С. Н. Лехин

СХЕМОТЕХНИКА ЭВМ

- Арифметические и логические основы цифровой техники
- Схемотехника цифровых логических элементов
- Комбинационные и последовательностные схемы
- Полупроводниковые запоминающие устройства
- Программируемая логика
- Цифроаналоговые и аналого-цифровые преобразователи

bhv

С. Н. Лехин

СХЕМОТЕХНИКА ЭВМ

Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 230101
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2010

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Л52

Лехин С. Н.

Л52 Схемотехника ЭВМ. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 672 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0353-2

Рассматриваются схемотехнические решения, используемые при построении цифровых логических элементов, вопросы синтеза комбинационных и последовательностных цифровых устройств по заданному алгоритму работы, а также процедуры анализа их функционирования. Освещены методы анализа помех в линиях передачи цифровых сигналов и цепях питания. Приведены структуры и схемотехника полупроводниковых запоминающих устройств, схем программируемой логики и вспомогательных узлов цифровой техники. Рассмотрены вопросы схемотехники цифроаналоговых и аналого-цифровых преобразователей информации.

Для студентов технических вузов, инженеров и специалистов, работающих в области разработки цифровой аппаратуры

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Рецензенты:

Ю. М. Смирнов, д. т. н., профессор, член-корреспондент РАН, завкафедрой "Интегрированные системы управления" Санкт-Петербургского государственного политехнического университета;

Г. М. Емельянов, д. т. н., профессор, завкафедрой программного обеспечения вычислительной техники института электронных и информационных систем Новгородского государственного университета им. Я. Мудрого.

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Юрий Рожко*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 01.10.09.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,25.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0353-2

Оглавление

Введение

Современные средства цифровой вычислительной техники строятся на различной элементной базе, в состав которой входят как узлы, выполняющие конкретные операции обработки цифровых сигналов, так и сложные программируемые устройства. Они реализуются на различной элементной базе, включающей диоды, биполярные и полевые транзисторы.

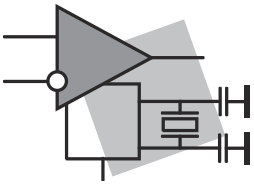
Основой любого цифрового устройства являются простейшие элементы, выполняющие основные логические операции. Они изготавливаются с использованием различных схемотехнических и технологических решений (транзисторно-транзисторная логика, вентили на комплементарных полевых транзисторах, эмиттерно-связанная логика и т. п.). На первых этапах развития цифровой схемотехники эти элементы были основными "кирпичиками", из которых собирались сложные цифровые устройства.

С развитием полупроводниковой микроэлектроники появилась возможность создавать на одном кристалле функционально законченные цифровые узлы (сумматоры, мультиплексоры, счетчики и т. п.), выполняющие конкретные операции. При этом требовалась достаточно широкая номенклатура микросхем. Несмотря на возможности изготовления сложных функционально законченных узлов цифровой обработки на одном кристалле, практическая реализация микросхем конкретных устройств экономически не оправдана. Это связано с высокими затратами на их проектирование, что при небольшом объеме выпуска приводит к очень высокой стоимости.

В дальнейшем были разработаны большие и сверхбольшие интегральные схемы с программируемыми свойствами — микропроцессоры и программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС). Особенностью микропроцессоров является возможность при неизменной внутренней структуре настраиваться на выполнение той или иной операции. Задавая последовательно во времени определенный набор таких операций, можно решить задачу обработки сигналов по любому требуемому алгоритму.

В ПЛИС, представляющей собой набор логических блоков, пользователь имеет возможность организовать межсоединения между ними в соответствии с требуемой конфигурацией устройства обработки. Здесь в отличие от последовательной процедуры, характерной для микропроцессоров, реализуются распределенные параллельные структуры, что позволяет существенно повысить скорость обработки.

При таком подходе возможно массовое изготовление идентичных кристаллов, так как их программируемость позволяет решать различные задачи цифровой обработки сигналов.



Глава 1

Арифметические и логические основы цифровой техники

1.1. Системы счисления, кодированное представление чисел для обработки в ЦВМ

Для записей результатов количественных (числовых) измерений используются наборы символов. Способ представления чисел, при котором они отображаются определенными комбинациями символов, называется *системой счисления*. Одно и то же число допускает различные варианты его представления.

Числовые данные отличаются от остальных тем, что с ними могут производиться арифметические операции (сложение, умножение и т. п.). От выбранного способа записи чисел, т. е. от системы счисления, зависит как наглядность их представления, так и сложность выполнения процедур обработки.

Обычно количество символов (цифр) для записи чисел ограничено, поэтому для больших чисел цифры в его записи будут повторяться. Если значение цифры не зависит от ее местоположения в записи числа, то такая система счисления называется *непозиционной*. Примером является римская, с помощью которой, например, размечаются циферблаты некоторых часов.

