

Иванов Г.Е.

**Слабо выпуклые
множества и
функции: теория
и приложения**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.9
ББК 22.16
И 20



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 06-01-14016(д)

Иванов Г. Е. **Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 352 с. — ISBN 5-9221-0738-0.

Систематически изложена теория слабо выпуклых множеств и функций — новый раздел математики, имеющий богатые приложения. В отличие от традиционного понимания выпуклости как качественного свойства (множество или функция либо обладает свойством, либо нет) в книге излагается качественная теория выпуклости: исследуются параметры, определяющие насколько функция или множество сильно или слабо выпуклы. Слабо выпуклый анализ позволяет установить точную количественную взаимосвязь двух фундаментальных понятий — гладкости и выпуклости.

Рассматриваются приложения в теории аппроксимации и теории многозначных отображений, экстремальных и минимаксных задачах, оптимальном управлении и дифференциальных играх. Показано, что во многих прикладных задачах сильная или слабая выпуклость исходных данных приводит к той или иной регулярности или устойчивости и позволяет построить эффективный алгоритм решения.

Для студентов старших курсов университетов, аспирантов и специалистов в области оптимизации, использующих выпуклый и функциональный анализ.

Ил. 36. Библ. 77 назв.

ISBN 5-9221-0738-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2006

© Г. Е. Иванов, 2006

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Слабо выпуклые множества	17
§ 1.1. Прямое и двойственное определения сильной и слабой выпуклости	17
§ 1.2. Свойства сильно выпуклого отрезка	20
§ 1.3. Элементарные свойства слабо выпуклых множеств	36
§ 1.4. Локальная связность множества, слабо выпуклого по Виалю	40
§ 1.5. Сохранение слабой выпуклости при предельном переходе	46
§ 1.6. Опорный принцип	51
§ 1.7. Метрическая проекция на слабо выпуклое множество	62
§ 1.8. Взаимосвязь слабой выпуклости по Виалю и по Ефимов–Стечкину	68
§ 1.9. Слабая монотонность нормального конуса для слабо выпуклого множества	74
§ 1.10. Слабая выпуклость и гладкость множеств	81
§ 1.11. Геометрические операции над множествами	86
§ 1.12. Исчисление констант сильной и слабой выпуклости для множеств	92
§ 1.13. Перестановочность геометрических операций	104
§ 1.14. Геодезические во множестве, слабо выпуклом по Виалю	109
§ 1.15. Зависимость геодезической от соединяемых точек и множества	136
§ 1.16. Локальная слабая выпуклость множеств	154
§ 1.17. Касательные конусы	168
§ 1.18. Отделимость сильно выпуклого множества от слабо выпуклого	174
§ 1.19. Слабая выпуклость гладкого многообразия	179
§ 1.20. Сильно и слабо выпуклые оболочки множеств	190
§ 1.21. Отношение «выпукло сильнее» для множеств	197
Глава 2. Слабо выпуклые функции	207
§ 2.1. Слабая выпуклость и гладкость функций	208
§ 2.2. Эпи-операции над функциями	212
§ 2.3. Связь геометрических операций над множествами и эпи-операций над функциями	214
§ 2.4. Исчисление параметров выпуклости для функций	216
§ 2.5. Исчисление констант сильной и слабой выпуклости для функций	225
§ 2.6. Отделимость графиков сильно выпуклой и слабо вогнутой функций	228
§ 2.7. Верхняя и нижняя производные второго порядка	234
§ 2.8. Сильно и слабо выпуклые оболочки функций	236
§ 2.9. Отношение «выпукла сильнее» для функций	243
Глава 3. Применение сильно и слабо выпуклого анализа	248
§ 3.1. Аппроксимации непрерывной функции гладкими функциями	248
§ 3.2. Непрерывность многозначных отображений	252
§ 3.3. Паравыпуклость	263
§ 3.4. Непрерывные селекторы многозначных отображений	265

§ 3.5. Параметризация многозначных отображений	272
§ 3.6. Изменение параметров слабой выпуклости при преобразованиях множеств. Слабая выпуклость множества достижимости	289
§ 3.7. Взаимосвязь различных типов выпуклости функций и множеств	294
§ 3.8. Сильно выпуклые штрафные функции	299
§ 3.9. Минимизация сильно выпуклой функции по слабо выпуклому множеству	302
§ 3.10. Минимаксные задачи	305
§ 3.11. Квадратичная сходимость алгоритма вычисления цены диффе- ренциальной игры	314
§ 3.12. Теорема об альтернативе для дифференциальных игр с терми- нальным множеством	325
§ 3.13. Седловая точка в классе программных стратегий	327
§ 3.14. Дифференциальные игры с эллипсоидальными штрафами.	336
Приложение. Связи основных результатов	340
Список литературы	344
Список обозначений	348
Предметный указатель	350

Введение

Выпуклый анализ и теория двойственности, как известно, имеют решающее значение во многих вопросах фундаментальной и прикладной математики. Разнообразие приложений выпуклого анализа привело к изучению различных модификаций понятия выпуклости. Как правило, выпуклость понимается как качественное свойство: множество (или функция) либо обладает этим свойством, либо нет.

В данной книге выпуклость рассматривается количественно. Предметом изучения являются классы сильно и слабо выпуклых множеств и функций, которые характеризуются параметром, определяющим, насколько множество (или функция) сильно или слабо выпукло. Следующие соображения объясняют продуктивность такого подхода.

- 1) Многие результаты выпуклого анализа после надлежащей переформулировки оказываются справедливыми и для слабо выпуклых объектов. Гладкие множества и функции слабо выпуклы, поэтому гладкие объекты можно исследовать методами выпуклого анализа.
- 2) Сильная выпуклость позволяет получить новые качественные результаты, не имеющие места при обычной выпуклости.
- 3) Во многих задачах требуется рассматривать разнородные объекты, некоторые из них слабо выпуклы (например, гладкие), а другие — сильно выпуклы. В таких случаях решающую роль играет соотношение между параметрами сильной и слабой выпуклости объектов.
- 4) Количественная (параметрическая) характеристика выпуклости дает возможность получить не только качественные, но и количественные результаты, например, явные оценки скорости сходимости алгоритмов решения некоторых задач (см., например, теорему 3.11.1).

Сильно выпуклые множества исследовались в работах [4–6, 13–17, 24, 33–38, 61, 71, 72, 77]. Наиболее полное изложение теории сильно выпуклых множеств приведено в книге Е. С. Половинкина и М. В. Балашова [39].

В работе [12] Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в связи с исследованием чебышевских множеств было введено понятие a -выпуклого множества. В нашей работе вместо термина « a -выпуклое множество» используется термин «множество, слабо выпуклое по Ефимову–Стечкину с константой a ». В работе [77] Ж.-Ф. Виаля ввел другое определение слабо выпуклого множества. Такое множество мы называем «слабо выпуклым по Виалю». Отметим, что Ж.-Ф. Виаля рассматривал лишь конечномерный случай. Доказательства основных

результатов Ж.-Ф. Виалю основаны на существовании метрической проекции точки на любое замкнутое множество, что справедливо лишь в конечномерном пространстве. В нашей книге результаты Ж.-Ф. Виалю перенесены на случай гильбертова пространства. Получены новые свойства слабо выпуклых множеств. Например, выяснена взаимосвязь условий слабой выпуклости по Виалю и по Ефимову–Стечкину.

Понятие сильно выпуклой функции введено Б. Т. Поляком в работе [40], а слабо выпуклой функции — Ж.-Ф. Виалем в работе [77]. Сильно и слабо выпуклые функции рассматривались также в работах [3, 9, 18–20, 38, 39].

В нашей книге с полными доказательствами изложена теория слабо выпуклых функций и множеств (слабо выпуклый анализ), а также результаты, в которых сильно и слабо выпуклые объекты рассматриваются совместно. Результаты, относящиеся к сильно выпуклому анализу, используемые в изложении, мы приводим без доказательства, ссылаясь чаще всего на работу [39].

Известно, что функцию можно задать с помощью множества — надграфика этой функции. С другой стороны, множество можно задать с помощью индикаторной функции этого множества. Теории параметрически выпуклых множеств и параметрически выпуклых функций — это две параллельные и взаимопроникающие теории. Эти две теории имеют много общего, но имеют и существенные различия.

Двойственность

Теория двойственности в выпуклом анализе, как известно, является мощным инструментом и имеет богатые приложения. Эта теория основана на возможности описать выпуклое множество двумя принципиально разными способами (условиями). Первое условие — это прямое определение выпуклого множества: отрезок, соединяющий две точки множества, содержится во множестве. Второе (двойственное) условие — представимость множества в виде пересечения семейства полупространств. Для замкнутого множества в локально выпуклом пространстве указанные два условия эквивалентны. Поэтому имеет место двойственность в выпуклом анализе.

Понятия сильно и слабо выпуклых множеств и функций можно определить как прямым, так и двойственным способами.

Прямое определение сильно выпуклого множества получается из определения выпуклого множества заменой отрезка на сильно выпуклый отрезок, а двойственное определение — заменой полупространства на шар. Важным результатом сильно выпуклого анализа является эквивалентность этих двух определений, доказанная Е. С. Половинкиным и М. В. Балашовым (теорема 1.1.2).

Прямое определение слабо выпуклого множества в конечномерном пространстве рассматривалось Ж.-Ф. Виалем, а двойственное определение — Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным. Оказывается, для замкну-

того множества в гильбертовом пространстве из слабой выпуклости по Виялю следует слабая выпуклость по Ефимову–Стечкину (теорема 1.8.1), а обратное неверно. Поэтому в теории слабо выпуклых множеств имеет место неполная двойственность.

