа находится в виде разложения по плотности n :

$$F = F_{\text{идеальн}} + An^{3/2} + Bn^2 \ln n + Cn^2.$$

Член $An^{3/2}$ совпадает с известным результатом Дебая—Хюккеля. Получены выражения для функций B и C . При вычислениях использовалась диаграммная техника.

Вопросу об уравнении состояния системы частиц с кулоновским взаимодействием посвящено большое число работ. Обычные формулы для вириальных коэффициентов в этом случае неприменимы. Кулоновские силы являются дальнедействующими, поэтому при разложении термодинамических величин по степеням плотности газа уже в первом члене этого разложения нельзя ограничиться парными взаимодействиями. Дебаем и Хюккелем [1] с помощью метода самосогласованного поля был найден первый член разложения свободной энергии по плотности взаимодействующих частиц n , который оказался пропорциональным $n^{3/2}$ (для единицы объема). В работах Глаубермана и Юхновского [2] предприняты попытки вычисления следующих членов разложений по плотности, однако применяемые в этих работах методы являются незаконными и приводят к неверным результатам.

В настоящей работе для вычисления первых членов разложения по плотности применяется графический метод, аналогичный методу Фейнмана в квантовой электродинамике.

1. Диаграммная техника. Газовое приближение

Рассматривается система взаимодействующих частиц в объеме V в состоянии термодинамического равновесия при температуре $T = 1/\beta$. Гамильтониан системы равен $H = H_0 + H'$, где

$$H_0 = \sum_p \varepsilon_p a_p^+ a_p, \quad H' = \frac{1}{2V} \sum_{p_1 p_2 q} V_q a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ a_{p_2+q} a_{p_1-q}, \quad \varepsilon_p = p^2/2m.$$

Здесь a_p и a_p^+ — операторы уничтожения и рождения частиц; $V_q = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $V(\mathbf{x})$ — потенциал парного взаимодействия частиц. Для кулоновского взаимодействия $V_q = 4\pi e^2/q^2$.

Статистическая сумма газа взаимодействующих частиц дается выражением

$$Z = \text{Sp} \exp \left\{ -\beta H + \beta \mu \sum_p a_p^+ a_p \right\},$$

где μ — химический потенциал.

Как показано Мацубара [3], отношение Z/Z_0 (где $Z_0 = \text{Sp} \times \exp \left\{ -\beta H_0 + \beta \mu \sum_p a_p^+ a_p \right\}$) удобно вычислять методом, применяемым в квантовой электродинамике для нахождения S -матрицы. При этом Z/Z_0 изображается суммой всех графиков, которые в электродинамике служат для вычисления вакуумного среднего от S -матрицы. Сплошной линии соответствует нулевая гриновская функция

$$\begin{aligned} G_0(p, t_1 - t_2) &= \frac{\text{Sp } T \exp \left\{ -\beta H_0 + \beta \mu \sum_p a_p^+ a_p \right\} a_p(t_1) a_p^+(t_2)}{\text{Sp} \exp \left\{ -\beta H_0 + \beta \mu \sum_p a_p^+ a_p \right\}} = \\ &= \begin{cases} (1 \mp n_p) e^{-(\varepsilon_p - \mu)\tau} & \tau > 0, \\ \mp n_p e^{-(\varepsilon_p - \mu)\tau} & \tau < 0. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь верхний и нижний знаки относятся, соответственно, к случаю ферми- и бозе-частиц, T — символ упорядочения по аргументу t ,

$$\tau = t_1 - t_2; \quad a_p(t) = a_p e^{-(\varepsilon_p - \mu)t}; \quad a_p^+(t) = a_p^+ e^{(\varepsilon_p - \mu)t}; \quad n_p = [e^{(\varepsilon_p - \mu)\beta} \pm 1]^{-1}.$$

Пунктирной линии соответствует $V_q \delta(\tau)$. На графиках удобно считать, что точки, расположенные сверху, соответствуют большим временам. Тогда все пунктирные линии будут горизонтальными. Сплошной линии, идущей вверх, при этом соответствует множитель $\mp n_p e^{-(\varepsilon_p - \mu)\tau}$, а идущей вниз: $(1 \mp n_p) e^{-(\varepsilon_p - \mu)\tau}$.

Сумма графиков, дающих Z/Z_0 , как и в квантовой электродинамике, может быть представлена в виде e^{-L} . Величина L есть сумма всех связанных замкнутых графиков, причем все рассматриваемые ниже графики входят в сумму с множителем $(-1)^{r+1+k}/2k$, где k — число пунктирных линий в данном графике, а r — число замкнутых петель. Все рассматриваемые графики являются замкнутыми; поэтому множитель $e^{\mu\tau}$ в (1) можно опустить.

Термодинамический потенциал $\Omega = -T \ln Z$ равен

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega = \Omega_0 + TL, \quad \Omega_0 = -T \ln Z_0.$$

В дальнейшем будем считать газ невырожденным (так что отклонение от бальмановского распределения мало); введем величину n , связанную с химическим потенциалом равенством

$$n = e^{\beta\mu} (m/2\pi\hbar^2\beta)^{3/2}. \quad (2)$$

Рассмотрим сначала случай короткодействующих сил. Для определенности будем считать частицы бесспиновыми. Для нахождения второго вириального коэффициента нужно просуммировать все графики, содержащие две сплошные линии, идущие вверх, а остальные линии — идущие вниз (рис. 1). В этих графиках мы пренебрежем n_p по сравнению с единицей.

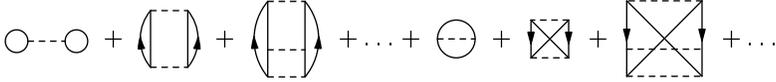


Рис. 1.

В k -том порядке теории возмущений имеется k одинаковых графиков, отличающихся только тем, какая из k пар сплошных линий идет вверх. Поэтому в каждом порядке можно рассматривать только один график и опустить множитель $1/k$. Тогда

$$-\beta\Delta\Omega = \frac{1}{2} \int_0^\beta dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 G_{p_1}(t_1 - t_2) G_{p_2}(t_1 - t_2) \times \\ \times [\Gamma(p_1 p_2 p_1 p_2 t_2 t_1) + \Gamma(p_1 p_2 p_2 p_1 t_2 t_1)] d^3 p_1 d^3 p_2. \quad (3)$$

$\Gamma(p_1 p_2 p_3 p_4 t_1 t_2)$ изображается суммой графиков «лестничного типа» (рис. 2) и удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_g(pp't_1 t_2) = V_{p-p'} \delta(t_1 - t_2) - \\ - \int_{t_2}^{t_1} dt' d^3 p_1 V_{p-p_1} G_{g/2+p_1}(t_1 t') G_{g/2-p_1}(t_1 t') \Gamma_g(p_1 p' t' t_2).$$

Здесь

$$d^3 p = dp_x dp_y dp_z / (2\pi)^3, \quad \Gamma_g(pp') = \Gamma(g/2 + p, g/2 - p, g/2 + p', g/2 - p').$$

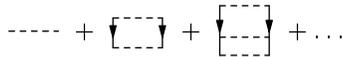


Рис. 2.