Здесь используются так называемые *римские цифры* I, V, X, L и другие. Первая соответствует единице, вторая пятерке, третья десятке, а четвертая — сотне. Запись XXVII означает 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27, запись XI соответствует числу 10 + 1 (одиннадцать) и т. д. В римской и аналогичных непозиционных системах счисления можно записать любое число, однако для этого потребуется достаточно большое количество символов и, кроме того, имеются определенные проблемы с выполнением арифметических операций.

Поэтому в цифровой технике используются *позиционные системы счисления*. Их особенность в том, что значение одной и той же цифры зависит от ее местоположения в записи числа, т. е. от позиции, в которой она располагается. Например, запись 222 в десятичной системе счисления, где используются

десять цифр от 0 до 9, означает, что данное число содержит две сотни, два десятка и две единицы. Позиция, которую занимает цифра, называется *разрядом*. Таким образом, в рассматриваемой записи имеются разряды сотен, десятков и единиц. Числовое значение разряда соответствует его весу.

То же число 222 можно представить как $2\cdot100 + 2\cdot10 + 2\cdot1$, откуда следует, что веса разрядов отличаются в десять раз. Если отношение соседних весов одинаково и равно P, это число называется *основанием системы счисления*. Обычно в позиционных системах значения весов определяются степенями ее основания, и число 222 представляется как $2\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 2\cdot10^0$.

Номер разряда, отсчитываемый справа налево, начиная с нуля, соответствует показателю степени, в которую требуется возвести основание системы счисления, чтобы получить величину веса разряда. Количество символов (цифр) для отображения чисел в позиционных системах счисления не может превышать величины основания, в противном случае возникает неоднозначность записи числа.

Веса разрядов в позиционных системах счисления могут и не находиться в одинаковых отношениях, к примеру 40, 20, 10, 8, 4, 2, 1. В этом случае понятие основания не вводится, и запись произвольного n-разрядного числа $x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$ может быть представлена следующим образом:

$$x_{n-1}P_{n-1} + x_{n-2}P_{n-2} + \ldots + x_1P_1 + x_0P_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_iP_i \ . \qquad (1.1)$$

Здесь x_i — цифра i-того разряда, а P_i — его вес.

Если веса находятся в отношениях, пропорциональных основанию P, то предыдущее соотношение можно преобразовать к виду:

$$x_{n-1}P^{n-1} + x_{n-2}P^{n-2} + \ldots + x_1P^1 + x_0P^0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_iP^i. \qquad (1.2)$$

Аналогичным образом представляются и числа меньшие единицы, для чего используются отрицательные степени основания. К примеру, число 12,34 записывается как $1\cdot10^1 + 2\cdot10^0 + 3\cdot10^{-1} + 3\cdot10^{-2}$.

Основание системы счисления может быть произвольным, но обычно оно выбирается из требований удобства выполнения действий над числовыми данными в конкретной ситуации. В частности, когда требуется обрабатывать данные в цифровых вычислительных машинах, целесообразным является использование двоичной системы счисления.

Это связано с тем, что в цифровой технике применяются элементы, обладающие двумя устойчивыми состояниями, одному из которых можно припи-

сать нулевое значение, а другому — единичное. В *двоичной системе счисления* основание равно двум и для отображения чисел имеется лишь две цифры 0 и 1.

Любое целое число в такой системе может быть представлено в виде

$$N = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0. \qquad (1.3)$$

Здесь веса разрядов равны соответствующим степеням двойки, т. е. 1, 2, 4, 8, 16 и т. д.

При необходимости перевода числа из десятичной системы счисления в двоичную его требуется представить в виде суммы степеней основания, т. е. двойки. Например: $21 = 16 + 4 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^0$. Однако, с учетом того, что в записи числа должны присутствовать все разряды, полученное соотношение требуется дополнить недостающими. Чтобы результат в целом остался неизменным, эти разряды необходимо умножить на ноль, а остальные на единицу. В итоге запись числа 21 будет иметь вид $1\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0$, а само число в двоичной системе счисления запишется следующим образом, 10101.

Существуют и иные подходы для перевода десятичных чисел в двоичную систему. Один из них основан на вычислении остатков от последовательного деления исходного числа на два. Если 21 поделить на два, то получится целое число 10 и остаток, равный 1. Он будет младшей значащей цифрой двоичного кода этого числа. Далее, полученное целое число опять делится на два, что дает 5 и 0 в остатке. Это вторая значащая цифра. Деление продолжают, пока получившееся целое число не станет равным единице, она же будет и цифрой старшего двоичного разряда. Данную процедуру удобно записывать в виде следующей цепочки действий:

21/2=10 ост. 1
10/2=5 ост. 0
5/2=2 ост. 1
2/2=1 ост. 0
1/2 ост. 1

Осуществить преобразование двоичного кода в десятичный можно, воспользовавшись формулой (1.3). Например,

$$10011_2 = 1\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 16 + 2 + 1 = 19_{10}.$$

Кроме двоичной и десятичной систем счисления достаточно часто используют *восьмеричную* и *шестнадцатеричную*. В первой для представления разрядов чисел применяют десятичные цифры от 0 до 7, а во второй для ото-

бражения цифр требуется 16 символов. В качестве первых десяти используют цифры 0, 1, 2, … 9, а остальные шесть обозначаются буквами A, B, C, D, E, F, которые соответствуют числам 10, 11, 12, 13, 14 и 15.