Для функций также можно ввести прямые и двойственные определения сильной и слабой выпуклости. Если $C > 0$ и функция $f(x) - \frac{C}{2}\|x\|^2$ выпукла, то функция $f(x)$ называется сильно выпуклой с константой C ; если $C > 0$ и функция $f(x) + \frac{C}{2}\|x\|^2$ выпукла, то функция $f(x)$ называется слабо выпуклой с константой C . В этом состоят прямые определения сильной и слабой выпуклости функций. Двойственные определения сильной и слабой выпуклости функций состоят в том, что надграфики этих функций представимы в виде пересечения семейств множеств, полученных в результате всевозможных сдвигов надграфиков функций $\frac{C}{2}\|x\|^2$ и $-\frac{C}{2}\|x\|^2$ соответственно. Для полунепрерывных снизу функций прямое и двойственное определения сильной (слабой) выпуклости эквивалентны (теорема 2.4.2). Поэтому не только в теории сильно выпуклых функций, но и в теории слабо выпуклых функций имеет место полная двойственность. В этом состоит одно из фундаментальных отличий теории параметрически выпуклых множеств от теории параметрически выпуклых функций.

Слабая выпуклость и гладкость

Следующая теорема устанавливает связь фундаментальных понятий выпуклости и гладкости: *для непрерывной функции, заданной в гильбертовом пространстве, гладкость с константой C эквивалентна тому, что эта функция слабо выпукла и слабо вогнута с той же константой C* (теорема 2.1.2). Здесь гладкость функции с константой C понимается как дифференцируемость этой функции и условие Липшица с константой C , налагаемое на производную функции.

Теорема 2.1.2 подобна классическому результату о том, что непрерывность функции эквивалентна совокупности условий полунепрерывности снизу и полунепрерывности сверху. В этом смысле слабая выпуклость — это «полугладкость».

Для замкнутого телесного множества в гильбертовом пространстве гладкость с константой $L > 0$ эквивалентна слабой выпуклости множества и замыкания его дополнения с константой $1/L$ (теорема 1.10.2). Здесь гладкость множества с константой L понимается как существование единичного вектора внешней нормали в каждой граничной точке множества и условие Липшица с константой L , налагаемое на единичный вектор внешней нормали в зависимости от граничной точки.

Таким образом, условие гладкости множества или функции можно «расщепить» на два условия слабой выпуклости. Такое расщепление оказывается весьма удобным, например, в теории экстремальных задач.

Для замкнутого телесного гладкого множества в гильбертовом пространстве показано, что единичный вектор внешней нормали как функция множества удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно метрики Хаусдорфа (теорема 1.13.3).

Для C^1 -гладкого конечномерного многообразия M , вложенного в гильбертово пространство, показано, что из H^1C^1 -гладкости многообразия M и его края следует слабая выпуклость по Виалю множества M (теорема 1.19.1), а из слабой выпуклости по Виалю множества M следует H^1C^1 -гладкость многообразия M (теорема 1.19.2). H^1C^1 -гладкость многообразия с константой L означает, что касательное к многообразию подпространство удовлетворяет условию Липшица с константой L относительно точки касания.

Метрическая проекция на слабо выпуклое множество

Известно, что для замкнутого множества A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ из выпуклости A следует чебышевость A , т.е. существование и единственность метрической проекции на A любой точки $x \in \mathcal{H}$, причем, если множество A локально компактно, то верно и обратное [8, 12]. В работах [25, 51] рассматривались множества, обладающие чебышевским слоем величины R , т.е. такие множества, что для любой точки $x \in \mathcal{H}$, лежащей в R -окрестности множества A , метрическая проекция на A существует и единственна.

В нашей книге показано, что для замкнутого множества A в гильбертовом пространстве из слабой выпуклости A по Виалю с константой R следует наличие у множества A чебышевского слоя величины R (теорема 1.7.1), причем, если множество A локально компактно, то верно и обратное (теорема 1.7.4). Вопрос о слабой выпуклости не локально-компактного множества, имеющего чебышевский слой в гильбертовом пространстве, до сих пор открыт, подобно тому, как до сих пор открыт вопрос о выпуклости чебышевского множества в гильбертовом пространстве.

Кроме того, показано, что метрическая проекция точки x , лежащей в r -окрестности множества A , замкнутого и слабо выпуклого по Виалю с константой $R > r$, удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{R}{R-r}$ относительно точки x и условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно множества A (теорема 1.7.5).

Исчисление параметров выпуклости

Операция пересечения множеств сохраняет слабую выпуклость по Ефимову–Стечкину, но не по Виалю (лемма 1.3.6 и замечание 1.3.2). Пересечение множества, слабо выпуклого по Виалю с константой R , и множества, сильно выпуклого с константой R , является слабо выпуклым по Виалю с константой R (лемма 1.3.7). Операция максимизации семейства функций сохраняет слабую выпуклость (лемма 2.5.3).

В теории экстремальных задач, оптимальном управлении и других вопросах математики большую роль играют геометрические операции суммы (+) и разности ($\ast$) множеств, введенные Г. Минковским [68]. Свойства этих операций также рассматривал Л. С. Понтрягин [41] в связи с их применением в теории дифференциальных игр.

В теоремах 1.12.1, 1.12.2, 1.12.4, 1.12.6–1.12.8 приведены неулучшаемые оценки параметров выпуклости для множеств, полученных в результате применения геометрических операций. Тем самым построено исчисление параметров сильной и слабой выпуклости множеств.

Геометрические операции суммы и разности множеств, примененные к надграфикам функций, определяют эпи-операции над функциями. Операция эпи-суммы рассматривалась в работах [23, 42], где она называется *инфимальной конволюцией*. Мы используем названия «эпи-сумма» и «эпи-разность», которые подчеркивают тот факт, что надграфики (эпиграфы) эпи-суммы и эпи-разности функций f и g с точностью до замыкания равны соответственно геометрической сумме и геометрической разности надграфиков функций f и g (теорема 2.3.1). В леммах 2.4.3, 2.5.4 и теоремах 2.4.3, 2.5.1 сформулировано исчисление параметров выпуклости функций в связи с эпи-операциями.

Как было сказано, в теории параметрически выпуклых множеств имеет место неполная, а в теории параметрически выпуклых функций — полная двойственность. Отметим еще одно фундаментальное различие этих теорий. Определение сильной (слабой) выпуклости множества дается через шар, а определение сильной (слабой) выпуклости функции дается через функцию $\frac{C}{2}\|x\|^2$. При линейном преобразовании пространства шар превращается в эллипсоид, а функция $\frac{C}{2}\|x\|^2$ — в квадратичную форму. Эпи-операции над функциями квадратичные формы переводят в квадратичные формы, а геометрические операции над множествами из эллипсоидов делают не-эллипсоиды. Поэтому исчисление параметров выпуклости для функций можно построить не только в случае, когда параметрами выпуклости являются числа, но и когда параметрами выпуклости являются линейные самосопряженные операторы (в конечномерном случае их можно отождествить с симметрическими матрицами). В силу указанной причины для множеств удастся построить исчисление лишь числовых параметров сильной и слабой выпуклости.

Известно, что в результате геометрических операций, примененных к гладким множествам, получаются, вообще говоря, негладкие множества. В результате минимизации или максимизации гладких функций получаются, вообще говоря, негладкие функции. Так естественным образом в экстремальных задачах возникают негладкие объекты, необходимость работы с которыми привела к появлению и развитию негладкого анализа. Исчисление параметров выпуклости множеств и функций вместе с теоремами о взаимосвязи выпуклости и гладкости позволяет

в определенной степени решить проблему негладкости методами выпуклого анализа. А именно, сформулированы условия на параметры сильной и слабой выпуклости исходных множеств, обеспечивающие гладкость множеств, полученных применением геометрических операций к исходным множествам (теорема 1.13.2), а также условия на параметры выпуклости исходных функций, обеспечивающие гладкость функций, полученных применением эпи-операций к исходным функциям (теорема 2.5.2).

Перестановочность геометрических и эпи-операций; седловые точки

При исследовании геометрических операций суммы и разности множеств проблемой является то, что эти операции удовлетворяют не всем аксиомам линейного пространства. В частности, данные операции не перестановочны, т.е. равенство $A + B \stackrel{*}{=} C = A \stackrel{*}{=} C + B$ в общем случае не справедливо.

Если в гильбертовом пространстве множество A телесно-гладкое с константой $L > 0$, а множества B и C сильно выпуклы с константой $r < 1/L$, то справедливо равенство $A + B \stackrel{*}{=} C = A \stackrel{*}{=} C + B$ (теорема 1.13.2), т.е. в данном случае геометрические операции суммы и разности перестановочны. В качестве приложения указанного результата получена теорема об альтернативе для дифференциальных игр с терминальным множеством (теорема 3.12.1).

Из теоремы фон Неймана о существовании седловой точки легко получить достаточные условия перестановочности эпи-операций над функциями в терминах условий сильной выпуклости (лемма 3.10.1). Последний результат используется, например, при доказательстве теоремы о существовании седловой точки в классе программных стратегий для дифференциальных игр с сильно выпукло-вогнутым функционалом (теорема 3.13.1).

Отделимость

Одним из важнейших результатов выпуклого анализа является теорема об отделимости гиперплоскостью двух выпуклых замкнутых непересекающихся множеств. В книге доказаны следующие аналоги этой теоремы. Во-первых, два замкнутых непересекающихся множества в гильбертовом пространстве, одно из которых слабо выпукло по Виалу с константой R , а другое сильно выпукло с константой $r < R$, можно разделить сферой (теорема 1.18.2). Во-вторых, две функции на гильбертовом пространстве, одна из которых полунепрерывна снизу и сильно выпукла с константой C_f , а другая слабо вогнута с константой $C_g < C_f$ и меньше первой, можно разделить квадратичной формой (это следует из теоремы 2.6.3).