Переходя к относительным переменным $\tau = t_1 - t_2$, $\tau' = t' - t_2$ и подставляя $G(p\tau) = e^{-\varepsilon_p \tau}$ ($\tau > 0$), получим

$$\Gamma_g(pp'\tau) = V_{p-p'} \delta(\tau) - \int_0^\tau d\tau' d^3 p_1 V_{p-p_1} \times \exp \left\{ -\frac{1}{m} \left(p_1^2 + \frac{g^2}{4} \right) (\tau - \tau') \right\} \Gamma_g(p_1 p' \tau')$$

или для лапласовского изображения $\Gamma_\omega = \int_0^\infty e^{-\omega\tau} \Gamma(\tau) d\tau$

$$\Gamma_g(pp'\omega) = V_{p-p'} - \int d^3 p_1 V_{p-p_1} \frac{\Gamma_g(p_1 p' \omega)}{(p_1^2 + g^2/4)/m + \omega}.$$

Уравнение для

$$\chi_g(pp'\omega) = \Gamma_g(pp'\omega) / \left[\frac{1}{m} \left(p^2 + \frac{g^2}{4} \right) + \omega \right]$$

имеет вид неоднородного уравнения Шредингера с потенциалом V_q :

$$\left(\frac{p^2 + g^2/4}{m} + \omega \right) \chi(p) + \int V_{p-p_1} \chi(p_1) d^3 p_1 = V_{p-p'}.$$

Поэтому его решение выражается через волновые функции относительного движения частиц:

$$\begin{aligned} \chi_g(pp'\omega) &= \int V_{p-p_1} \sum_k \frac{\psi_k(p_1) \psi_k^*(p')}{E_k + g^2/4m + \omega} d^3 p_1 = \\ &= - \sum_k \psi_k(p) \psi_k^*(p') \frac{E_k - p^2/m}{E_k + g^2/4m + \omega}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя в (3)

$$G(p, \tau) = \exp[\mu\beta - (\beta + \tau)\varepsilon_p], \quad \tau < 0,$$

найдем лапласовское изображение функции $\varphi(\beta) = -\beta\Delta\Omega e^{-2\mu\beta}$:

$$\varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{-\beta\omega} \varphi(\beta) d\beta = \int d^3 p d^3 g \frac{\Gamma_g(p, p, \omega) + \Gamma_g(p, -p, \omega)}{(p^2/m + g^2/4m + \omega)^2}.$$

Используя формулу (4), получим

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= - \int d^3 p d^3 g \frac{1}{p^2/m + g^2/4m + \omega} \times \\ &\quad \times \sum_k \psi_k(p) [\psi_k^*(p) + \psi_k^*(-p)] \frac{E_k - p^2/m}{E_k + g^2/4m + \omega}. \end{aligned}$$

Поскольку $\psi_k(-p) = \pm\psi_k(p)$ соответственно для состояний с положительной и отрицательной четностью, это выражение может быть записано в виде

$$\varphi(\omega) = -2 \int d^3 p d^3 g \frac{1}{p^2/m + g^2/4m + \omega} \sum' \psi_k(p) \psi_k^*(p) \frac{E_k - p^2/m}{E_k + g^2/4m + \omega},$$

где \sum' берется по четным состояниям. Возвращаясь к $\varphi(\beta)$, получим для добавки к $\Delta\Omega$ выражение

$$\begin{aligned} -\beta\Delta\Omega &= \frac{1}{2}e^{2\mu\beta} \int 2 \sum'_k (e^{-\beta E_k} - e^{-\beta p^2/m}) \psi_k(p) \psi_k^*(p) d^3p \int e^{-\beta g^2/4m} d^3g = \\ &= \frac{1}{2}e^{2\mu\beta} \left(\frac{m}{\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} \left\{ \sum'_k e^{-\beta E_k} - \int e^{-\beta p^2/m} d^3p \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

совпадающее с найденным в [4]. Для случая ферми-частиц со спином 1/2 получается аналогичное выражение, отличающееся тем, что вместо суммы по четным состояниям \sum' входит $\frac{1}{4}\sum' + \frac{3}{4}\sum''$, где \sum'' — сумма по нечетным состояниям.

В квазиклассическом случае сумму в (5) можно заменить интегралом

$$2 \sum'_k e^{-\beta E_k} = \int e^{-\beta E} \frac{dn}{dE} dE,$$

где

$$n(E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{r\sqrt{E-U}} 2l dl \sqrt{m(E - l^2/mr^2 - U)}.$$

Подставляя в (5), получим

$$-\beta\Delta\Omega = \frac{1}{2}n^2 \int_0^\infty (e^{-\beta U} - 1) 4\pi r^2 dr, \quad (5a)$$

где n определяется формулой (2), что совпадает с добавкой $\Delta\Omega$, обусловленной вторым вириальным коэффициентом, в классическом случае.

2. Суммирование графиков в случае кулоновского взаимодействия

В Приложении показано, что для нахождения термодинамических потенциалов плазмы достаточно знать Ω при $V_{q=0} \equiv V_0 = 0$: $\Omega_{V_0=0} = \tilde{\Omega}$. Поэтому можно не рассматривать графиков с V_0 (например, график рис. 3, а). Кроме того, расхо-

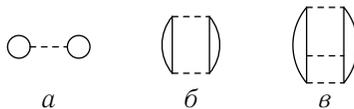


Рис. 3.

димости возникают из графиков первых порядков теории возмущений (рис. 3, б и в).

График 3, б дает вклад, равный

$$-\frac{1}{4} \int d^3 \mathbf{q} \int_0^\beta dt_1 \int_0^\beta dt_2 V_{\mathbf{q}}^2 \Pi_{\mathbf{q}}^2(t_1 t_2), \quad (6)$$

где

$$\Pi_{\mathbf{q}}(t_1 t_2) = \int G_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}(t_1 t_2) G_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}(t_2 t_1) d^3 p.$$

Интеграл в (6) линейно расходится в области малых \mathbf{q} . Удобно поэтому представить $\Pi_{\mathbf{q}}^2$ в виде суммы

$$\Pi_0^2 + \{2(\Pi_{\mathbf{q}} - \Pi_0)\Pi_0 + (\Pi_{\mathbf{q}} - \Pi_0)^2\},$$

где Π_0 — значение $\Pi_{\mathbf{q}}$ в точке $q = 0$: $\Pi_0 \equiv \Pi_{\mathbf{q}=0} = -n$.

При подстановке этого выражения в (6) интеграл, содержащий фигурную скобку, не имеет особенностей и равен:

$$\frac{1}{4} \pi^{3/2} n^2 e^4 \beta^{5/2} \hbar m^{-1/2}. \quad (7)$$



Рис. 4.

Расходимость в интеграле, содержащем Π_0 , связана с тем, что пренебрежение некоторыми членами высшего порядка по плотности является незаконным. Например, для вклада от графиков рис. 4 подынтегральное выражение в области малых \mathbf{q} становится больше, чем соответствующее выражение для графика рис. 3, б. Поэтому до выполнения интегрирования по \mathbf{q} необходимо просуммировать подынтегральные выражения во всех тех графиках, в которых каждое $V_{\mathbf{q}}$ имеет один и тот же вектор \mathbf{q} . Поскольку $\Pi_0 = -n$ не зависит от t , суммирование легко выполняется:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (\beta \Pi_0 V_{\mathbf{q}})^2 + \frac{1}{6} (\beta \Pi_0 V_{\mathbf{q}})^3 + \dots = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} [(\beta \Pi_0 V_{\mathbf{q}} \lambda)^2 + (\beta \Pi_0 V_{\mathbf{q}} \lambda)^3 + \dots] = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\beta^2 \Pi_0^2 V_{\mathbf{q}}^2 \lambda^2}{1 - \beta \Pi_0 V_{\mathbf{q}} \lambda}. \end{aligned}$$

Интегрирование по q и λ дает

$$\Delta \tilde{\Omega} = -\frac{2}{3} \sqrt{\pi} \beta e^3 (-\Pi_0)^{3/2}. \quad (8)$$

Вклад от графика рис. 3, *в* дается интегралом, логарифмически расходящимся в области, где все q малы:

$$\frac{1}{2} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} I_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2};$$

$$I_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} = \int_0^\beta dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 G_{\mathbf{p}_1}(t_1 t_3) G_{\mathbf{p}_2}(t_1 t_3) \times \\ \times G_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}_1}(t_3 t_2) G_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_1}(t_3 t_2) G_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2}(t_2 t_1) G_{\mathbf{p}_2+\mathbf{q}_2}(t_2 t_1).$$

При вычислении удобно представить I в виде

$$I_{q_1 q_2} = \left\{ I_{q_1 q_2} - \frac{\beta^3 n^2}{6(1 + \lambda \mathbf{q}_1^2)(1 + \lambda \mathbf{q}_2^2)(1 + \lambda(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2)} \right\} + \\ + \frac{\beta^3 n^2}{6(1 + \lambda \mathbf{q}_1^2)(1 + \lambda \mathbf{q}_2^2)(1 + \lambda(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2)} \quad (9)$$

(где $\lambda = \beta \hbar^2/m$). Интеграл, содержащий фигурную скобку, не имеет особенностей и равен

$$\frac{1}{3} \pi a n^2 (\beta e^2)^3, \quad (10)$$

где a — численный коэффициент порядка единицы. Точное вычисление этого коэффициента мы не будем проводить по следующим соображениям. В рассматриваемом далее случае низких и высоких температур (где имеет место, соответственно, квазиклассика и борновское приближение для электронов) коэффициент перед членом порядка n^2 в разложении Ω по плотности оказывается по порядку величины равным $(\hbar^2 \beta/m)^{3/2}$, т. е. значительно большим, чем фигурирующая в (10) величина $(\beta e^2)^3$. Поскольку, с другой стороны, сам член порядка n^2 является наименьшим среди найденных в настоящей работе, малые поправки порядка $(\beta e^2)^3$ к коэффициенту при этом члене будут отброшены.