Правила перевода из одной системы счисления в другую аналогичны рассмотренным ранее. Например:

$$123_8 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 64 + 16 + 3 = 83_{10},$$

$$AF5_{16} = 10\cdot 16^2 + 15\cdot 16^1 + 5\cdot 16^0 = 10\cdot 256 + 15\cdot 16 + 5 = 2805_{10}.$$

Так как основания восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления являются степенями двойки, то это существенно облегчает перевод чисел из этих систем в двоичную и обратно. Для перевода из восьмеричной системы в двоичную достаточно каждую цифру числа представить трехразрядным двоичным кодом (*триадой*) и полученные комбинации нулей и единиц выписать в ряд.

Например:$123_8 = (001_2)\ (010_2)\ (011_2) = 1\ 010\ 011_2$. При необходимости перевода из шестнадцатеричной системы в двоичную требуется проделать аналогичную процедуру, но преобразуя каждую цифру шестнадцатеричного кода в четырехразрядную комбинацию (*тетраду*) двоичного:

$$AF5_{16} = (1010_2)\ (1111_2)\ (0101_2) = 1010\ 1111\ 0101_2.$$

Так же просто осуществляется и обратное преобразование, т. е. трансформация из двоичного кода в восьмеричный и шестнадцатеричный. В первом случае требуется двоичное число, начиная справа, разбить на триады, а во втором — на тетрады, и каждую из них заменить цифрой или буквой в соответствующем коде. Например:

$$10111100101_2 = 010\ 111\ 100\ 101 = 2745_8$$

$$10111100010_2 = 0101\ 1110\ 0010 = 5E2_{16}\ .$$

Такой подход нельзя использовать для преобразования двоичного кода в десятичный и наоборот, т. к. отношение между основаниями этих систем счисления не кратно степени двойки.

Формализовать процедуру трансформации десятичного кода в код, аналогичный двоичному, можно, преобразовывая каждую цифру десятичного числа в тетраду двоичного кода. Тогда трансформация, к примеру, числа 175_{10} будет выглядеть следующим образом: 1→0001; 7→0111; 5→0101, а его запись примет вид $175_{10} = 0001\ 0111\ 0101$.

Однако это выражение будет существенно отличаться от представления этого же числа в двоичном коде, $175_{10} = 10101111_2$. Отличие возникает из-за того, что в предыдущем примере разряды в пределах каждой тетрады имеют двоичные веса, меняющиеся от единицы до восьми, и, кроме того, каждая

из тетрад имеет и свой десятичный вес — 1, 10, 100. При таком подходе образуется новая система счисления, которая в данном случае называется *двоично-десятичной* и относится к позиционным системам счисления с двойным взвешиванием.

В ряде случаев использование такой системы оказывается достаточно удобным из-за упрощения процедуры преобразования. Однако выполнение арифметических операций в двоично-десятичной и аналогичных системах счисления является более сложной процедурой, чем в обычных позиционных. В табл. 1.1 приведены представления чисел от нуля до двадцати в различных системах счисления, в том числе и позиционных.

Как уже отмечалось, в позиционных системах счисления веса разрядов могут быть произвольными. При этом одна и та же последовательность чисел в системах с одинаковым основанием будет представляться по-разному в зависимости от соотношения весов разрядов. В табл. 1.2 приведены различные, используемые на практике, способы кодирования чисел от нуля до девяти.

В первом столбце представлены комбинации, соответствующие коду 8-4-2-1. Название кода состоит из значений весовых коэффициентов соответствующих разрядов. Если веса имеют значения 2-4-2-1, то для ряда десятичных цифр кодовые комбинации будут выглядеть по-иному. Код 7-4-2-1 интересен тем, что любая кодовая комбинация содержит не более двух единиц. Такое свойство кода полезно для выявления ошибок при передаче сигналов, т. к. если в принятой тетраде окажется три единицы, то это будет сигналом о возникновении ошибки вследствие того, что таких комбинаций в данном коде не существует. В позиционных системах счисления с одинаковым основанием, но с различными соотношениями весов разрядов, одна и та же последовательность чисел будет представляться по-разному.