Геометрические во множестве, слабо выпуклом по Виалю

Доказана теорема о существовании и единственности геодезической (кривой наименьшей длины), лежащей в замкнутом слабо выпуклом подмножестве гильбертова пространства и соединяющей две достаточно близкие точки (теорема 1.14.1). Показано, что критерием слабой выпуклости по Виалю множества в гильбертовом пространстве может служить существование кривой достаточно малой длины, соединяющей любые две достаточно близкие точки этого множества, а также гладкость геодезических (теорема 1.14.2). Для замкнутого слабо выпуклого по Виалю множества достаточно малого диаметра доказана липшицевость зависимости геодезических от соединяемых ими точек (теорема 1.15.1). Отсюда следует, что в гильбертовом пространстве замкнутое слабо выпуклое по Виалю множество достаточно малого диаметра является стягиваемым (теорема 1.15.2). Также исследована зависимость геодезической в слабо выпуклом множестве от этого множества. Показано, что геодезическая удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно метрики Хаусдорфа и показатель $1/2$ в общем случае не может быть улучшен.

Известно [2, лемма 1], что если в локально выпуклом пространстве множество замкнуто, связно и локально выпукло, то оно выпукло. В нашей книге с использованием свойств геодезических слабо выпуклого множества показано, что замкнутое, связное и локально слабое выпуклое по Виалю множество достаточно малого диаметра в гильбертовом пространстве является слабо выпуклым по Виалю.

Отношение «выпукло сильнее»

В работах [10, 47, 54, 58, 65, 73] разработан аксиоматический подход к понятию выпуклости и введено понятие Φ -выпуклости (замечание 1.21.1). Мы рассматриваем отношение «выпукло сильнее», которое является важным частным случаем понятия Φ -выпуклости. В свою очередь рассмотренные в нашей книге понятия сильной выпуклости множеств, слабой выпуклости множеств по Ефимову–Стечкину (но не по Виалю), а также понятия сильной и слабой выпуклости функций являются частными случаями отношения «выпукло сильнее» (теоремы 1.21.2, 2.9.1).

Показано, что отношение «выпукло сильнее» является рефлексивным и транзитивным. Исследован вопрос, при каких условиях операции геометрической суммы и разности множеств сохраняют отношение «выпукло сильнее» (теоремы 1.21.4, 1.21.8). Показано, что в этом вопросе важную роль играет свойство множества быть порождающим, рассмотренное в книге [39].

Взаимосвязь различных типов выпуклости функций и множеств

Ж.-Ф. Виаль [77] показал, что в конечномерном евклидовом пространстве надграфик слабо выпуклой функции является слабо выпук-

лым (в смысле Виалы) множеством. Этот результат верен и в гильбертовом пространстве (теорема 3.7.1).

Рассмотрены верхняя и нижняя производные второго порядка, которые имеют смысл не только для гладких, но и для негладких функций. Показано, что сильную и слабую выпуклость функции можно проверять методом оценки верхней производной второго порядка (теорема 2.7.2). Указанный метод используется для обоснования сильной выпуклости штрафных функций (теорема 3.8.1 и лемма 3.8.4), что важно при рассмотрении дифференциальных игр с эллипсоидальными штрафами (теорема 3.14.1).

Этот же метод применен для доказательства слабой вогнутости функции специального вида (лемма 3.7.4). Отсюда следует слабая вогнутость по времени гамильтониана линейной дифференциальной игры с сильно выпуклым множеством допустимых управлений игрока-преследователя. Это позволяет доказать квадратичную сходимость алгоритма вычисления цены такой игры (теорема 3.11.1).

Выпуклые, сильно и слабо выпуклые оболочки множеств и функций; гладкие аппроксимации непрерывной функции

Наряду с известным понятием выпуклой оболочки рассматриваются понятия сильно и слабо выпуклых оболочек функций и множеств. Показано, что сильно и слабо выпуклые оболочки функции сохраняют сильную и слабую вогнутость этой функции (теоремы 2.8.1–2.8.3). Отсюда следуют достаточные условия гладкости сильно и слабо выпуклых оболочек функций.

Для множеств ситуация оказывается сложнее. Выпуклая и сильно выпуклая оболочки сохраняют слабую выпуклость дополнения к множеству (леммы 1.20.2, 1.20.5), но слабо выпуклая оболочка вообще говоря, не сохраняет слабую выпуклость дополнения к множеству (пример 1.20.1).

В работе [36] был получен аналог теоремы Каратеодори для сильно выпуклой оболочки множества. Аналог теоремы Каратеодори для слабо выпуклой оболочки множества несправедлив (замечание 1.20.7). Теорема 2.8.8 показывает, что для сильно и слабо выпуклых оболочек функции аналоги теоремы Каратеодори справедливы.

Теорема 2.8.3 дает следующий метод построения гладких аппроксимаций функций. Взяв слабо вогнутую оболочку функции f , получим слабо вогнутую функцию. От полученной функции возьмем слабо выпуклую оболочку. В результате получится слабо выпуклая функция, которая в силу теоремы 2.8.3 будет и слабо вогнутой, а значит, гладкой. Подобными методами можно строить гладкие аппроксимации непрерывных функций. Получены оценки погрешностей аппроксимаций и параметров гладкости аппроксимирующих функций (теоремы 3.1.1, 3.1.2). Заметим, что поскольку аналог теоремы 2.8.3 для множеств несправедлив, то рассматриваемые методы аппроксимаций для множеств не применимы.

Непрерывность многозначных отображений

Известно, что многозначное отображение, значения которого суть пересечения значений двух непрерывных отображений, может не быть непрерывным даже в случае, когда значения исходных многозначных отображений — выпуклые компакты. Также известна теорема о непрерывности многозначного отображения, значения которого являются пересечением значений двух непрерывных многозначных отображений, одно из которых имеет выпуклые, а другое — сильно выпуклые значения [7]. Оказывается, последний результат сохраняется, если условие выпуклости значений одного из многозначных отображений заменить условием слабой выпуклости по Виалю с достаточно большой константой. В книге получены достаточные условия непрерывности, гёльдеровости и липшицевости пересечения двух многозначных отображений, значения одного из которых слабо выпуклы, а другого — сильно выпуклы (теорема 3.2.4). Получены достаточные условия непрерывности геометрической разности двух непрерывных многозначных отображений (теорема 3.2.5).

Паравыпуклость; непрерывные селекторы и параметризация многозначных отображений

В работах [44, 45, 67] рассматривались паравыпуклые множества, для этих множеств были доказаны теоремы о непрерывном селекторе и о неподвижной точке. В нашей книге выяснена взаимосвязь понятий слабой выпуклости и паравыпуклости. Если множество в гильбертовом пространстве замкнуто, слабо выпукло по Виалю с константой R и содержится в шаре радиуса $r < R$, то оно паравыпукло (теорема 3.3.2). Отсюда вытекает теорема о неподвижной точке для полунепрерывного сверху многозначного отображения с компактными слабо выпуклыми значениями (теорема 3.3.3), а также теорема о непрерывном селекторе полунепрерывного снизу многозначного отображения со слабо выпуклыми значениями, содержащимися в достаточно малом шаре (теорема 3.4.2).

Получены еще две теоремы о непрерывном селекторе многозначного отображения, предполагающие слабую выпуклость значений, но не требующие ограниченности значений многозначного отображения (теоремы 3.4.4, 3.4.5). Рассмотрены примеры, иллюстрирующие сущность условий теорем 3.4.2–3.4.5.

Задачи параметризации для многозначных отображений с выпуклыми значениями рассматривались в работах [39, 52, 53, 62, 64, 70]. В нашей книге исследованы вопросы параметризации многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями. Для липшицевых многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями построена параметризация, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $1/2$ (теорема 3.5.5). При дополнительном предположении о гладкости

значений многозначного отображения построены параметризации, удовлетворяющие условию Липшица (теоремы 3.5.2, 3.5.4).

Изменение параметров слабой выпуклости при преобразованиях множеств; слабая выпуклость множества достижимости

Показано, что гладкие обратимые отображения сохраняют слабую выпуклость множеств по Виалю, изменяя параметры выпуклости (теорема 3.6.1). В частности, такие отображения переводят выпуклые множества в множества, слабо выпуклые по Виалю. В качестве приложения этого результата доказана слабая выпуклость множеств достижимости для некоторого класса нелинейных управляемых систем (теорема 3.6.2).

Минимизация сильно выпуклой функции по слабо выпуклому множеству; минимаксные задачи

Рассмотрен вопрос существования и единственности точки минимума сильно выпуклой функции на слабо выпуклом множестве (теорема 3.9.1). Доказано, что в указанной задаче точка минимума гёльдерова зависит от функции и множества (теоремы 3.9.2, 3.9.3).

Известна теорема фон Неймана [30] о существовании седловой точки в минимаксной задаче для выпукло-вогнутой функции. В нашей книге получены достаточные условия непрерывной, гёльдеровой и липшицевой зависимостей седловой точки сильно выпукло-вогнутой функции от параметра (теоремы 3.10.2, 3.10.3, 3.10.4).

Применение сильно и слабо выпуклого анализа в теории дифференциальных игр

Теория антагонистических дифференциальных игр [28, 41] рассматривает задачи управления динамической системой двумя игроками, имеющими противоположные цели. В рамках теории дифференциальных игр может быть исследовано оптимальное управление объектом в конфликтных ситуациях, а также в ситуациях, когда на объект воздействует помеха, играющая роль одного из игроков. Задача состоит в нахождении оптимальной стратегии управления объектом, обеспечивающей оптимальный гарантированный результат, то есть наилучший результат (значение функционала качества), который может достичь игрок при самых неблагоприятных действиях соперника.

Большинство современных алгоритмов построения стратегий в дифференциальных играх используют метод стабильного моста Н. Н. Красовского [28] или альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина [41]. Как показали многочисленные работы, эти алгоритмы весьма трудоемки и требуют весьма значительных вычислительных ресурсов. По этой причине указанные алгоритмы в общем случае могут быть реализованы лишь для игр размерности не более четырех-пяти. В нашей

книге с использованием сильно и слабо выпуклого анализа построены и обоснованы алгоритмы решения линейных дифференциальных игр высокой (несколько десятков) размерности.