В оставшемся втором слагаемом в $I_{q_1 q_2}$ до выполнения интегрирования по $q_{1,2}$ просуммируем вклады тех графиков высшего порядка по плотности, в которых все импульсы \mathbf{q} на пунктирных линиях совпадают с одним из импульсов \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 , $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$. Это суммирование приводит к замене V_q на

$$V_q/(1 - \beta \Pi_0 V_q) = 4\pi e^2/(q^2 + \varkappa^2), \quad \varkappa^2 = -4\pi e^2 \beta \Pi_0.$$

При этом интеграл от второго члена в I становится сходящимся. При вычислении его удобно сделать преобразование Фурье по q :

$$\frac{4\pi}{q^2 + \varkappa^2} \frac{1}{1 + \lambda q^2} = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{e^{-\varkappa r} - e^{-r/\sqrt{\lambda}}}{r} \frac{1}{1 - \lambda \varkappa^2} d\mathbf{r},$$

после чего интеграл принимает вид

$$\frac{1}{2} e^6 \frac{\beta^3 n^2}{6} 4\pi \int \frac{dr}{r} (e^{-\varkappa r} - e^{-r/\sqrt{\lambda}})^3 (1 - \lambda \varkappa^2)^{-3}. \quad (10a)$$

Вычисляя его с точностью до членов порядка $n^{5/2}$ по плотности и пренебрегая поправкой $(\beta e^2)^3$ в квадратичном по плотности члене, получим

$$(\pi/3)n^2(e^2\beta)^3 \ln(\sqrt{\lambda}\chi). \quad (10b)$$

Таким образом, для получения правильной вириальной поправки $\Delta\Omega$ системы с кулоновским взаимодействием необходимо исправить вклады от графиков низших порядков теории возмущений. Для этого нужно вычесть из общей формулы (5) первые члены разложения по степеням взаимодействия и прибавить исправленные выражения, полученные указанным выше способом.

В квазиклассическом случае $e^2/\hbar v \gg 1$ получим, вычитая в формуле (5a) первые члены разложения по e^2 и добавляя исправленные члены (8), (9) и (10a):

$$-\beta\Delta\tilde{\Omega} = \frac{n^2}{2} \int_0^\infty \left[\left(e^{-\beta e^2/r} - 1 + \frac{\beta e^2}{r} - \frac{(\beta e^2/r)^2}{2} + \frac{(\beta e^2/r)^3}{6} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(\beta e^2)^3}{6} \frac{e^{-3\chi r}}{r^3} \right] 4\pi r^2 dr + \frac{2}{3} \sqrt{\pi\beta^3} e^3 n^{3/2}. \quad (11)$$

Здесь мы не учитываем квантовых поправок, поэтому опущен вклад (7) и положено $\lambda = 0$. Ограничиваясь при вычислении интеграла главными членами разложения по n , получим:

$$-\beta\Delta\tilde{\Omega} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi\beta^3} e^3 n^{3/2} + \frac{\pi}{3} n^2 (\beta e^2)^3 \ln \frac{1}{\beta e^2 \chi}. \quad (12)$$

3. Уравнение состояния плазмы

Рассмотрим систему, состоящую из ионов с зарядом z и электронов. Будем рассматривать только случай классического движения ионов.

В приведенных выше формулах (8)–(10a) нужно произвести следующее изменение: величина Π_0 , представляющая собой вклад от электронной и ионной петель, равна

$$\Pi_0 = -(z^2 n_i + n_e), \quad n_{i,e} = e^{\beta \mu_{i,e}} (m_{i,e}/2\pi\hbar\beta)^{3/2}. \quad (13)$$

Величина $\chi^2 = -4\pi\beta e^2 \Pi_0$ равна, следовательно, $4\pi\beta e^2 (z^2 n_i + n_e)$.

Рассмотрим два предельных случая.

$$a) \quad T \ll me^4/\hbar^2.$$

В этом случае движение и ионов, и электронов является квазиклассическим. Дебаевский член в $\Delta\Omega$ (пропорциональный $n^{3/2}$), получается из (8) подстановкой вместо Π_0 его выражения (13). Следующий член разложения Ω по степеням плотности, пропорциональный $n^2 \ln n$, получается из графиков рис. 3, в, причем сплошные линии на этом рисунке могут изображать как электронные, так и ионные гриновские функции. Вклад от графиков, содержащих две электронные или две ионные петли, получается из второго слагаемого формулы (12) заменой $n^2 e^6$

на $n_e^2 e^6$ и $z^6 n_i^2 e^6$, соответственно. При вычислении вклада от графика с одной электронной и одной ионной петлей по формуле (11) мы получили бы интеграл, экспоненциально расходящийся при малых r , так как в этом случае e^2 в формуле (11) надо заменить на $-z^2 e^2$. Это связано с неприменимостью классического выражения (11) на малых расстояниях. Для получения члена $n^2 \ln n$ можно, тем не менее, воспользоваться формулой (11), ограничиваясь при интегрировании областью, в которой (11) справедливо. В результате получим (пренебрегая членами $n_e n_i$):

$$-\frac{\pi}{3}(ze^2\beta)^3 n_i n_e \ln \frac{1}{\beta e^2 \chi}. \quad (14)$$

При вычислении члена порядка $n_i n_e$ по формуле (5) можно ограничиться первым членом суммы, соответствующим основному состоянию электрона в поле иона заряда z :

$$n_i n_e \exp \{ \beta z^2 m e^4 / 2 \hbar^2 \}.$$

Заметим, что погрешность, допущенная при вычислении (14), экспоненциально мала по сравнению с этим членом; экспоненциально малы также и другие слагаемые в формуле (5).

Таким образом, в квазиклассическом случае выражение для потенциала Ω имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta \tilde{\Omega} = \beta \Omega_0 - \frac{2}{3} \sqrt{\pi \beta^3} e^3 (z^2 n_i + n_e)^{3/2} + \frac{\pi}{3} (\beta e^2)^3 (z^2 n_i - n_e)^2 \ln \frac{1}{\beta e^2 \chi} + \\ + \left(\frac{2\pi \hbar^2 \beta}{m} \right)^{3/2} n_i n_e \exp \left\{ \frac{\beta z^2 m e^4}{2 \hbar^2} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Заметим, что это выражение в действительности справедливо при $T \ll z^2 m e^4 / \hbar^2$.

$$\text{б) } T \gg z^2 m e^4 / \hbar^2$$

В этом случае взаимодействие электронов между собой и с ионами можно рассматривать по теории возмущений. Член, пропорциональный $n^{3/2}$, остается неизменным. Взаимодействие ионов между собой приводит к добавке в Ω , получающейся из второго слагаемого формулы (12) заменой $n^2 e^6$ на $n_i^2 z^6 e^6$.