Таблица 1.1. *Представление чисел в различных системах счисления*

Дес. число	Непозиционная (римская)	Восьмеричная	Шестнадцатеричная	Двоичная	Двоично-десятичная
0		0	0	0000	0000
1	I	1	1	0001	0001
2	II	2	2	0010	0010
3	III	3	3	0011	0011
4	IV	4	4	0100	0100
5	V	5	5	0101	0101

Таблица 1.1 *(окончание)*

Дес. число	Непозиционная (римская)	Восьмеричная	Шестнадцатеричная	Двоичная	Двоично-десятичная
6	VI	6	6	0110	0110
7	VII	7	7	0111	0111
8	VIII	10	8	1000	1000
9	IX	11	9	1001	0001
10	X	12	A	1010	1 0000
11	XI	13	B	1011	1 0001
12	XII	14	C	1100	1 0010
13	XIII	15	D	1101	1 0011
14	XIV	16	E	1110	1 0100
15	XV	17	F	1111	1 0101
16	XVI	20	11	1 0000	1 0110
17	XVII	21	12	1 0001	1 0111
18	XVIII	22	13	1 0010	1 1000
19	XIX	23	14	1 0011	1 1001

Особенность кодов, представленных в трех последних столбцах таблицы, в том, что они относятся к классу непозиционных или невзвешенных. В коде с избытком 3 сумма двоичных чисел в первой и последней строках, второй и предпоследней и т. д. всегда дает кодовую комбинацию 1111. Сформировать этот код можно путем прибавления к соответствующей десятичной цифре тройки и преобразования полученного результата в двоичный код.

Таблица 1.2. *Кодированное представление чисел в системах счисления с основанием два*

Дес. цифра	Код 8-4-2-1	Код 2-4-2-1	Код 7-4-2-1	Код с избытком 3	Код 2 из 5	Код Грея
0	0000	0000	0000	0011	11000	0000
1	0001	0001	0001	0100	01100	0001
2	0010	0010	0010	0101	00110	0011
3	0011	0011	0011	0110	00011	0010

Таблица 1.2 *(окончание)*

Дес. цифра	Код 8-4-2-1	Код 2-4-2-1	Код 7-4-2-1	Код с избытком 3	Код 2 из 5	Код Грея
4	0100	0100	0100	0111	10001	0110
5	0101	1011	0101	1000	10100	0111
6	0110	0110	0110	1001	01010	0101
7	0111	0111	1000	1010	00101	0100
8	1000	1110	1001	1011	10010	1100
9	1001	1111	1010	1100	01001	1101

В коде 2 из 5 используются пятиразрядные комбинации нулей и единиц. Его особенность в том, что в любой кодовой комбинации содержится по две единицы. Еще одна разновидность довольно часто применяемого кода — код Грея, который обладает тем свойством, что представления соседних чисел отличаются состоянием только одного из разрядов.

Все ранее рассмотренные способы кодирования основывались на предположении, что исходное число положительно. Однако для удобства выполнения ряда арифметических операций в любой системе счисления можно ввести понятие отрицательных чисел, значения которых будут меньше нуля. В десятичной системе счисления для их записи используется знак "–" , а такое же по величине (по модулю) положительное число дополняется знаком "+".

Так как в цифровых вычислительных машинах используются двухуровневые сигналы, одному из которых приписывается значение логического нуля, а другому единицы, то ввести аналогичные знаки не представляется возможным, т. к. любое число и символ должны быть выражены через комбинации нулей и единиц. То есть и знак числа требуется отображать этими же символами.

При одном из подходов положительному знаку ставится в соответствие 0, а отрицательному 1 и знаковый разряд записывается левее самого старшего значащего. Таким образом, число +9 будет выглядеть как 0 1001, а –9 следующим образом 1 1001. Однако в этом случае потребуется обязательное указание на то, что старший разряд является знаковым, иначе первое число будет воспринято как 9, а второе как 25. В так называемом модифицированном коде под знак отводят два дополнительных разряда, положительный кодируется 00, а отрицательный 11.

Некоторые виды арифметических операций в цифровых вычислительных машинах удобнее производить, используя обратные и дополнительные

двоичные коды чисел. Формально *обратный код* получается из двоичного (*прямого*) путем замены во всех разрядах нулей на единицы, а единиц на нули. Таким образом, если прямой двоичный код числа 9 выглядит как 1001, то обратный будет представлен комбинацией 0110.

Дополнительный код образуется путем арифметического прибавления единицы в младший разряд обратного кода числа. Отсюда следует, что дополнительный код 9 отобразится кодовой комбинацией 0111. Понятие дополнительного кода можно ввести для любой позиционной системы счисления. Он представляет собой число, дополняющее исходное до значения веса следующего по старшинству разряда системы счисления.

В рассмотренном примере для представления числа 9 используется четырехразрядная двоичная кодовая комбинация. Вес следующего, более старшего разряда в двоичной системе будет $2^4 = 16$. То есть дополнительным кодом девятки будет число $16 – 9 = 7$, двоичный код которого имеет вид 0111. Если речь вести о десятичной системе счисления, то дополнительный код 9 должен определяться как $10^2 – 9 = 91$.