Показано, что условие сильной выпуклости множества допустимых управлений игрока-преследователя увеличивает скорость сходимости метода стабильного моста с линейной до квадратичной (теорема 3.11.1). При этом скорость сходимости алгоритма определяется значением параметра сильной выпуклости.

Доказана теорема об альтернативе (теорема 3.12.1), которая, в терминах параметров сильной выпуклости множеств допустимых управлений и параметра гладкости терминального множества, определяет условия, при которых существуют оптимальные программные стратегии игроков. Для линейной дифференциальной игры с сильно выпуклыми штрафными функциями и гладкой терминальной функцией доказано существование седловой точки в классе программных стратегий (теорема 3.13.1). Таким образом, выявлен широкий класс дифференциальных игр, в которых каждый игрок может выбрать оптимальную программную стратегию перед началом игры, не располагая информацией о действиях противника. Для дифференциальных игр рассматриваемого класса получен принцип минимакса, аналогичный принципу максимума Л. С. Понтрягина (теорема 3.13.2). Получены достаточные условия непрерывной зависимости оптимальных программных управлений от времени (замечание 3.13.2).

Рассмотрен частный случай линейных дифференциальных игр с сильно выпуклыми штрафными функциями — случай эллипсоидальных штрафов. В дифференциальных играх с эллипсоидальными штрафами учитываются как затраты на управления игроков, так и геометрические ограничения на эти управления. Учет геометрических ограничений на управления выгодно отличает дифференциальные игры рассматриваемого класса от известного класса линейно-квадратичных дифференциальных игр. Для дифференциальных игр с эллипсоидальными штрафами получены явные формулы, выражающие оптимальные программные стратегии управлений игроков через вектор сопряженных переменных (теорема 3.14.1). Таким образом, алгоритм определения оптимальных стратегий управления сводится к вычислению вектора сопряженных переменных, который может быть найден достаточно эффективными методами численного решения некоторого нелинейного уравнения. Поэтому предлагаемый здесь алгоритм решения дифференциальных игр может быть практически применен для дифференциальных игр высокой размерности. Этим данный метод отличается от известных алгоритмов, основанных на численном построении стабильного моста.

Подводя итог сказанному выше, можно сказать, что в различных задачах теории аппроксимаций и теории многозначных отображений, экстремальных и минимаксных задачах, задачах оптимального управ-

ления и дифференциальных играх сильная или слабая выпуклость исходных данных задачи приводит к регулярности задачи (т.е. существованию и единственности решения, непрерывной, гёльдеровой или липшицевой зависимостей решения от параметров). При этом количественный характер условий сильной и слабой выпуклости позволяет получить количественные оценки регулярности задачи (например, константа липшицевой зависимости решения от параметра может явно выражаться через константы сильной и слабой выпуклости данных задачи), что весьма важно в практических приложениях.

Книга состоит из трех глав. В конце книги приведены логические связи основных результатов, список литературы, список использованных обозначений и предметный указатель.

Автор выражает искреннюю признательность коллегам Е. С. Половинкину, М. В. Балашову, И. И. Богданову и Р. Н. Карасеву за полезные обсуждения материала книги.

Проведенные исследования поддержаны грантами РФФИ по проектам 98-01-00645, 01-01-00743, 04-01-00787 и грантом Президента РФ МД-10079.2006.1; издание книги — грантом РФФИ по проекту 06-01-14016.

Глава 1

СЛАБО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1.1. Прямое и двойственное определения сильной и слабой выпуклости

Определение 1.1.1. Множество A в линейном пространстве называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ отрезок

$$[x_0; x_1] = \{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0 : \lambda \in [0; 1]\}$$

содержится во множестве A .

Это определение будем называть «прямым определением» выпуклости.

Определение 1.1.2. Пусть E — топологическое векторное пространство. Через $\langle p, x \rangle$ будем обозначать значение линейного непрерывного функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$ или *скалярное произведение* элементов p и x в случае, если E — евклидово пространство (конечномерное или бесконечномерное).

Из второй теоремы отделимости [1] вытекает следующий факт.

Теорема 1.1.1. *Множество A в локально выпуклом пространстве E выпукло и замкнуто тогда и только тогда, когда существует такое семейство полупространств $S_\alpha = \{x \in E: \langle p_\alpha, x \rangle \leq c_\alpha\}$, что*

$$A = \bigcap_{\alpha \in A_1} S_\alpha.$$

Здесь $p_\alpha \in E^*$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$, индекс α пробегает произвольное множество A_1 .

Если множество A представимо в виде пересечения полупространств, то будем говорить, что множество A удовлетворяет «двойственному определению» выпуклости. Теорема 1.1.1 утверждает, что для замкнутого множества в локально выпуклом пространстве прямое и двойственное определения выпуклости эквивалентны. На этом факте основана теория двойственности выпуклого анализа, имеющая многочисленные приложения.

Далее мы рассмотрим прямые и двойственные определения сильно и слабо выпуклых множеств.

Определение 1.1.3. Пусть заданы число $R \geq 0$ и вектор a в нормированном пространстве E . Через $\mathfrak{B}_R(a)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса R с центром в точке a :

$$\mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq R\}.$$

Через $\mathfrak{B}_R$ обозначим $\mathfrak{B}_R(0)$.

Определение 1.1.4. Множество A в нормированном пространстве E называется *сильно выпуклым* с константой $R > 0$, если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{B}_R(a).$$

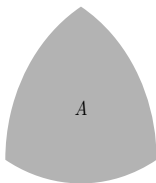


Рис. 1. Пример сильно выпуклого множества

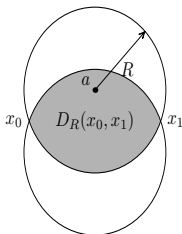


Рис. 2. Сильно выпуклый отрезок

Определение 1.1.5. Пусть в нормированном пространстве E заданы две точки x_0, x_1 , пусть задано число $R \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Множество

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)} \mathfrak{B}_R(a)$$

называется *сильно выпуклым отрезком*.

Замечание 1.1.1. Из определений 1.1.4, 1.1.5 следует, что множество $D_R(x_0, x_1)$ сильно выпукло с константой R . Этим объясняется название «сильно выпуклый отрезок».

Теорема 1.1.2 [39, теорема 4.4.3]. Пусть в гильбертовом пространстве H задано замкнутое множество A и задано число $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) множество A сильно выпукло с константой R ;
- (2) для любых точек $x_0, x_1 \in A$ справедливы неравенство $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$ и включение $D_R(x_0, x_1) \subset A$.

По аналогии с прямым и двойственным определениями выпуклого множества условие (2) теоремы 1.1.2 будем называть «прямым», а определение 1.1.4 — «двойственным» определениями сильной выпуклости. Теорема 1.1.2, устанавливающая эквивалентность прямого и двойственного определений сильной выпуклости, является важным фактом, на котором основаны многие результаты теории сильно выпуклых множеств [39].

Легко видеть, что замкнутое множество A в топологическом векторном пространстве выпукло тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ существует точка $x \in [x_0, x_1] \cap A$, не совпадающая с точками x_0 и x_1 . Заменяя в этом условии отрезок $[x_0, x_1]$ сильно выпуклым отрезком $D_R(x_0, x_1)$, получаем определение слабой выпуклости по Виялю [77].

Определение 1.1.6. Множество A в нормированном пространстве называется *слабо выпуклым по Виялю* с константой $R > 0$, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $0 < \|x_1 - x_0\| < 2R$, существует точка $x \in D_R(x_0, x_1) \cap A$, не совпадающая с точками x_0 и x_1 .

Определение 1.1.7. Пусть в нормированном пространстве заданы две точки x_0, x_1 , пусть задано число $R \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Наряду с сильно выпуклым отрезком $D_R(x_0, x_1)$ определим *сильно выпуклый отрезок без концевых точек*:

$$\overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1) = D_R(x_0, x_1) \setminus \{x_0, x_1\}.$$

Замечание 1.1.2. Множество A в нормированном пространстве слабо выпукло по Виялю с константой R , тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $0 < \|x_1 - x_0\| < 2R$, справедливо соотношение $A \cap \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1) \neq \emptyset$.

Определение 1.1.8. Через $\text{int } A$, $\text{cl } A$, ∂A , A^c будем обозначать соответственно *внутренность*, *замыкание*, *границу* и *дополнение* множества A .

Н.В. Ефимов и С.Б. Стечкин в работе [12] ввели понятие « α -выпуклых» множеств. Эти множества мы будем называть слабо выпуклыми по Ефимову–Стечкину.

Определение 1.1.9. Множество A в нормированном пространстве E называется *слабо выпуклым по Ефимову–Стечкину* с константой $R > 0$, если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} (\text{int } \mathfrak{B}_R(a))^c.$$

Проводя аналогию с прямым и двойственным определениями выпуклости и сильной выпуклости множеств, определение Вияля будем

называть прямым, а определение Ефимова–Стечкина — двойственным определениями слабой выпуклости множеств.

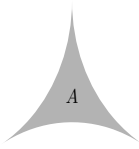


Рис. 3

На рис. 3 изображено множество, слабо выпуклое и по Виалю, и по Ефимову–Стечкину.

Далее мы покажем, что в теории слабо выпуклых множеств имеет место неполная двойственность: в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ из замкнутости и слабой выпуклости по Виалю множества $A \neq \mathcal{H}$ следует слабая выпуклость множества A по Ефимову–Стечкину, а обратное неверно.

§ 1.2. Свойства сильно выпуклого отрезка

Материал данного параграфа носит технический характер. Здесь приведены свойства сильно выпуклого отрезка, которые используются в дальнейшем изложении.