«Необменные» члены электрон-электронного взаимодействия второго и третьего порядка по e^2 даются выражениями (7) и (10b), соответственно, причем n нужно заменить на n_e . Соответствующие члены от электрон-ионных взаимодействий получаются следующей заменой: во втором порядке нужно заменить $n^2 e^4$ на $z^2 n_i n_e e^4$ и добавить множитель $1/\sqrt{2}$, возникающий из-за того, что приведенная масса в этом случае увеличивается в два раза; в графике третьего порядка следует заменить $n^2 e^6$ на $-z^3 n_i n_e e^6$. «Обменные» члены, возникающие от электрон-электронного взаимодействия и соответствующие графикам рис. 5, вносят в добавку $\beta \Delta \Omega$ следующий вклад: обменный член первого порядка теории возмущений (рис. 5, a) равен:

$$\frac{\beta}{2} \int V_q n_{p+q/2} n_{p-q/2} d^3 p d^3 q = \pi n^2 \beta^2 e^2 \frac{\hbar^2}{m},$$

член второго порядка (рис. 5, б) есть

$$\frac{1}{2} \int_0^\beta dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int G_{p+q/2+q_1/2}(t_1 t_2) G_{p-q/2+q_1/2}(t_2 t_1) G_{p-q/2-q_1/2}(t_1 t_2) \times \\ \times G_{p+q/2-q_1/2}(t_2 t_1) V_q V_{q_1} d^3 p d^3 q d^3 q_1;$$

подставляя вместо гриновской функции G ее выражение (1), получим:

$$\pi^{3/2} \ln 2 \cdot n^2 e^4 \beta^{5/2} \hbar / \sqrt{m}.$$

Таким образом, в случае $T \ll z^2 m e^4 / \hbar^2$ разложение термодинамического потенциала $\tilde{\Omega}$ по плотности имеет вид

$$\beta \tilde{\Omega} = \beta \Omega_0 - \frac{2}{3} \sqrt{\pi \beta^3} e^3 (z^2 n_i + n_e)^{3/2} + (\pi/3) (\beta e^2)^3 [z^6 n_i^2 \ln(1/z^2 \beta e^2 \varkappa) + \\ + n_e^2 \ln(m^{1/2} / \hbar \beta^{1/2} \varkappa) - 2z^3 n_i n_e \ln(m^{1/2} / \hbar \beta^{1/2} \varkappa)] + \frac{1}{4} \pi^{3/2} n_e^2 \hbar^3 \beta^{3/2} m^{-3/2} + \\ + n_e^2 \{ -\pi e^2 \hbar^2 \beta^2 m^{-1} + \pi^{3/2} (\ln 2 + 1/4) e^4 \hbar \beta^{5/2} m^{-1/2} \} + \\ + n_i n_e \{ 2^{-1/2} \pi^{3/2} z^2 e^4 \hbar \beta^{5/2} m^{-1/2} \}. \quad (16)$$

Член $\frac{1}{4} n_e^2 \hbar^3 (\pi \beta / m)^{3/2}$ в этом выражении не зависит от взаимодействия и связан с отклонением функции распределения электронов по импульсам от максвелловской, связанным с тождественностью электронов.

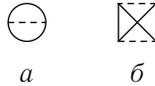


Рис. 5.

Из уравнений

$$\partial \tilde{\Omega} / \partial \mu_i = -N, \quad \partial \tilde{\Omega} / \partial \mu_e = -zN$$

выразим μ_i и μ_e через атомарную плотность $N/V \equiv n$; подставляя в формулу

$$F = \Omega + \mu_i N + \mu_e z N,$$

найдем свободную энергию единицы объема:

$$\beta F = \beta F_0 - \frac{2}{3} \sqrt{\pi \beta^3} e^3 [z(z+1)]^{3/2} n^{3/2} + \frac{\pi}{3} (\beta e^2)^3 z^2 (z^2 - 1)^2 n^2 \ln \frac{m^{1/2}}{\beta^{1/2} \hbar \varkappa} + \\ + n^2 \left\{ \frac{\pi^{3/2}}{4} z^2 \frac{\hbar^3 \beta^{3/2}}{m^{3/2}} - \pi z^2 e^2 \frac{\beta^2 \hbar^2}{m} + \left(\ln 2 + \frac{1}{4} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \pi^{3/2} z^2 e^4 \frac{\hbar \beta^{5/2}}{m^{1/2}} \right\}. \quad (17)$$

4. Заключение

Выражение (17) представляет собой разложение свободной энергии по плотности. Коэффициент в квадратичном по плотности члене является функцией параметра $ze^2\sqrt{\beta m}/\hbar$. Найдены три первых члена разложения по этому параметру. В случае, когда $ze^2\sqrt{\beta m}/\hbar \sim 1$, функция выражается через фазы в кулоновском поле и может быть вычислена. Член разложения F по плотности, пропорциональный $n^{5/2}$, также может быть выражен через фазы; для нахождения же более высоких членов разложения по плотности необходимо знать волновые функции системы трех частиц, взаимодействующих по закону Кулона.

В заключение авторы приносят благодарность Л. Д. Ландау и В. М. Галицкому за ценные дискуссии.

Приложение

Покажем, как, зная вычисленную в тексте величину $\tilde{\Omega} = \Omega_{V_0=0}$, найти Ω при $V_0 \rightarrow \infty$.

Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H' = \frac{1}{2V} \sum_q V_q \sum_{pp'} (a_p^+ a_{p'}^+ a_{p'-q} a_{p+q} + z^2 \alpha_p^+ \alpha_{p'}^+ \alpha_{p'-q} \alpha_{p+q} - 2z a_p^+ \alpha_{p_1}^+ \alpha_{p_1-q} a_{p+q}),$$

где a_p, α_p — операторы уничтожения электронов и ионов, соответственно. Для единицы объема Ω как функция μ_e, μ_i и V_0 определяется выражением

$$\beta\Omega = -\frac{1}{V} \ln \text{Sp} \exp \left\{ -\beta(H_0 + H' - \mu_e \sum_p a_p^+ a_p - \mu_i \sum_p \alpha_p^+ \alpha_p) \right\}.$$

Дифференцируя это равенство по V_0, μ_e и μ_i , легко получить соотношение с точностью до членов, стремящихся к нулю при $V \rightarrow \infty$:

$$\partial\Omega/\partial V_0 = -\frac{1}{2}(z\partial\Omega/\partial\mu_i - \partial\Omega/\partial\mu_e)^2.$$

Введем новые переменные

$$M = z\mu_e + \mu_i, \quad \mu = (z\mu_e - \mu_i)/2z,$$

тогда уравнение примет вид

$$\partial\Omega/\partial V_0 = -\frac{1}{2}(\partial\Omega/\partial\mu)^2. \quad (\text{I})$$

Нужно найти решение этого уравнения при начальном условии $\Omega(\mu, 0) = \tilde{\Omega}(\mu)$. Общий интеграл имеет вид

$$\Omega = -\frac{a^2}{2} V_0 + a\mu + b(a), \quad (\text{II})$$

где a — функция μ и V_0 , определяемая из уравнения

$$-aV_0 + \mu + b'(a) = 0. \quad (\text{III})$$

Функция $b(a)$ выбирается так, чтобы удовлетворить начальному условию

$$a(\mu, 0)\mu + b[a(\mu, 0)] = \tilde{\Omega}(\mu). \quad (IV)$$

Из (III) видно, что при $V_0 \rightarrow \infty$ величина $a(\mu, V_0)$ стремится к нулю, как $(\mu + b'(0))/V_0$; поэтому $\Omega(\mu, \infty) = b(0)$ и не зависит от переменной μ .

Для нахождения $b(0)$ продифференцируем равенство (IV) по μ и, используя (III), получим $a(\mu, 0) = d\tilde{\Omega}/d\mu$.

Определим μ_0 уравнением

$$(d\tilde{\Omega}/d\mu)_{\mu=\mu_0} = 0. \quad (V)$$

Подставляя в (IV) $\mu = \mu_0$, получим $b(0) = \tilde{\Omega}(\mu_0)$.

Таким образом,

$$\Omega(\mu, \infty) = \tilde{\Omega}(\mu_0, 0), \quad (VI)$$

где μ_0 определяется уравнением (V).