1.2. Логические переменные и функции

При математическом описании различных процессов вводится понятие *переменной*. Это некоторая независимая величина, которая принимает ряд значений в определенном диапазоне. Множество значений переменной может быть как непрерывным, так и дискретным. В первом случае переменная принимает любое значение из области, в которой она определена, а во втором лишь ряд конкретных. Примером переменной первого вида является температура. Она меняется непрерывно и принимает любое значение из соответствующего диапазона, причем соседние могут отличаться на бесконечно малую величину. Примером дискретной переменной может служить цена товара. Ее минимальные изменения кратны одной копейке, т. к. меньших денежных единиц нет.

Над переменными можно проводить определенные математические действия. Совокупность этих действий и правил их выполнения называется *алгеброй* соответствующих *переменных*. Значениям одной переменной могут быть поставлены в соответствие значения другой. Закон, определяющий это соответствие, называется *функцией*.

В особую группу выделяются переменные, принимающие лишь два фиксированных значения. Например, если переменная описывает состояния переключателя, который может находиться либо во включенном, либо в выключенном состояниях. Значению переменной для одного из них можно присвоить

название "Вкл", а для другого "Выкл", либо обозначить их по иному "А" и "В", или 0 и 1, учитывая в последнем случае, что это не цифры, а просто символы для описания состояния переменной.

Переменные, имеющие лишь два значения, часто называются *логическими* или *Булевыми*. Первое связано с тем, что они могут выступать как результат анализа логического рассуждения, который бывает истиной или ложью. Совокупность законов преобразования этих переменных и правил действий над ними называется *Булевой алгеброй* или *алгеброй логики*.

Таблица 1.3. *Операция логического умножения двух переменных*

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В обычной алгебре для двух переменных A и B существует три возможных отношения между их значениями: A может быть равно, больше или меньше B. В алгебре логики определено лишь отношение эквивалентности, т. е. переменные здесь могут быть либо равны, либо не равны. Вопрос, какая из них больше, а какая меньше, не имеет смысла. Кроме того, для таких переменных определены три основных операции или действия: конъюнкция, дизъюнкция и инверсия.

Конъюнкция, иначе называется операцией *логического умножения*, или операцией "*И*". Она обозначается значком "$\wedge$" либо точкой "$\cdot$", которой в обычной алгебре соответствует умножение. Иногда эту точку не ставят.

Таблица 1.4. *Операция логического сложения двух переменных*

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Правило выполнения операции конъюнкции для двух логических переменных x_1 и x_2 может быть описано словесно, а также представлено в виде таб-

лицы (табл. 1.3). Результат логического умножения равен единице, только если обе переменные одновременно принимают единичные значения. Данная таблица полностью совпадает с таблицей умножения чисел 0 и 1.

Операция *дизъюнкции*, называемая иначе операцией *логического сложения* либо операцией "*ИЛИ*", обозначается как значком "$\vee$", так и "+". Данная операция над двумя переменными определяется табл. 1.4.

Инверсия, называемая также операцией *логического отрицания* либо операцией "*НЕ*", реализуется над одной переменной, преобразуя ее значение в противоположное. Эта операция обозначается в виде черточки сверху над соответствующей переменной, т. е. $\bar{1}=0$, $\bar{0}=1$.

В отличие от алгебры обычных переменных в алгебре логики не существует операций умножения, деления, возведения в степень. Это связано с тем, что логические переменные не принимают числовых значений, не могут быть отрицательными, дробными и т. п.

Таблица 1.5. *Основные соотношения алгебры логики для одной переменной*

$x+0=x$	$x\cdot 0=0$
$x+1=1$	$x\cdot 1=x$
$x+x=x$	$x\cdot x=x$
$x+\bar{x}=1$	$x\cdot\bar{x}=0$
$\bar{0}=1,\bar{1}=0$	$\bar{\bar{x}}=x$

В Булевой алгебре справедливы соотношения, приведенные в табл. 1.5, которые можно проверить простым перебором значений переменной x, воспользовавшись правилами выполнения соответствующих операций.

Для алгебры логики, как и для обычной алгебры, определен ряд законов выполнения действий над переменными, в частности, коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный.

Первый, иначе называемый *переместительным законом*, записывается следующим образом: $x_1+x_2=x_2+x_1$ и $x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1$, из которого вытекает, что при сложении и умножении логических переменных их можно менять местами.

Второй, *ассоциативный закон*, иначе называется *сочетательным*. Для трех переменных его можно представить как:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \ x_1 + x_2 \ + x_3 = x_1 + \ x_2 + x_3 \ ,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \ x_1 \cdot x_2 \ \cdot x_3 = x_1 \cdot \ x_2 \cdot x_3 \ ,$$

т. е. при выполнении логических операций, переменные можно объединять в группы и выполнять соответствующие действия по очереди.