Заметим, что сильно выпуклый отрезок $D_R(x_0, x_1)$ совпадает с сильно выпуклой R -оболочкой двухточечного множества $\{x_0, x_1\}$ (см. определение 1.20.1). Поэтому некоторые свойства сильно выпуклого отрезка непосредственно следуют из свойств сильно выпуклой оболочки. Так, например, леммы 1.2.1 и 1.2.5 непосредственно следуют из пунктов (1) и (3) теоремы 4.4.2 работы [39]. Ради замкнутости изложения приведем доказательства этих лемм, не использующие свойства сильно выпуклой оболочки.

Лемма 1.2.1. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки x_0, x_1, y_0, y_1 . Пусть $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$ и $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда $D_R(y_0, y_1) \subset D_R(x_0, x_1)$.

Доказательство. Пусть $x \in D_R(y_0, y_1)$. Пусть задан вектор $a \in E$ такой, что $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Так как $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$, то $y_0, y_1 \in \mathfrak{B}_R(a)$. Отсюда и из условия $x \in D_R(y_0, y_1)$ следует, что $x \in \mathfrak{B}_R(a)$. Поэтому

$$x \in \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)} \mathfrak{B}_R(a) = D_R(x_0, x_1).$$

□

Лемма 1.2.2. Пусть в евклидовом пространстве E заданы две точки x_0, x_1 . Пусть $R = \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Тогда

$$D_R(x_0, x_1) = \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

Доказательство. Пусть задан вектор $a \in E$ такой, что $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Тогда $\|x_0 - a\| \leq R$, $\|x_1 - a\| \leq R$. Поэтому

$$\begin{aligned} 4R^2 &= \|x_1 - x_0\|^2 = \|x_1 - a\|^2 + \|x_0 - a\|^2 - 2\langle x_1 - a, x_0 - a \rangle = \\ &= 2\|x_1 - a\|^2 + 2\|x_0 - a\|^2 - \|x_0 + x_1 - 2a\|^2 \leq 4R^2 - \|x_0 + x_1 - 2a\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|x_0 + x_1 - 2a\|^2 \leq 0$, т. е. $a = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Поэтому

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a: \{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)} \mathfrak{B}_R(a) = \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right). \quad \square$$

Определение 1.2.1. *Эксцентриситетом* сильно выпуклого отрезка $D_R(x_0, x_1)$ называется число

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}.$$

Замечание 1.2.1. Эксцентриситет сильно выпуклого отрезка удовлетворяет неравенствам $0 \leq \varepsilon \leq 1$. При $\varepsilon = 1$ сильно выпуклый отрезок вырождается в точку. При $\varepsilon = 0$ согласно лемме 1.2.2 сильно выпуклый отрезок является шаром.

Лемма 1.2.3. Пусть в *неодномерном евклидовом пространстве* E задан вектор x и векторы x_0, x_1 такие, что $0 < \|x_1 - x_0\| \leq 2R$. Определим числа

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}, & \mu &= \frac{\langle x - x_0, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2}, \\ \beta &= \sqrt{1 - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{R^2}}, & \lambda &= \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{\beta} \left(\mu - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Для любого числа t определим вектор

$$x_t = (1 - t)x_0 + tx_1.$$

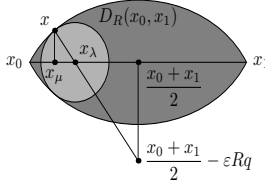


Рис. 4

Следующие условия эквивалентны:

- (1) $x \in D_R(x_0, x_1)$;
- (2) для любого вектора $q \in E$ такого, что $\|q\| = 1$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, справедливо неравенство

$$\left\| x - \frac{x_0 + x_1}{2} + \varepsilon R q \right\| \leq R; \quad (1.2.1)$$

- (3) для любого вектора $q \in E$ такого, что $\|q\| = 1$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, $\langle q, x - x_0 \rangle \geq 0$ и векторы $x - x_0$, $x_1 - x_0$, q компланарны, справедливо неравенство (1.2.1);
- (4) справедливы неравенства $0 \leq \mu \leq 1$ и

$$\|x_\mu - x\| \leq R(\beta - \varepsilon); \quad (1.2.2)$$

- (5) справедливы неравенства $0 \leq \lambda \leq 1$ и

$$\|x_\lambda - x\| \leq R - \sqrt{R^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_0\|^2}; \quad (1.2.3)$$

- (6) существует число $t \in [0; 1]$ такое, что

$$\|x_t - x\| \leq R - \sqrt{R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2}.$$

Доказательство. а). Покажем, что из условия (1) следует условие (2). Пусть выполнено условие (1) и задан вектор $q \in E$ такой, что $\|q\| = 1$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$. Определим вектор

$$a = \frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq.$$

Заметим, что $a - x_0 = \frac{x_1 - x_0}{2} - \varepsilon Rq$. Отсюда и из равенств $\|q\| = 1$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$ следует, что $\|a - x_0\|^2 = \frac{1}{4}\|x_1 - x_0\|^2 + (\varepsilon R)^2 = R^2$, т. е. $\|a - x_0\| = R$. Аналогично, $\|a - x_1\| = R$. Поэтому $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Следовательно, в силу определения 1.1.5 справедливо включение $D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Отсюда и из условия (1) вытекает включение $x \in \mathfrak{B}_R(a)$, т. е. неравенство (1.2.1).

б). Условие (3) тривиально следует из условия (2).

в). Покажем, что из условия (3) следует условие (4). Пусть выполнено условие (3). Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle x - x_\mu, x_1 - x_0 \rangle &= \langle x - x_0 - \mu(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle = \\ &= \langle x - x_0, x_1 - x_0 \rangle - \mu\|x_1 - x_0\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Если $x \neq x_\mu$, то определим вектор $q = \frac{x - x_\mu}{\|x - x_\mu\|}$. В случае $x = x_\mu$ определим вектор $q \in E$ как произвольный единичный вектор такой, что $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$. Из равенства (1.2.4) следует, что в любом случае $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, $\|q\| = 1$ и $x - x_\mu = q\|x - x_\mu\|$. Кроме того, $\langle q, x - x_0 \rangle = \langle q, x - x_\mu \rangle = \|x - x_\mu\| \geq 0$ и векторы $x - x_0$, $x_1 - x_0$, q компланарны. Поэтому согласно условию (3) справедливо неравенство (1.2.1), т. е.

$$\left\| x - x_\mu + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) (x_0 - x_1) + \varepsilon Rq \right\| \leq R.$$

Отсюда и из равенства $x - x_\mu = q\|x - x_\mu\|$ следует, что

$$\left\| q(\|x - x_\mu\| + \varepsilon R) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)(x_0 - x_1) \right\| \leq R.$$

Так как $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, $\|q\| = 1$, то

$$(\|x - x_\mu\| + \varepsilon R)^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 \leq R^2. \quad (1.2.5)$$

Отсюда и из неравенства $\|x - x_\mu\| \geq 0$ следует, что

$$\begin{aligned} R^2 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 = \\ = (\varepsilon R)^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 \leq R^2, \end{aligned}$$

т. е. $\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Поэтому $0 \leq \mu \leq 1$. Из неравенства (1.2.5) вытекает неравенство (1.2.2).

г). Покажем, что из условия (4) следует условие (5). Пусть выполнено условие (4). Из неравенств $0 \leq \mu \leq 1$ следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}} \leq \sqrt{1 - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{R^2}} = \beta.$$

Поэтому $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \left|\mu - \frac{1}{2}\right|$. Отсюда и из неравенств $0 \leq \mu \leq 1$ следуют неравенства $0 \leq \lambda \leq 1$.

Заметим, что

$$\|x_\lambda - x\|^2 = \|x_\mu - x\|^2 + \|x_\lambda - x_\mu\|^2 + 2\langle x_\mu - x, x_\lambda - x_\mu \rangle.$$

Поскольку $x_\lambda - x_\mu = (\lambda - \mu)(x_1 - x_0)$, то

$$\|x_\lambda - x\|^2 = \|x_\mu - x\|^2 + (\lambda - \mu)^2 \|x_1 - x_0\|^2 + 2(\lambda - \mu)\langle x_\mu - x, x_1 - x_0 \rangle.$$

Отсюда и из соотношений (1.2.2), (1.2.4) следует, что

$$\|x_\lambda - x\|^2 \leq R^2(\beta - \varepsilon)^2 + (\lambda - \mu)^2 \|x_1 - x_0\|^2.$$

Из определения числа λ следует, что $\lambda - \mu = \left(\frac{\varepsilon}{\beta} - 1\right)\left(\mu - \frac{1}{2}\right)$.

Поэтому

$$\|x_\lambda - x\|^2 \leq \frac{(\beta - \varepsilon)^2}{\beta^2} \left(R^2\beta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 \right) = \frac{(\beta - \varepsilon)^2}{\beta^2} R^2.$$

Отсюда и из неравенств $\varepsilon \leq \beta$ следует, что

$$\|x_\lambda - x\| \leq R - \frac{\varepsilon}{\beta} R. \quad (1.2.6)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} R^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_0\|^2 &= R^2 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 = \\ &= (\varepsilon R)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} \left(R^2 \beta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 \|x_1 - x_0\|^2 \right) = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} R^2. \end{aligned}$$

Поэтому согласно неравенству (1.2.6) справедливо неравенство (1.2.3).

д). Условие (6) тривиально следует из условия (5).