Свободная энергия системы равна $F = \Omega + MN$, причем M находится из условия $\partial\Omega/\partial M = -N$. Возвращаясь к переменным μ_e , μ_i и учитывая формулы (V) и (VI), получим

$$F = \tilde{\Omega} + z\mu_e N + \mu_i N,$$

где μ_i , μ_e определяются равенствами

$$\partial\tilde{\Omega}/\partial\mu_i = -N, \quad \partial\tilde{\Omega}/\partial\mu_e = -zN.$$

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 октября 1958 г.

Литература

- [1] Debye P., Hückel E. // Phys. ZS. — 1923. — V. 24. — P. 185.
 [2] Глауберман А. Е., Юхновский И. Р. // ЖЭТФ. — 1952. — Т. 22. — С. 564, 572; Юхновский И. Р. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 379.
 [3] Matsubara T. // Progr. Theor. Phys. — 1955. — V. 14. — P. 351.
 [4] Beth E., Uhlenbeck G. // Physica. — 1937. — V. 4. — P. 915.

Прохождение частиц через плазму

А. И. Ларкин

Метод функций Грина и диаграммная техника применяются для вычисления энергии, теряемой в единицу времени частицей, проходящей через плазму. В предельных случаях получены численные множители, стоящие в аргументе логарифма.

1. Введение

Расчет тормозной способности плазмы по методу парных столкновений приводит к логарифмической расходимости. Эта расходимость связана с дальностью действия кулоновских сил. Экранирующим влиянием среды можно пренебрегать только в том случае, когда расстояние между частицами меньше дебаевского радиуса. Для вычисления вклада от близких столкновений кулоновское поле обрезается на дебаевском радиусе. Ахиезером и Ситенко [1] кинетическое уравнение с самосогласованным полем использовано для расчета далеких столкновений, при которых передаваемый импульс много меньше обратного дебаевского радиуса. Эти методы не позволяют правильно описать взаимодействие частиц, расстояние между которыми порядка дебаевского радиуса, поэтому результаты имеют лишь логарифмическую точность. В настоящей работе тормозная способность выражается через функцию корреляции, являющуюся частным случаем двухчастичной гриновской функции. Для вычисления последней применяется диаграммная техника, удобство которой состоит в том, что она позволяет просуммировать бесконечное число существенных членов. Кроме того, оценивая отброшенные графики, легко выяснить точность полученных результатов.

2. Вероятность перехода

Рассматривается находящаяся в тепловом равновесии система взаимодействующих частиц. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \sum \varepsilon_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}, \quad H_1 = \frac{1}{2} \sum V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'}^+ a_{\mathbf{p}' - \mathbf{q}} a_{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad (1)$$

(пользуемся системой единиц, в которой $m = \hbar = e^2 = 1$), где $a_{\mathbf{p}}^+$, $a_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом \mathbf{p} , $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2$, $V_{\mathbf{q}}$ — компонента

Фурье потенциала взаимодействия. Для частиц, взаимодействующих по закону Кулона: $V_{\mathbf{q}} = 4\pi/\mathbf{q}^2$. Пролетающая через среду частица имеет массу M и скорость v . Гамильтониан взаимодействия частицы со средой имеет вид

$$H_i = \sum V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^+ \alpha_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}}^+ \alpha_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p} - \mathbf{q}}, \quad (2)$$

$\alpha_{\mathbf{p}}^+$, $\alpha_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения пролетающей частицы.

Будем считать пролетающую частицу достаточно быстрой, $v^2/\hbar v \ll 1$, чтобы ее взаимодействие с частицами среды можно было рассматривать по теории возмущений. Вероятность перехода, при котором частица из состояния с импульсом $\mathbf{p}_1 = M\mathbf{v}$ переходит в состояние с импульсом $\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}$, а среда — из состояния n в состояние m , определяется известной формулой

$$\omega_{\mathbf{q}} = 2\pi |\langle m, \mathbf{p}_1 - \mathbf{q} | H_i | n, \mathbf{p}_1 \rangle|^2 \delta(E_m - E_n - \varepsilon_{\mathbf{p}_1} + \varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}}), \quad (3)$$

$$\langle m, \mathbf{p}_1 - \mathbf{q} | H_i | n, \mathbf{p}_1 \rangle = V_{\mathbf{q}} \left(\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p} - \mathbf{q}} \right)_{mn}. \quad (4)$$

Для того чтобы получить полную вероятность перехода частицы из состояния с импульсом \mathbf{p}_1 в состояние с импульсом $\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}$, нужно просуммировать выражение (3) по всем конечным состояниям системы и усреднить по начальным с матрицей плотности

$$\rho = \exp \beta(\Omega + \mu N - H), \quad \beta = 1/kT. \quad (5)$$

Используя (4), получаем

$$W_{\mathbf{q}} = 2\pi V_{\mathbf{q}}^2 \Phi_{\mathbf{q}}(\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}}), \quad (6)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\omega) = \sum_{mn} \left| \left(\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p} - \mathbf{q}} \right)_{mn} \right|^2 e^{\beta(\Omega + \mu N_n - E_n)} \delta(E_m - E_n - \omega). \quad (7)$$

3. Двухчастичная функция Грина

Для нахождения $\Phi_{\mathbf{q}}(\omega)$ выясним ее связь с двухчастичной функцией Грина:

$$K(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = -i \text{Sp} \exp[\beta(\Omega + \mu N - H)] \times \\ \times T\{\psi^+(\mathbf{r}_1, t_1)\psi(\mathbf{r}_1, t_1)\psi^+(\mathbf{r}_2, t_2)\psi(\mathbf{r}_2, t_2)\}, \quad (8)$$

где

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iHt} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{iHt}, \quad \psi^+(\mathbf{r}, t) = e^{-iHt} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{iHt}.$$

Нас будет интересовать только такая двухчастичная функция, у которой координаты и времена операторов ψ и ψ^+ попарно совпадают. Для нее можно получить

дисперсионные соотношения, аналогичные полученным Ландау [2] для одночастичных гриновских функций. Легко убедиться, что K зависит лишь от разностей $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $t = t_1 - t_2$. Сделаем преобразование Фурье по переменной \mathbf{r} :

$$K_{\mathbf{q}}(t) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} K(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} -i \sum_{mn} e^{\beta(\Omega + \mu N_n - E_n)} \left| \left(\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \right)_{mn} \right|^2 e^{i(E_n - E_m)t}, & t > 0, \\ -i \sum_{mn} e^{\beta(\Omega + \mu N_n - E_n)} \left| \left(\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \right)_{mn} \right|^2 e^{i(E_m - E_n)t}, & t < 0. \end{cases}$$

В нижней сумме переменим обозначения индексов суммирования. После этого, используя определение (7) функции $\Phi_{\mathbf{q}}(\omega)$, получим

$$K_{\mathbf{q}}(t) = \begin{cases} -i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi_{\mathbf{q}}(\omega) e^{-i\omega t}, & t > 0, \\ -i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi_{\mathbf{q}}(\omega) e^{-\beta\omega} e^{-i\omega t}, & t < 0. \end{cases}$$

Теперь перейдем к компонентам Фурье по переменной t :

$$K(\mathbf{q}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} K_{\mathbf{q}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Phi_{\mathbf{q}}(\omega') \left\{ (1 - e^{-\beta\omega'}) \mathcal{P} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi (1 + e^{-\beta\omega'}) \delta(\omega' - \omega) \right\}. \quad (9)$$

Символ \mathcal{P} означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Вместо $K(\mathbf{q}, \omega)$ более удобно рассматривать функцию $\tilde{K}(\mathbf{q}, \omega)$, аналитическую в верхней полуплоскости переменной ω :

$$\tilde{K}(\mathbf{q}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Phi_{\mathbf{q}}(\omega') \frac{1 - e^{-\beta\omega'}}{\omega' - \omega - i\delta}. \quad (10)$$

Формулами (9) и (10) можно воспользоваться для вычисления $\Phi_{\mathbf{q}}(\omega)$:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\omega) = \frac{\text{Im } K(\mathbf{q}, \omega)}{\pi[1 + \exp(-\beta\omega)]} = \frac{\text{Im } \tilde{K}(\mathbf{q}, \omega)}{\pi[1 - \exp(-\beta\omega)]}. \quad (11)$$