Дистрибутивный, или *распределительный* закон устанавливает правила выполнения скобочных действий $x_1 \cdot \ x_2 \cdot x_3 \ = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$, или $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = x_1 \cdot \ x_2 + x_3$. Данные выражения представляют собой тождества, т. е. они справедливы при любых значениях переменных.

К основным законам алгебры логики относятся и законы или правила *де Моргана*, которые связывают операции логического сложения и умножения. Если в обычной алгебре умножение можно представить как многократное сложение, то логическое сложение может быть выражено через логическое умножение следующим образом:

$$\overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n} \ , \qquad (1.4)$$

а умножение через сложение, как:

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n} \ , \qquad (1.5)$$

т. е. инверсия суммы логических переменных равна логическому произведению их инверсий, а инверсия произведения — сумме инверсий.

Если к обеим частям равенства применить одну и ту же процедуру, то оно не изменится. Отсюда следует, что, проинвертировав обе части приведенных соотношений, правила де Моргана можно представить в такой форме:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}}$$

(1.6)

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}} \ .$$

Как и в алгебре непрерывных переменных, в алгебре логики под *функцией* понимается некий закон, или правило, по которому переменным из одного набора (множества) ставятся в соответствие переменные из другого набора (множества). В обычной алгебре аргумент и функция могут принимать целые и дробные, положительные, отрицательные значения, и количество функций от одного аргумента не ограничено. Например, $y = x, y = x^2, y = x^3, y = \sin x, y = \log x$ и т. п.

В алгебре логики из-за того, что как у переменной, так и у функции может быть только два значения, число последних конечно.

От одной логической переменной существует лишь четыре различных функции, приведенные в табл. 1.6. Они задаются следующим образом. Каждому из значений переменной может быть произвольным образом поставлено в соответствие значение функции равное 0, либо 1. Если любому значению аргумента функция f_0 ставит в соответствие 0, то она называется *тождественный ноль*.

Таблица 1.6. *Функции одной логической переменной*

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функция f_1 называется *функцией тождества*, т. к. ее значения совпадают со значениями аргумента. Значения функции f_2 противоположны, или инверсны, по отношению к значениям аргумента. Последняя функция f_3 обоим значениям аргумента x ставит в соответствие единицы и называется *тождественная единица*. Других видов функций от одной переменной нет.

Таблица 1.7. *Функции двух логических переменных*

x_0	x_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Как и в обычной алгебре, в алгебре логики существуют функции от нескольких аргументов или переменных, причем количество функций N связано с числом переменных n соотношением $N = 2^{2^n}$. Если переменных две — x_0 и x_1, то их наборов будет четыре, а количество вариантов задания значений функций на этих наборах и, соответственно, число самих несовпадающих функций — 16. Они представлены в табл. 1.7.

Некоторые из функций, приведенных в таблице, имеют собственные названия. Функция f_1 называется функцией логического умножения, конъюнкцией, функцией И, а f_7 — функцией логического сложения, дизъюнкцией, либо функцией *ИЛИ*. Это объясняется тем, что значения данных функций эквивалентны результатам выполнения соответствующих логических операций.

С учетом количества обрабатываемых переменных f_1 часто называют функцией *2И*, а f_7 — *2ИЛИ*. Алгебраическая (символьная) запись этих функций выглядит следующим образом: $f_1 = x_1 \cdot x_2$ и $f_7 = x_1 + x_2$.

Таблица 1.8. *Связь между логическими функциями*

x_0	x_1	f_1	f_7	f_8	f_{14}	f_6	f_9
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Как показано в табл. 1.8, функция f_8 отличается от f_7 тем, что нули заменены единицами и наоборот. То есть каждое значение f_7 проинвертировано. Поэтому функция f_8 называется функцией *ИЛИ-НЕ* (*2ИЛИ-НЕ*) и ее связь с f_7 можно отобразить таким образом $f_8 = \overline{f_7}$.

Аналогичная связь наблюдается и между функциями f_{14} и f_1, вследствие чего f_{14} носит название функции *И-НЕ* (*2И-НЕ*) и соответственно $f_{14} = \overline{f_1}$. Отсюда следует, что количество логических функций не только ограничено, но они еще и определенным образом взаимосвязаны между собой.

Функция f_6 называется *функцией логической неравнозначности*, а f_9 — *функцией логической равнозначности*. Первая из них принимает единичное значение в случаях, когда аргументы x_0 и x_1 не равны, а вторая в противоположной ситуации.

В алгебре логики функции можно определить или задать как с помощью таблицы, отражающей связь значений аргументов и функции, так и в виде совокупности типовых логических операций, записанных в виде формулы. Первый способ называется *табличным*, а второй *аналитическим*.