е). Покажем, что из условия (6) следует условие (1). Пусть выполнено условие (6): существует число $t \in [0; 1]$ такое, что

$$\|x_t - x\| \leq R - \sqrt{R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2}. \quad (1.2.7)$$

Пусть задан вектор $a \in E$ такой, что $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Тогда $\|x_1 - a\| \leq R$ и $\|x_0 - a\| \leq R$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|x_t - a\|^2 &= \|(1 - t)(x_0 - a) + t(x_1 - a)\|^2 = \\ &= (1 - t)^2 \|x_0 - a\|^2 + t^2 \|x_1 - a\|^2 + 2t(1 - t)\langle x_0 - a, x_1 - a \rangle = \\ &= (1 - t)\|x_0 - a\|^2 + t\|x_1 - a\|^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств $\|x_1 - a\| \leq R$, $\|x_0 - a\| \leq R$ получаем неравенство $\|x_t - a\|^2 \leq R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2$, то есть $\|x_t - a\| \leq \sqrt{R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2}$. Поэтому в силу неравенства (1.2.7)

$$\|x - a\| \leq \|x - x_t\| + \|x_t - a\| \leq R,$$

т. е. $x \in \mathfrak{B}_R(a)$. Следовательно,

$$x \in \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)} \mathfrak{B}_R(a) = D_R(x_0, x_1).$$

Поэтому условие (1) выполнено. $\square$

Замечание 1.2.2. Из леммы 1.2.3 вытекают следующие три представления сильно выпуклого отрезка в евклидовом пространстве E :

$$\begin{aligned} (1). \quad D_R(x_0, x_1) &= \bigcap_{q \in E:} \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - q\sqrt{R^2 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4}}\right); \\ \|q\| &= 1, \quad \langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$(2). \quad D_R(x_0, x_1) = \bigcup_{\mu \in [0;1]} \left\{ x \in E : \quad \langle x - x_0, x_1 - x_0 \rangle = \mu \|x_1 - x_0\|^2, \right. \\ \left. \| (1 - \mu)x_0 + \mu x_1 - x \| \leq \sqrt{R^2 - \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 \|x_1 - x_0\|^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{R^2 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4}} \right\};$$

$$(3). \quad D_R(x_0, x_1) = \bigcup_{t \in [0;1]} \left\{ x \in E : \quad \| (1 - t)x_0 + tx_1 - x \| \leq \right. \\ \left. \leq R - \sqrt{R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2} \right\}.$$

Последнее из этих представлений сильно выпуклого отрезка получено в работе [39, теорема 3.3.2].

Лемма 1.2.4. Пусть в евклидовом пространстве заданы векторы x_0, x_1, x такие, что $0 < \|x_1 - x_0\| < 2R$,

$$\left\| x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\| \leq R - \sqrt{R^2 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4}}. \quad (1.2.8)$$

Тогда $x \in \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1)$.

Доказательство. В силу неравенства (1.2.8) для числа $t = \frac{1}{2}$ и вектора $x_t = (1 - t)x_0 + tx_1$ выполнено неравенство

$$\|x_t - x\| \leq R - \sqrt{R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2},$$

т. е. выполнено условие (6) леммы 1.2.3. Поэтому согласно условию (1) леммы 1.2.3 справедливо включение $x \in D_R(x_0, x_1)$. Из неравенств (1.2.8) и $0 < \|x_1 - x_0\| < 2R$ следует также, что $x \neq x_0$ и $x \neq x_1$. $\square$

Лемма 1.2.5. Пусть в евклидовом пространстве заданы две точки x_0, x_1 . Пусть $R \geq r \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Тогда

$$D_R(x_0, x_1) \subset D_r(x_0, x_1).$$

Доказательство. Так как для любого числа $t \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$R - \sqrt{R^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2} \leq r - \sqrt{r^2 - t(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2},$$

то в силу эквивалентности пунктов (1) и (6) леммы 1.2.3 получаем, что для любого $x \in D_R(x_0, x_1)$ справедливо включение $x \in D_r(x_0, x_1)$. $\square$

Лемма 1.2.6. Пусть в евклидовом пространстве заданы две точки x_0, x_1 . Пусть $R \geq r = \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Тогда

$$D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_r\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

Доказательство состоит в применении лемм 1.2.2, 1.2.5. $\square$

Лемма 1.2.7. Пусть в евклидовом пространстве заданы точки x_0, x_1, y_0, y_1 . Пусть $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$, $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда

$$\|y_1 - y_0\| \leq \|x_1 - x_0\|.$$

Доказательство. Обозначим $r = \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$ и применим лемму 1.2.6. $\square$

Лемма 1.2.8. Пусть в евклидовом пространстве заданы точки x, x_0, x_1 . Пусть $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$, $x \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда

$$\|x - x_0\|^2 + \|x - x_1\|^2 \leq \|x_1 - x_0\|^2.$$

Доказательство. Так как $x \in D_R(x_0, x_1)$, то в силу леммы 1.2.6 справедливо неравенство $\left\|x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 + \|x - x_1\|^2 &= \\ &= \left\|x - \frac{x_1 + x_0}{2} + \frac{x_1 - x_0}{2}\right\|^2 + \left\|x - \frac{x_1 + x_0}{2} - \frac{x_1 - x_0}{2}\right\|^2 = \\ &= 2\left\|x - \frac{x_1 + x_0}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x_1 - x_0}{2}\right\|^2 \leq \|x_1 - x_0\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Определение 1.2.2. Пусть в топологическом векторном пространстве E задано множество A . Через $s(p; A)$ будем обозначать значение опорной функции множества A на векторе $p \in E^*$:

$$s(p; A) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle.$$

Лемма 1.2.9. Пусть в евклидовом пространстве E задано множество A , сильно выпуклое с константой R . Пусть заданы векторы $p \in E$, $x \in A$, $y \in A$ такие, что $\|p\| = 1$, $s(p; A) = \langle p, x \rangle = \langle p, y \rangle$. Тогда $x = y$.

Доказательство. Предположим противное: $x \neq y$. Из включений $x, y \in A$ и определений 1.1.4, 1.1.5 следует, что $\|x - y\| \leq 2R$ и $D_R(x, y) \subset A$.

Определим вектор $z = \frac{x+y}{2} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{\|x-y\|^2}{4}}\right)p$. В силу леммы 1.2.4 справедливо включение $z \in D_R(x, y)$. Следовательно, $z \in A$. Поэтому

$$s(p; A) \geq \langle p, z \rangle = \frac{1}{2} \langle p, x+y \rangle + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{\|x-y\|^2}{4}}\right) \langle p, p \rangle > \frac{1}{2} \langle p, x+y \rangle,$$

что противоречит условию $s(p; A) = \langle p, x \rangle = \langle p, y \rangle$. $\square$

Лемма 1.2.10. Пусть в евклидовом пространстве E заданы векторы x_0, x_1, x, p такие, что $0 < \|x_1 - x_0\| \leq 2R$, $\|p\| = 1$, $|\langle p, x_1 - x_0 \rangle| < \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}$. Определим числа

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle^2}{\|x_1 - x_0\|^2}}$$

и вектор

$$q = \frac{1}{\gamma} \left(p - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2} (x_1 - x_0) \right).$$

Тогда среди всех векторов $x \in E$ вектор

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq + Rp \quad (1.2.9)$$

и только он удовлетворяет условиям

$$x \in D_R(x_0, x_1) \quad \text{и} \quad s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x \rangle. \quad (1.2.10)$$

Доказательство. а). Заметим, что

$$\|q\| = 1, \quad \langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0. \quad (1.2.11)$$

Пусть вектор x определен равенством (1.2.9). Тогда

$$\langle q, x - x_0 \rangle = \langle q, -\varepsilon Rq + Rp \rangle = -\varepsilon R + \frac{R}{\gamma} \left(1 - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle^2}{\|x_1 - x_0\|^2} \right) = R(\gamma - \varepsilon).$$

Из неравенства $|\langle p, x_1 - x_0 \rangle| < \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}$ следует, что $\gamma > \varepsilon$. Поэтому $\langle q, x - x_0 \rangle > 0$.

Кроме того, векторы $x - x_0$, $x_1 - x_0$, q компланарны.

Поскольку $\left\| x - \frac{x_0 + x_1}{2} + \varepsilon Rq \right\| = R$, то неравенство (1.2.1) выполнено.

Так как $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, $\langle q, x - x_0 \rangle > 0$, то векторы $x - x_0$ и $x_1 - x_0$ не коллинеарны. Отсюда следует единственность вектора $q \in E$ такого, что выполнены равенства (1.2.11), неравенство $\langle q, x - x_0 \rangle > 0$ и условие коллинеарности векторов $x - x_0$, $x_1 - x_0$, q . Поэтому выполнено условие (3) леммы 1.2.3. Следовательно,

$$x \in D_R(x_0, x_1). \quad (1.2.12)$$

Обозначим $a = \frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq$. Так как $a - x_0 = \frac{x_1 - x_0}{2} - \varepsilon Rq$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, то $\|a - x_0\|^2 = \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4} + (\varepsilon R)^2 = R^2$. Поэтому $\|a - x_0\| = R$. Аналогично, $\|a - x_1\| = R$. Следовательно, $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Отсюда по определению сильно выпуклого отрезка получаем включение $D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Поэтому

$$s(p; D_R(x_0, x_1)) \leq s(p; \mathfrak{B}_R(a)) = \langle p, a \rangle + R = \langle p, x \rangle.$$

Из включения (1.2.12) следует обратное неравенство: $\langle p, x \rangle \leq s(p; D_R(x_0, x_1))$. Тем самым доказано, что для вектора x , определенного равенством (1.2.9), выполняются условия (1.2.10).

б). Предположим, что векторы x и x' удовлетворяет условиям (1.2.10):

$$x, x' \in D_R(x_0, x_1), \quad s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x \rangle = \langle p, x' \rangle.$$

Тогда из сильной выпуклости множества $D_R(x_0, x_1)$ в силу леммы 1.2.9 следует равенство $x = x'$. $\square$

Лемма 1.2.11. Пусть в евклидовом пространстве E заданы векторы x_0, x_1, p такие, что $0 < \|x_1 - x_0\| \leq 2R$, $\|p\| = 1$. Определим числа

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle^2}{\|x_1 - x_0\|^2}}.$$

Тогда справедливо равенство

$$s(p; D_R(x_0, x_1)) = \begin{cases} \left\langle p, \frac{x_0 + x_1}{2} \right\rangle + R(1 - \varepsilon\gamma), & \text{если } |\langle p, x_1 - x_0 \rangle| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}; \\ \langle p, x_1 \rangle, & \text{если } \langle p, x_1 - x_0 \rangle \geq \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}; \\ \langle p, x_0 \rangle, & \text{если } \langle p, x_0 - x_1 \rangle \geq \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}. \end{cases}$$

Доказательство. В случае $\varepsilon = 0$ согласно лемме 1.2.2 справедливо равенство $D_R(x_0, x_1) = \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$ и, следовательно, утверждение леммы выполнено. Поэтому будем предполагать, что $\varepsilon > 0$.