Для вычисления \tilde{K} воспользуемся приемом, использованным Абрикосовым, Горьковым и Дзялошинским [3] при нахождении одночастичных функций. Для

этого рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{r}_1, \tau_1, \mathbf{r}_2, \tau_2) &= \text{Sp} e^{\beta(\Omega + \mu N - H)} T \{ \bar{\psi}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\psi}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \psi(\mathbf{r}_2, \tau_2) \}, \quad (12) \\ \psi(\mathbf{r}, \tau) &= e^{-(\mu N - H)\tau} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{(\mu N - H)\tau}, \\ \bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau) &= e^{-(\mu N - H)\tau} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{(\mu N - H)\tau}. \end{aligned}$$

\mathcal{K} , как и K , зависит лишь от разностей $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\tau = \tau_1 - \tau_2$; поэтому после преобразований, аналогичных тем, которые были произведены с функцией $K(t)$, получим

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau) = \begin{cases} \int_0^{\infty} d\omega \Phi_{\mathbf{q}}(\omega) e^{-\omega\tau}, & \tau > 0, \\ \int_{-\infty}^0 d\omega \Phi_{\mathbf{q}}(\omega) e^{-\omega(\beta + \tau)}, & \tau < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Ниже будет изложен способ вычисления функции \mathcal{K} в интервале $-\beta < \tau < \beta$. Покажем как, зная \mathcal{K} в этой области, можно найти функцию $\Phi_{\mathbf{q}}(\omega)$. Будем считать, что на интервале $0 < \tau < \beta$ $\mathcal{K}(\tau)$ определяется формулой (13), а дальше продолжена периодически. Тогда коэффициенты ее разложения в ряд Фурье определяются формулой

$$\mathcal{K}_n = \int_0^{\beta} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau) \exp(2\pi i n \tau / \beta) d\tau.$$

Подставляя значение $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau)$ из (13) и выполняя интегрирование по τ , получим

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi_{\mathbf{q}}(\omega) \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{\omega - 2\pi i n / \beta}. \quad (14)$$

Непосредственное сравнение формул (10) и (14) показывает, что

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{q}) = \tilde{K}(\mathbf{q}, 2\pi i n / \beta). \quad (15)$$

Формула (15) дает выражение функции $\tilde{K}(\mathbf{q}, \omega)$ для ряда значений аргумента $\omega = 2\pi i n / \beta$. Кроме того, известно, что функция $\tilde{K}(\mathbf{q}, \omega)$ является аналитической в верхней полуплоскости, поэтому она однозначно определяется своими значениями на указанном бесконечном множестве точек. Зная функцию $\tilde{K}(\mathbf{q}, \omega)$ на действительной оси, можно по формуле (11) найти $\Phi_{\mathbf{q}}(\omega)$.

Для вычисления $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau)$ можно воспользоваться техникой графиков. Введем операторы в представлении взаимодействия

$$a_{\mathbf{p}}(\tau) = a_{\mathbf{p}} e^{-(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, \quad a_{\mathbf{p}}^+(\tau) = a_{\mathbf{p}}^+ e^{(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, \quad H_1(\tau) = e^{H_0\tau} H_1 e^{-H_0\tau}.$$

В формуле (12) обычным способом перейдем от операторов в представлении Гейзенберга к операторам в представлении взаимодействия. В области $0 < \tau_1 < \beta$,

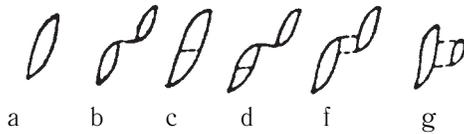
$0 < \tau_2 < \beta$ получим

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau_1 - \tau_2) = \text{Sp} e^{\beta(\Omega + \mu N - H_0)} \times \\ \times T \left\{ \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_1}^+(\tau_1) a_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}}(\tau_1) a_{\mathbf{p}_2}^+(\tau_2) a_{\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}}(\tau_2) \exp \left[- \int_0^\beta H_1(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (16)$$

Множитель $\exp \left[- \int_0^\beta H_1(\tau) d\tau \right]$ можно разложить в ряд по степеням H_1 . Подставив это разложение в формулу (16), получим выражение для $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau)$ в виде ряда по степеням взаимодействия. Каждый член ряда может быть изображен графиком. Каждому пунктиру на графике соответствует множитель $V_{\mathbf{q}}$, каждой сплошной линии соответствует нулевая функция Грина частицы

$$G(\mathbf{p}, \tau) = \begin{cases} (1 \mp n_{\mathbf{p}}) e^{-(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, & \tau > 0, \\ \mp n_{\mathbf{p}} e^{-(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, & \tau < 0, \end{cases} \quad (17) \\ n_{\mathbf{p}} = [e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\beta} \pm 1]^{-1}.$$

Верхний знак относится к частицам Ферми, а нижний — к частицам Бозе. Функция $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau)$ изображается суммой всех связанных графиков, имеющих две внешние вершины. В каждой из этих вершин сходятся две сплошные линии с импульсами, отличающимися на \mathbf{q} . Несколько графиков первого порядка изображены на рисунке.



Способ вычисления вероятности перехода, при котором взаимодействие частицы со средой рассматривается как парные столкновения пролетающей частицы с частицами среды, соответствует тому, что при вычислении функции \mathcal{K} учитывается лишь простейший график *a*. В случае плазмы такой способ дает для тормозной способности выражение, логарифмически расходящееся на малых \mathbf{q} . Для устранения этой расходимости необходимо учесть экранирующее влияние среды, т. е. более сложные графики. Члены, изображаемые графиками *b, d*, содержат множители $V_{\mathbf{q}} = 4\pi/\mathbf{q}^2$ и поэтому при малых \mathbf{q} становятся сравнимыми с членом, изображаемым графиком *a*. Выделим все графики, содержащие $V_{\mathbf{q}}$; для этого обозначим через $\Pi(\mathbf{q}, \tau)$ совокупность компактных частей функции \mathcal{K} , т. е. таких, которые не содержат частей, соединенных лишь одной пунктирной линией. Примерами таких графиков являются графики *a, c, f, g*. Функция $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau)$ связана с $\Pi(\mathbf{q}, \tau)$ интегральным уравнением

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau) = \Pi(\mathbf{q}, \tau) + \int_0^\beta d\tau' \Pi(\mathbf{q}, \tau - \tau') V_{\mathbf{q}} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \tau'). \quad (18)$$

Разлагая в ряд Фурье по τ и решая получившееся алгебраическое уравнение, найдем

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{q}) = \frac{\Pi_n(\mathbf{q})}{1 - V_{\mathbf{q}}\Pi_n(\mathbf{q})}, \quad \text{где} \quad \Pi_n(\mathbf{q}) = \int_0^{\beta} \Pi(\mathbf{q}, \tau) \exp\left(\frac{2\pi i n \tau}{\beta}\right) d\tau.$$

Подставив полученное выражение для $\mathcal{K}_n(\mathbf{q})$ в формулу (15), получим

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \omega) = \Pi(\mathbf{q}, \omega) / [1 - V_{\mathbf{q}}\Pi(\mathbf{q}, \omega)], \quad (19)$$

где $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости переменной ω и совпадающая в точках $\omega = 2\pi i n / \beta$ с $\Pi_n(\mathbf{q})$.

Для вероятности перехода по формулам (6), (11), (19) получим выражение

$$W_{\mathbf{q}} = \frac{2V_{\mathbf{q}}^2}{1 - \exp(-\beta\omega)} \operatorname{Im} \frac{\Pi(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V_{\mathbf{q}}\Pi(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (20)$$

где $\omega = \varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}}$.