Вследствие наличия определенной связи между операциями конъюнкции и дизъюнкции, которая описывается законами де Моргана, одна и та же функция аналитически может быть представлена по-разному. Например, $f(x_0, x_1) = x_0 \cdot x_1$ можно представить и как $\overline{\overline{x_0} + \overline{x_1}}$. Функция $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 + x_1 \cdot x_2$ после тождественных преобразований может выглядеть следующим образом: $x_0 + \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})}$, или $\overline{\overline{x_0} \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3})}$, либо как $\overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot \overline{x_3}}$. Возможен также вариант $\overline{\overline{x_0 + x_1} + \overline{x_2 + x_3}}$.

Используя правила де Моргана, любую логическую функцию можно представить в двух разных, но эквивалентных формах: как сумму произведений логических переменных или как произведение сумм. Если логическое выражение функции представляет собой сумму компонент, каждая из которых является простой конъюнкцией аргументов, то такая форма называется *дизъюнктивной нормальной формой — ДНФ*. Когда в выражение, описывающее функцию, входят лишь произведения сумм прямых или инверсных значений аргументов, это соответствует второй, так называемой *конъюнктивной нормальной форме* или *КНФ*.

Примером ДНФ является запись $f_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 + x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_0} \cdot x_2$, а КНФ может выглядеть следующим образом:

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + x_1) \cdot x_2 \cdot (\overline{x_0} + x_1 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_2}) .$$

Некоторые выражения не подпадают под эти определения, например $f_3(x_0, x_1, x_2) = x_0 + x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{\overline{x_1} \cdot x_2}$, т. к. здесь последнее слагаемое не является простой конъюнкцией, т. е. произведением соответствующих логических переменных. Однако после небольших преобразований его можно перевести в ДНФ такого вида $f_3(x_0, x_1, x_2) = x_0 + x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 + \overline{x_2}$.

ДНФ и КНФ — это две эквивалентные формы представления логических функций, которые, используя правила и законы алгебры логики, можно трансформировать одна в другую. Для функции f_1 процедура преобразования будет следующей:

$$\begin{aligned} f_1(x_0, x_1, x_2) &= x_0 + x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_0} \cdot x_1 = \\ &= \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1 \cdot \overline{x_2}} \cdot \overline{x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2} \cdot \overline{\overline{x_0} \cdot x_2}} = \\ &= \overline{\overline{x_0} \cdot (\overline{x_1} + x_2) \cdot (\overline{x_0} + x_1 + \overline{x_2}) \cdot (x_0 + \overline{x_2})} . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Полученное выражение по определению не является КНФ. Однако если проинвертировать обе части равенства, то КНФ получится для функции $\overline{f_1}$.

После замены в КНФ логического умножения на сложение, запись f_2 примет вид $f_2(x_0,x_1,x_2)=\overline{\overline{(x_0+x_1)}+\overline{x_2}+\overline{(\overline{x_0}+x_1+\overline{x_2})}+\overline{(\overline{x_0}+\overline{x_2})}}$, при котором функция оказывается представленной с использованием лишь двух операций — логического сложения (*ИЛИ*) и инверсии (*НЕ*). При замене сложения на умножение, получится соотношение, в которое войдут лишь операции логического умножения (*И*) и инверсии (*НЕ*).

Отсюда следует, что любая, сколь угодно сложная логическая функция представима с помощью двух простейших — *ИЛИ* и *НЕ* либо *И* и *НЕ*. Наборы функций, через которые можно выразить все остальные, называются *базисом*.

Следуя правилам алгебры логики, функцию как *НЕ*, так и *ИЛИ* можно представить, используя лишь одну операцию *ИЛИ-НЕ*. Действительно, $\overline{x}=\overline{x+x}$, $\overline{\overline{x_1+x_2}}=x_1+x_2$.

Таким образом, набор из двух функций *ИЛИ* и *НЕ* является избыточным, т. к. после соответствующих преобразований любую функцию можно реализовать, используя лишь функцию *ИЛИ-НЕ*. Поэтому она является представительницей минимального базиса.

Аналогичные рассуждения можно провести и по поводу функции *И-НЕ*. Действительно, $\overline{x}=\overline{x}\cdot\overline{x}$, $\overline{\overline{x_1\cdot x_2}}=x_1\cdot x_2$, а следовательно, и эта функция также может служить в качестве минимального базиса. Отсюда следует, что любую сколь угодно сложную функцию от произвольного количества логических переменных можно представить, используя только одну, причем любую из рассмотренных функций. Это обстоятельство в ряде случаев существенно облегчает построение устройств для обработки цифровых сигналов.

Кроме представления функций в форме ДНФ и КНФ существуют так называемые совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). ДНФ функции называется совершенной, если в каждом ее слагаемом присутствуют все аргументы или их инверсии.

Функция $f_1(x_0,x_1)=x_0+\overline{x_0}\cdot\overline{x_1}$ не представлена в СДНФ, т. к. в первое слагаемое не входит переменная x_1. А функция $f_2(x_0,x_1)=x_0\cdot x_1+\overline{x_0}\cdot\overline{x_1}$ записана в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Аналогичная ситуация справедлива и для конъюнктивных нормальных форм.