Если $\gamma = 0$, то через q обозначим произвольный единичный вектор, ортогональный вектору $x_1 - x_0$. Если $\gamma \neq 0$, то определим

$$q = \frac{1}{\gamma} \left(p - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2} (x_1 - x_0) \right).$$

1). Рассмотрим случай

$$|\langle p, x_1 - x_0 \rangle| < \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}. \quad (1.2.13)$$

Тогда согласно лемме 1.2.10 справедливо равенство $s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x \rangle$, где $x = \frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq + Rp$. Поэтому при выполнении неравенства (1.2.13) доказываемое равенство справедливо.

2). Рассмотрим случай

$$\langle p, x_1 - x_0 \rangle = \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}. \quad (1.2.14)$$

Из доказанного в предыдущем пункте в силу непрерывности опорной функции получаем, что справедливо равенство

$$s(p; D_R(x_0, x_1)) = \left\langle p, \frac{x_0 + x_1}{2} \right\rangle + R(1 - \varepsilon\gamma).$$

Из равенства (1.2.14) следует, что $\varepsilon = \gamma$ и $1 - \varepsilon\gamma = \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2} = \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle}{2R}$. Поэтому $s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x_1 \rangle$, что и доказывает требуемое равенство.

3). Рассмотрим случай

$$\langle p, x_1 - x_0 \rangle > \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}.$$

Определим векторы

$$p_{\pm} = \frac{x_1 - x_0}{2R} \pm \varepsilon q$$

и числа

$$\alpha_{\pm} = R \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2} \pm \frac{\gamma}{2\varepsilon}.$$

Заметим, что

$$p = \alpha_+ p_+ + \alpha_- p_-, \quad \|p_+\| = \|p_-\| = 1, \quad \alpha_{\pm} \geq 0.$$

Отсюда, а также из выпуклости и положительной однородности опорной функции следует неравенство

$$s(p; D_R(x_0, x_1)) \leq \alpha_+ s(p_+; D_R(x_0, x_1)) + \alpha_- s(p_-; D_R(x_0, x_1)). \quad (1.2.15)$$

Поскольку $\langle p_{\pm}, x_1 - x_0 \rangle = \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}$, то в силу утверждения, доказанного в пункте (2), справедливы равенства $s(p_{\pm}; D_R(x_0, x_1)) = \langle p_{\pm}, x_1 \rangle$. Отсюда и из неравенства (1.2.15) следует, что

$$s(p; D_R(x_0, x_1)) \leq \alpha_+ \langle p_+, x_1 \rangle + \alpha_- \langle p_-, x_1 \rangle = \langle p, x_1 \rangle.$$

Следовательно, в силу включения $x_1 \in D_R(x_0, x_1)$ справедливо равенство $s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x_1 \rangle$.

4). Аналогично доказывается, что в случае $\langle p, x_0 - x_1 \rangle \geq \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}$ справедливо доказываемое равенство. $\square$

Лемма 1.2.12. Пусть заданы число $R > 0$ и векторы x_0, x_1, x, w евклидова пространства такие, что $\|x_0 - w\| \leq R$, $\|x_1 - w\| \leq R$, $x \in \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1)$, $\|x - w\| = R$. Тогда $\|x_0 - w\| = \|x_1 - w\| = R$.

Доказательство. Обозначим $p = \frac{x - w}{R}$. Тогда $\|p\| = 1$.

Так как $x \in D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_R(w)$, то

$$\langle p, x \rangle \leq s(p; D_R(x_0, x_1)) \leq s(p; \mathfrak{B}_R(w)) = \langle p, w \rangle + R = \langle p, x \rangle.$$

Поэтому

$$s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x \rangle. \quad (1.2.16)$$

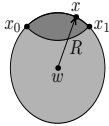


Рис. 5

Так как $x \neq x_0$ и $x \neq x_1$, то в силу леммы 1.2.9 имеют место неравенства $s(p; D_R(x_0, x_1)) \neq \langle p, x_0 \rangle$ и $s(p; D_R(x_0, x_1)) \neq \langle p, x_1 \rangle$. Следовательно, согласно лемме 1.2.11 справедливо неравенство

$$|\langle p, x_1 - x_0 \rangle| < \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}.$$

Отсюда, из равенства (1.2.16) и включения $x \in D_R(x_0, x_1)$ в силу леммы 1.2.10 получаем равенство

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq + Rp, \quad (1.2.17)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle^2}{\|x_1 - x_0\|^2}},$$

$$q = \frac{1}{\gamma} \left(p - \frac{\langle p, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2} (x_1 - x_0) \right).$$

Из равенств $p = \frac{x - w}{R}$ и (1.2.17) следует, что $w = \frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq$.

Отсюда и из равенств $\|q\| = 1$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$ следует, что $\|w - x_0\|^2 = \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4} + (\varepsilon R)^2 = R^2$, т. е. $\|x_0 - w\| = R$. Аналогично, $\|x_1 - w\| = R$. $\square$

Лемма 1.2.13. Пусть в евклидовом пространстве заданы векторы x_0, x_1, x такие, что $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$, $x \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда

$$\langle x - x_0, x_1 - x_0 \rangle \geq \varepsilon \|x - x_0\| \|x_1 - x_0\|, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}.$$

Доказательство. Если $x_1 = x_0$ или $x = x_0$, то доказываемое неравенство тривиально выполнено. Поэтому будем предполагать, что $x_1 \neq x_0$ и $x \neq x_0$. Определим векторы

$$y = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}, \quad q = z - \varepsilon y.$$

Заметим, что

$$\langle q, z \rangle = 1 - \varepsilon \langle y, z \rangle \geq 1 - \varepsilon > 0. \quad (1.2.18)$$

Так как $(\langle q, z \rangle - \|q\|^2)^2 \geq 0$, то $\langle q, z \rangle \geq 2\|q\|^2 \langle q, z \rangle - \|q\|^4$. Из неравенства (1.2.18) следует, что $q \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\langle q, z \rangle^2}{\|q\|^2} \geq 2\langle q, z \rangle - \|q\|^2 = 1 - \varepsilon^2 = \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}.$$

Отсюда и из неравенства (1.2.18) следует, что

$$\frac{\langle q, z \rangle}{\|q\|} \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}.$$

Определим единичный вектор $p = -\frac{q}{\|q\|}$. Тогда

$$\langle p, x_0 - x_1 \rangle \geq \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2R}.$$

Отсюда и из леммы 1.2.11 следует равенство $s(p; D_R(x_0, x_1)) = \langle p, x_0 \rangle$. Так как $x \in D_R(x_0, x_1)$, то $\langle p, x \rangle \leq s(p; D_R(x_0, x_1))$. Поэтому $\langle p, x - x_0 \rangle \leq 0$. Следовательно, $\langle p, y \rangle \leq 0$, т.е. $\langle y, q \rangle \geq 0$, а значит, $\langle y, z \rangle \geq \varepsilon$. $\square$

Лемма 1.2.14. Пусть в евклидовом пространстве E заданы векторы x_0, x_1 такие, что $0 < \|x_1 - x_0\| \leq 2R$, и последовательность векторов $\{v_k\}$, сходящаяся к вектору v , удовлетворяющему неравенству

$$\langle v, x_1 - x_0 \rangle > \varepsilon \|v\| \|x_1 - x_0\|, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}. \quad (1.2.19)$$

Пусть $\{t_k\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда существует номер k такой, что

$$x_0 + t_k v_k \in \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1).$$

Доказательство. Для любого номера k определим

$$\mu_k = t_k \frac{\langle v_k, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2}, \quad u_k = v_k - \frac{\langle v_k, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2} (x_1 - x_0).$$

Поскольку $0 < t_k \rightarrow 0$, $v_k \rightarrow v \neq 0$, $\mu_k \rightarrow 0$, $\frac{\mu_k}{t_k} \rightarrow \frac{\langle v, x_1 - x_0 \rangle}{\|x_1 - x_0\|^2} > 0$ при

$k \rightarrow \infty$, то существует номер k_0 такой, что $\mu_k \in (0; 1)$ и $0 < \|t_k v_k\| < \|x_1 - x_0\|$ для любого $k \geq k_0$. При $k \geq k_0$ определим

$$\beta_k = \sqrt{1 - \left(\mu_k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{R^2}}, \quad \varphi_k = \|u_k\| - \frac{R(\beta_k - \varepsilon)}{t_k}.$$

Заметим, что при $k \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\beta_k = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2} + \frac{\mu_k \|x_1 - x_0\|^2}{R^2} + o(\mu_k)} = \varepsilon + \frac{t_k \langle v, x_1 - x_0 \rangle}{2R^2 \varepsilon} + o(t_k),$$

$$\|u_k\| \rightarrow \sqrt{\|v\|^2 - \frac{\langle v, x_1 - x_0 \rangle^2}{\|x_1 - x_0\|^2}}$$

и, следовательно, $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$, где

$$\varphi_0 = \sqrt{\|v\|^2 - \frac{\langle v, x_1 - x_0 \rangle^2}{\|x_1 - x_0\|^2}} - \frac{\langle v, x_1 - x_0 \rangle}{2R\varepsilon}.$$

Из неравенства (1.2.19) следует, что $\varphi_0 < 0$. Поэтому существует номер $k \geq k_0$ такой, что $\varphi_k < 0$.