При выводе формулы (20) не были использованы свойства среды, однако функция $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ может быть вычислена только в предельных случаях. Для достаточно разреженной плазмы и для низкотемпературного электронного газа большой плотности можно при вычислении ограничиться членом, изображенным на графике *a*. После несложных вычислений с использованием формулы (17) получаем в этих случаях

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} - n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}{(\mathbf{p}\mathbf{q}) - \omega - i\delta}. \quad (21)$$

Для разреженной плазмы наиболее существенные поправки к формуле (21) изображаются графиками типа *f, g*; их отношение к основному члену имеет порядок $\sqrt{\beta^3 e^3 n}$. Таким образом, формула (21) справедлива всегда, когда справедлива дебаевская теория. При низких температурах наибольшая поправка определяется графиком *c*; в этом случае параметром разложения является обычный параметр теории возмущений $e^2 m / \hbar p_0$, p_0 — граничный импульс поверхности Ферми, связанный с плотностью частиц n соотношением:

$$n = p_0^3 / 3\pi^2 \hbar^3. \quad (22)$$

4. Плазменные колебания

Спектр и затухание коллективных возбуждений, представляющих колебания плотности, определяются лежащими в нижней полуплоскости полюсами функции $\tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \omega)$. Из формулы (19) получаем уравнение для спектра

$$1 = V_{\mathbf{q}}\Pi(\mathbf{q}, \omega). \quad (23)$$

Уравнение (23) с учетом (21) совпадает с уравнением, полученным Климонтовичем и Силиным [4] с помощью квантового кинетического уравнения. При малых \mathbf{q}

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = n\mathbf{q}^2 / \omega^2. \quad (24)$$

Подставляя это выражение в (23), получим ленгмюровский спектр

$$\omega = \omega_0, \quad \omega_0^2 = 4\pi n e^2 / m, \quad (25)$$

где плотность электронов

$$n = (2\pi)^{-3} \int n_p d^3 p.$$

Затухание возбуждений определяется мнимой частью ω , для нахождения которой нужно вычислить мнимую часть $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$. Вычисление $\text{Im } \Pi(\mathbf{q}, \omega)$ по формуле (21) приводит к отсутствию затухания при нулевой температуре, а при высоких температурах дает

$$\text{Im } \omega = -\frac{(2\pi\beta)^{3/2} \omega_0^4}{8\pi q^3} \exp\left(-\frac{\beta\omega_0^2}{2q^2}\right), \quad (26)$$

что совпадает с выражением, найденным Ландау [5]. Учитывая в $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ члены более высокого порядка, которые изображаются графиками типа f, g , можно найти затухание, связанное с вязкостью электронного газа. Оно присутствует при нулевой температуре и медленнее падает с уменьшением q при высокой температуре, хотя при $q^2 \sim \beta\omega_0^2$ это затухание много меньше, чем вычисленное по формуле (26).

5. Тормозная способность плазмы

Энергия, теряемая проходящей частицей в единицу времени, определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = (2\pi)^{-3} \int (\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}}) W_{\mathbf{q}} d^3 q.$$

Подставляя в эту формулу значение $W_{\mathbf{q}}$ из (20) и $V_{\mathbf{q}} = 4\pi/q^2$, получим

$$-\frac{dE}{dt} = 8 \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 dx \frac{\omega}{1 - \exp(-\beta\omega)} \text{Im} \frac{\Pi(q, \omega)}{q^2 - 4\pi\Pi(q, \omega)}, \quad (27)$$

где

$$x = \mathbf{v}\mathbf{q}/vq, \quad \omega = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1 - q} = vqx - q^2/2M,$$

v — скорость, а M — масса пролетающей частицы.

Рассмотрим случай, когда частица движется со скоростью, много большей средней тепловой скорости электронов. Интеграл в формуле (27) разобьем на две области $q > q_1$ и $q < q_1$, q_1 выберем так, что $1/\beta \gg q_1^2 \gg \varkappa^2$, где

$$\varkappa^2 = -4\pi\Pi(q, 0) = 4\pi\beta n e^2 \quad (28)$$

(\varkappa — обратный дебаевский радиус). В интеграле по первой области можно пренебречь $4\pi\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ по сравнению с q^2 , так как Π всегда порядка \varkappa^2 . Вычислим $\text{Im } \Pi$ по формуле (21)

$$\text{Im } \Pi = n \frac{(2\pi\beta)^{1/2}}{2q} [1 - e^{-\beta\omega}] \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\left(\frac{\omega}{q} - \frac{q}{2}\right)^2\right\}. \quad (29)$$

Подставляя это выражение в (27), получим

$$-\frac{dE}{dt}\Big|_1 = 4n(2\pi\beta)^{1/2} \int_{q_1}^{\infty} dq \int_{-1}^1 dx \frac{vx - q/2M}{q^2} \times \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\left(vx - \frac{q}{2}\frac{M+1}{M}\right)\right\}. \quad (30)$$

Пренебрегая членами порядка $(v_e/v)^2$ (v_e — средняя тепловая скорость электрона), будем иметь

$$-\frac{dE}{dt}\Big|_1 = \frac{4\pi n}{v} \ln \frac{2Mv}{q_1(M+1)}.$$

В интеграле во второй области, $q < q_1$, можно положить $\omega = vqx$ и перейти от интегрирования по x к интегрированию по ω :

$$-\frac{dE}{dt}\Big|_2 = 8 \int_0^{q_1} \frac{dq}{vq} \operatorname{Im} \int_{-vq}^{vq} \frac{\omega d\omega}{1 - \exp(-\beta\omega)} \frac{\Pi(q, \omega)}{q^2 - 4\pi\Pi(q, \omega)}. \quad (31)$$

При вычислении интеграла по ω воспользуемся тем, что подынтегральная функция лишь множителем отличается от функции $\tilde{K}(q, \omega)$ и поэтому является аналитической в верхней полуплоскости переменной ω . Сместим контур интегрирования в верхнюю полуплоскость так, чтобы он соединял точки $-vq$ и vq не по действительной оси, а по полуокружности с центром в начале координат и радиусом vq . На этом контуре $|\omega| = vq \gg v_e q$ и поэтому, опять пренебрегая членами порядка $(v_e/v)^2$, воспользуемся формулой (24) для $\Pi(q, \omega)$. Интеграл по ω в формуле (31) принимает вид

$$\int \frac{d\omega}{1 - \exp(-\beta\omega)} \frac{n\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Подынтегральное выражение является аналитическим в верхней полуплоскости, поэтому можем сместить контур снова на действительную ось, обходя сверху лежащие на действительной оси полюса $\omega = \pm\omega_0$. Интересующая нас мнимая часть этого интеграла происходит из-за обхода этих полюсов. При $vq < \omega_0$ она равна нулю, так как концы контура лежат между полюсами, а при $vq > \omega_0$ мнимая часть равна $\pi/2$. Подставляя в (31), получим

$$-\frac{dE}{dt}\Big|_2 = 4\pi n \ln(vq_1/\omega_0).$$

Складывая полученное выражение с найденным выше выражением для $(dE/dt)|_1$, получим выражение для полных потерь:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi n e^4}{mv} \ln \frac{2Mm^{3/2}v^2}{\hbar(M+m)\sqrt{4\pi n e^2}}. \quad (32)$$

С логарифмической точностью эта формула была получена Ахиезером и Ситенко [1]. Приведенный в формуле (25) этой работы численный множитель 1,23 под знаком логарифма, однако, неверен.

Отделить в этом выражении для полных потерь часть, связанную с парными столкновениями, и часть, связанную с излучением плазменных волн, можно, по самому смыслу, лишь с логарифмической точностью. Столкновения, у которых передаваемый импульс много больше обратного дебаевского радиуса, можно считать парными и их вклад равен

$$-\frac{dE}{dt} = (4\pi ne^4/mv) \ln(mv/\hbar\kappa).$$

Когда $\text{Im } \Pi$ мало, то вклад в dE/dt дает полюс подынтегрального выражения в формуле (27), лежащий в нижней полуплоскости вблизи вещественной оси. Эти потери связаны с излучением долгоживущих плазменных волн, спектр которых определяется полюсом подынтегрального выражения, т. е. формулой (23). Такие волны можно считать возбуждениями, пока их затухание, определяемое формулой (26), мало по сравнению с их частотой, т. е. когда $q \ll \kappa$. Таким образом, потери, связанные с их испусканием, равны

$$-\frac{dE}{dt} = (4\pi ne^4/mv) \ln(v/v_e).$$

Формула (32) показывает, что полные потери быстрой частицы в плазме не зависят от температуры. Можно убедиться, что формула (32) справедлива для любого распределения электронов по скоростям, если электроны можно считать свободными, а их средняя скорость много меньше скорости пролетающей частицы. В частности, формула (32) справедлива для потерь энергии в электронном газе большой плотности при нулевой температуре. Интересно отметить, что, поскольку в этом случае затухание плазменных волн отсутствует в первом порядке по $e^2/\hbar v_e$, то можно найти потери, связанные с излучением плазменных волн, не с логарифмической точностью, а с точностью до членов порядка $e^2/\hbar v_e$. Эти потери определяются вкладом, который вносит в интеграл (27), лежащий на действительной оси полюс подынтегрального выражения. Этот полюс надо обходить сверху, поэтому

$$-\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{пл}} = 8\pi \int_0^{\infty} dq \frac{\omega dx}{1 - \exp(-\beta\omega)} \Pi(q, \omega) \delta(q^2 - 4\pi\Pi(q, \omega)).$$

В этом интеграле существенный вклад дает область малых $q \sim \sqrt{p_0} \ll p_0$. Поэтому можно считать $\omega = vqx$ и в формуле (21) для $\Pi(q, vqx)$, стоящую в числителе разность, можно заменить производной $n_{\mathbf{p}+q/2} - n_{\mathbf{p}-q/2} = (\partial n_{\mathbf{p}}/\partial p)\mathbf{p}q/p$. В этом случае Π не зависит от q и является функцией x :

$$\Pi = \frac{p_0}{\pi^2} \left(1 - \frac{vx}{p_0} \ln \frac{vx + p_0}{vx - p_0} \right).$$

Интегрировать по x надо в пределах от p_0/v до 1, так как при $x < p_0/v$ мнимая часть Π отлична от нуля. Интегрирование выполняется элементарно и при $v \gg v_e$ получаем

$$-\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{пл}} = \frac{4\pi ne^4}{mv} \left(\ln \frac{mv}{2p_0} + \frac{4}{3} \right). \quad (33)$$

Если замедляющейся частицей является электрон, то численный множитель в аргументе логарифма в формуле (32) должен быть изменен из-за влияния обменного эффекта. Формально этот эффект сказывается в том, что гамильтониан взаимодействия (2) теперь имеет вид

$$H_i = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$$

и в матричном элементе (4) появляется дополнительный член $\sum_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$.

Кроме того, надо считать электрон, имеющий после столкновения большую энергию, за первичный. Как известно, учет обменного эффекта приводит к дополнительному множителю $\sqrt{e/8}$ в аргументе логарифма. Вместо формулы (32) получается для торможения электрона формула

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi n e^4}{m v} \left\{ \ln \frac{m^{3/2} v^2}{4\hbar \sqrt{2\pi n e^2}} + 1 \right\}. \quad (34)$$

Формулу (32) можно получить обычным способом, рассматривая столкновения с большими передачами импульса как парные столкновения частиц, а вклад в тормозную способность от переходов с малыми передачами, выражая через диэлектрическую проницаемость плазмы $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_0/\omega)^2$.

Формулу (27) можно использовать для нахождения потерь энергии, частицами, имеющими не очень большую скорость. Легко найти поправку к формуле (31), имеющую порядок $(v_e/v)^2$. Для этого нужно вычислить интеграл в формуле (30) с точностью до членов порядка $(v_e/v)^2$. В формуле (31) нельзя теперь пользоваться для $\Pi(q, \omega)$ предельным значением (24), а надо подставить

$$\Pi(q, \omega) = (nq^2/\omega^2)(1 + 3q^2/\beta\omega^2). \quad (35)$$

Подынтегральное выражение в формуле (31) с значением $\Pi(q, \omega)$ из формулы (35) имеет полюс в верхней полуплоскости, который нужно учитывать при вычислении интеграла. Окончательная формула для потерь имеет вид

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi n e^4}{m v} \left\{ \ln \frac{2M m v^2}{(M+m)\hbar\omega_0} - \frac{2M+3m}{M m \beta v^2} \right\}. \quad (36)$$

Интересно рассмотреть также другой предельный случай, когда тяжелая частица движется со скоростью много меньшей тепловой скорости электронов, $v \ll v_e$, но большей средней скорости ионов $v \gg v_i$ и достаточно большой, чтобы выполнялся критерий теории возмущений $e^2/\hbar v \ll 1$. Формулу (27) в этом случае удобно представить в виде

$$-\frac{dE}{dt} = 8 \int_0^{\infty} dq \int_{-1}^1 dx \frac{\omega}{1 - \exp(-\beta\omega)} \frac{q^2 \text{Im } \Pi}{|q^2 - 4\pi\Pi|^2}. \quad (37)$$

Для $\text{Im } \Pi$ воспользуемся выражением (29), причем надо учитывать вклад как от электронов, так и от ионов. $\Pi(q, \omega)$, стоящее в знаменателе, можно, пренебрегая

членами порядка $(v/v_e)^2$, заменить на $\Pi(q, 0)$, которое выражается через дебаевский радиус по формуле (28). В этом месте надо учитывать только электронные петли. Учет ионных петель приводит к поправке порядка $(v_i/v)^2$. Формула (37) принимает вид

$$-\frac{dE}{dt} = 4(2\pi\beta)^{1/2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{(q^2 + \varkappa^2)^2} \int_{-1}^1 dx \left(vx - \frac{q}{2M} \right) \times \\ \times \left\{ n_e \left[-\frac{\beta}{2m} \left(vx - \frac{q}{2m} \right)^2 \right] + n_i \exp \left[-\frac{\beta}{2M_i} \left(vx - q \frac{M + M_i}{2MM_i} \right)^2 \right] \right\}. \quad (38)$$

Формула (38) может быть получена, если рассматривать парные столкновения частиц, взаимодействующих по закону $\exp(-\varkappa r)/r$. Такое совпадение произошло, потому что быстрые электроны успевают заэкранировать поле медленной частицы. Среднее поле частицы движется вместе с частицей, не запаздывая, поэтому в этом предельном случае излучение плазменных волн не вносит вклада в потери энергии.

Пренебрегая членами порядка $(v_i/v)^2$, получим для потерь в столкновениях с ионами

$$-\frac{dE}{dt} \Big|_i = \frac{4\pi n_i e^4}{M_i v} \left\{ \ln \frac{MM_i v}{(M + M_i) \hbar \varkappa} - \frac{1}{2} \right\}. \quad (39)$$

Потери, вызванные столкновениями с электронами, вычислим, пренебрегая членами порядка $(v/v_e)^2$ и $(m/M)(v_e/v)^2$:

$$-\frac{dE}{dt} \Big|_e = \frac{2}{3} (2\pi\beta)^{1/2} \beta v^2 n_e e^4 \{ \ln(8m/\beta \hbar^2 \varkappa) - C - 1 \}, \quad (40)$$

где $C = 0,58$ — постоянная Эйлера. В формулы (39), (40) входит обратный дебаевский радиус \varkappa , который определяется по формуле (28) и отличается от соответствующей величины в термодинамических функциях тем, что выражается только через электронную плотность, а не через плотность всех заряженных частиц.

В заключение выражаю благодарность В. М. Галицкому и А. Б. Мигдалу за ценные советы.

Поступила в редакцию
13 февраля 1959 г.

Литература

- [1] Ахиезер А. И., Ситенко А. Г. // ЖЭТФ. — 1952. — Т. 23. — С. 161.
 [2] Ландау Л. Д. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 262.
 [3] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 36. — С. 900.
 [4] Климонтович Ю. Л., Силин В. П. // ЖЭТФ. — 1952. — Т. 23. — С. 151.
 [5] Ландау Л. Д. // ЖЭТФ. — 1946. — Т. 16. — С. 574.