Покажем, что $x_0 + t_k v_k \in \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1)$. Обозначим

$$x = x_0 + t_k v_k, \quad \mu = \mu_k, \quad \beta = \beta_k, \quad x_\mu = (1 - \mu)x_0 + \mu x_1.$$

Заметим, что $x - x_\mu = t_k u_k$. Поэтому $\|x_\mu - x\| - R(\beta - \varepsilon) = t_k \varphi_k < 0$. Отсюда в силу леммы 1.2.3 получаем включение $x \in D_R(x_0, x_1)$. Так как $0 < \|t_k v_k\| < \|x_1 - x_0\|$, то $x \neq x_0$, $x \neq x_1$ и, следовательно, $x_0 + t_k v_k = x \in \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1)$. $\square$

Лемма 1.2.15. Пусть в евклидовом пространстве заданы векторы x_0, x_1, x такие, что $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$, $x \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда

$$\langle x - x_0, x - x_1 \rangle \leq -\varepsilon \|x - x_0\| \|x - x_1\|,$$

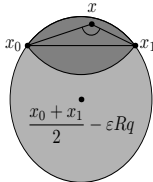


Рис. 6

$$\text{где } \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{4R^2}}.$$

Доказательство. Если векторы $x - x_0$, $x - x_1$ коллинеарны, то в силу условия $x \in D_R(x_0, x_1)$ вектор x лежит на отрезке $[x_0; x_1]$ и утверждение леммы выполнено. Будем предполагать, что векторы $x - x_0$, $x - x_1$ не коллинеарны. Определим вектор q из условий: $\|q\| = 1$, $\langle q, x_1 - x_0 \rangle = 0$, $\langle q, x - x_0 \rangle \geq 0$ и век-

торы $x - x_0$, $x_1 - x_0$, q компланарны. Тогда из условия $x \in D_R(x_0, x_1)$ в силу леммы 1.2.3 следует неравенство $\left\|x - \frac{x_0 + x_1}{2} + \varepsilon Rq\right\| \leq R$. Поэтому точка x содержится в круге радиуса R с центром в точке $\frac{x_0 + x_1}{2} - \varepsilon Rq$, лежащем в плоскости векторов x, x_0, x_1 . Точки x_0 и x_1 лежат на границе этого круга. Неравенство $\langle q, x - x_0 \rangle \geq 0$ выделяет сегмент данного круга. Следовательно, величина угла $\angle x_0 x x_1$ больше либо равна величине угла, вписанного в окружность, являющуюся границей рассматриваемого круга, причем вписанный угол опирается на большую дугу с концами в точках x_0, x_1 . Поскольку величина указанного вписанного угла равна $\pi - \arcsin \frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}$, то $\angle x_0 x x_1 \geq \pi - \arcsin \frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}$. Следовательно, $\cos \angle x_0 x x_1 \leq -\cos \arcsin \frac{\|x_1 - x_0\|}{2R} = -\varepsilon$. $\square$

Лемма 1.2.16. Пусть в неограниченном евклидовом пространстве E заданы векторы x, y, w такие, что $0 < \|y - x\| \leq 2R$, $0 < \|w - x\| \leq 2R$, $\langle w - y, y - x \rangle \geq 0$, $y \notin D_R(x, w)$. Тогда существует вектор $d \in E$ такой, что $\|x - d\| = \|y - d\| = R$, $\|w - d\| < R$.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha = \arcsin \frac{\|y - x\|}{2R}, \quad \beta = \arcsin \frac{\|w - x\|}{2R}. \quad (1.2.20)$$

Определим вектор p из условий: $\|p\| = 1$; $\langle p, y - x \rangle = 0$; $\langle p, w - x \rangle \geq 0$; векторы $p, y - x, w - x$ компланарны.

Обозначим $d = \frac{x + y}{2} + Rp \cos \alpha$. Тогда $\|x - d\| = \|y - d\| = R$. Осталось доказать неравенство

$$\|w - d\| < R. \quad (1.2.21)$$

Из компланарности векторов $p, y - x, w - x$ и неколлинеарности векторов $p, y - x$ следует существование чисел u, v таких, что

$$w - x = u(y - x) + 2vRp. \quad (1.2.22)$$

Отсюда и из равенств (1.2.20) следует, что

$$\sin^2 \beta = u^2 \sin^2 \alpha + v^2. \quad (1.2.23)$$

Из неравенства $\langle w - y, y - x \rangle \geq 0$ и равенства (1.2.22) вытекает неравенство $u \geq 1$. В силу неравенства $\langle p, w - x \rangle \geq 0$ справедливо неравенство $v \geq 0$. Определим вектор

$$q = \frac{v(y - x) - 2uRp \sin^2 \alpha}{2R \sin \alpha \sin \beta}.$$

Тогда $\langle q, w - x \rangle = 0$, $\langle q, y - x \rangle = \frac{2Rv \sin \alpha}{\sin \beta} \geq 0$, $\|q\| = 1$ и векторы $y - x$, $w - x$, q компланарны. Отсюда и из условия $y \notin D_R(x, w)$ в силу леммы 1.2.3 следует неравенство

$$\left\| y - \frac{x + w}{2} + Rq \cos \beta \right\| > R. \quad (1.2.24)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| y - \frac{x + w}{2} + Rq \cos \beta \right\|^2 &= \left\| y - x + \frac{x - w}{2} + Rq \cos \beta \right\|^2 = \\ &= 4R^2 \sin^2 \alpha + R^2 - \langle w - x, y - x \rangle + 2R \cos \beta \langle q, y - x \rangle = \\ &= R^2 + 4R^2 \left(\sin^2 \alpha - u \sin^2 \alpha + \frac{v \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \right). \end{aligned}$$

Поэтому в силу неравенства (1.2.24) имеем

$$(u - 1) \sin \beta \sin \alpha < v \cos \beta.$$

Отсюда, из неравенства $u \geq 1$ и равенства (1.2.23) следует, что

$$(u - 1)^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha < v^2 \cos^2 \beta = \cos^2 \beta (\sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha).$$

Следовательно,

$$\sin^2 \beta (\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha) - 2u \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + u^2 \sin^2 \alpha < 0,$$

т. е.

$$(\sin^2 \beta - u \sin^2 \alpha)^2 < \cos^2 \alpha (\sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha).$$

Отсюда и из равенства (1.2.23) следует неравенство

$$(\sin^2 \beta - u \sin^2 \alpha)^2 < v^2 \cos^2 \alpha,$$

т. е.

$$\sin^2 \beta - u \sin^2 \alpha < v \cos \alpha. \quad (1.2.25)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|d - w\|^2 &= \left\| \frac{y - x}{2} + Rp \cos \alpha + x - w \right\|^2 = \\ &= R^2 + 4R^2 \sin^2 \beta - \langle w - x, y - x \rangle - 2R \cos \alpha \langle p, w - x \rangle = \\ &= R^2 + 4R^2 (\sin^2 \beta - u \sin^2 \alpha - v \cos \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (1.2.25) следует, что $\|d - w\|^2 < R^2$, т. е. неравенство (1.2.21) выполнено. $\square$

Лемма 1.2.17. Пусть в евклидовом пространстве E заданы векторы x, y, z, w такие, что $\|y - x\| + \|z - w\| < 2R$, $z \in D_R(x, y)$, $y \in D_R(z, w)$. Тогда $y \in D_R(x, w)$.

Доказательство. Будем предполагать, что все точки x, y, z, w различны и не лежат на одной прямой. В противном случае утверждение леммы тривиально выполнено.

Определим числа

$$\beta = \arcsin \frac{\|z - w\|}{2R}, \quad \gamma = \arcsin \frac{\|y - x\|}{2R}$$

и единичные векторы

$$a = \frac{z - y}{\|z - y\|}, \quad b = \frac{x - y}{\|x - y\|}, \quad c = \frac{y - w}{\|y - w\|}.$$

Из включения $z \in D_R(x, y)$ в силу леммы 1.2.13 следует неравенство

$$\langle a, b \rangle \geq \cos \gamma.$$

Из включения $y \in D_R(z, w)$ в силу леммы 1.2.15 следует неравенство

$$\langle a, -c \rangle \leq -\cos \beta.$$

Отсюда в силу неравенства треугольника для трехгранного угла имеем

$$\langle b, c \rangle \geq \cos(\beta + \gamma).$$

Из неравенства $\|y - x\| + \|z - w\| < 2R$ следует, что $\sin \beta + \sin \gamma < 1$. Поэтому

$$\sin \beta < 1 - \sin \gamma \leq \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \cos \gamma = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right).$$

Следовательно, $\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$, а значит, $\cos(\beta + \gamma) \geq 0$. Поэтому $\langle b, c \rangle \geq 0$, т. е.

$$\langle w - y, y - x \rangle \geq 0. \quad (1.2.26)$$

Так как $y \in D_R(z, w)$, то в силу леммы 1.2.7 справедливо неравенство $\|w - y\| \leq \|z - w\|$. Следовательно,

$$\|w - x\| \leq \|y - x\| + \|w - y\| \leq \|y - x\| + \|z - w\| < 2R. \quad (1.2.27)$$

Предположим, что доказываемое утверждение не выполнено, т. е. $y \notin D_R(x, w)$. Тогда в силу неравенств (1.2.26), (1.2.27) из леммы 1.2.16 следует существование вектора $d \in E$ такого, что

$$\|x - d\| = \|y - d\| = R, \quad \|w - d\| < R.$$

По определению сильно выпуклого отрезка из условий $\|x - d\| = \|y - d\| = R$, $z \in D_R(x, y)$ следует, что $\|z - d\| \leq R$.

Из условий $\|z - d\| \leq R$, $\|w - d\| \leq R$, $y \neq z$, $y \neq w$, $y \in D_R(z, w)$, $\|y - d\| = R$ в силу леммы 1.2.12 следует равенство $\|w - d\| = R$, которое противоречит неравенству $\|w - d\| < R$. $\square$