Любая функция, представленная в несовершенной форме, всегда может быть приведена к совершенной, причем единственным образом. В частности для функции $f_1(x_0,x_1)$ это делается умножением первого слагаемого на выраже-

ние вида $x+\overline{x}=1$. Так как оно равно единице, то умножение на нее ничего не изменит, но в итоге x_1 окажется представленной в виде СДНФ:

$$f_1(x_0,x_1)=x_0+\overline{x_0}\cdot\overline{x_1}=x_0\cdot\ x_1+\overline{x_1}\ +\overline{x_0}\cdot\overline{x_1}=x_0\cdot x_1+x_0\cdot\overline{x_1}+\overline{x_0}\cdot\overline{x_1}\ .$$

Несмотря на то, что первый вариант функции выглядит проще, в ряде случаев представление в форме СДНФ является необходимым, и, кроме того, при алгебраическом описании функций, заданных в табличной форме, они автоматически приводятся к виду СДНФ.

Таблица 1.9. *Табличное задание логической функции*

x_0	x_1	x_2	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Пусть некоторая функция y от трех переменных представлена в виде табл. 1.9. Полное количество ее значений определяется числом переменных n и будет равно 2^n (в данном случае $n = 3$, $2^3 = 8$). Для преобразования табличной формы представления функции в алгебраическую выбирается строка, где функция принимает единичное значение и записывается логическое произведение всех переменных.

Те из них, которые принимают единичные значения, вводятся в соответствующее произведение без инверсии, а равные нулю — с инверсией. Получившаяся при этом компонента называется *конституентой единицы*.

Далее эти компоненты логически суммируют. В итоге выражение для функции будет иметь вид, соответствующий СДНФ: $y=x_0\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}+x_0\cdot x_1\cdot\overline{x_2}+x_0\cdot x_1\cdot x_2$. Проверка правильности полученного результата может быть произведена простым перебором значений переменных и вычислением функции. Первое слагаемое, а значит, и вся функция, обращается в единицу, когда

$x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$. Поэтому x_1, x_2 и входят в него с инверсиями, т. к. только в таком случае $x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = 1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Аналогичным образом выглядит ситуация для последних двух строк таблицы. На остальных наборах ни одно из слагаемых в единицу не обращается, следовательно, функция будет равна нулю.

Рассмотренную функцию можно представить и в *конъюнктивной нормальной форме — КНФ*. В этом случае для каждого набора переменных, на котором она обращается в ноль, записывают логическую сумму всех переменных. Если значения переменных равны единице, то они должны входить туда с инверсией, а если нулю — то в прямом виде. Полученные суммы называются *конституентами нуля*. Далее их логически перемножают. Для приведенной ранее функции y запись в виде КНФ имеет вид, который одновременно представляет собой и СКНФ:

$$y = (x_0 + x_1 + x_2) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x_2}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + x_2) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_0} + x_1 + \overline{x_2}). \quad (1.8)$$

Такое представление абсолютно эквивалентно предыдущему, но сложнее по структуре из-за того, что на восьми наборах переменных функция лишь три раза обращается в единицу и пять раз принимает нулевое значение. При ее записи в виде СДНФ в выражение войдут три компоненты, а в форме СКНФ — пять. Поэтому на практике часто используют ту форму представления, которая позволяет получить выражение минимальной сложности.

Таблица 1.10. *Табличное представление инверсной логической функции*

x_0	x_1	x_2	y	$\overline{y}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Однако в ряде случаев форма представления функции не может быть выбрана произвольной. В такой ситуации для минимизации числа ее компонент

используют следующий подход. Если требуется представление в форме СДНФ, а количество единичных значений функции больше, чем нулевых, то вводят новую функцию, инверсную по отношению к исходной (табл. 1.10).

Единичных значений у нее будет меньше, чем нулевых, и СДНФ окажется проще. Для функции, представленной в данной таблице, при использовании обычного подхода получим:

$$y = \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot x_1 \cdot x_2,$$

а для инверсной функции выражение примет вид $\overline{y} = \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2$.

Чтобы вернуться к исходной функции, достаточно проинвертировать обе части последнего равенства $y = \overline{\overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2}$. Хотя это и не СДНФ, но данное выражение гораздо проще предыдущего, что в ряде случаев важнее канонической формы представления.

Последнее связано с тем, что при разработке устройств, работающих с цифровыми сигналами, их функционирование описывают в виде совокупности логических функций, а затем реализуют с помощью электронных узлов. Чем компактнее удается получить выражение для функции, тем проще аппаратно реализовать соответствующую ей процедуру обработки.

В алгебре логики применяются специальные процедуры *минимизации логических функций*, позволяющие в ряде случаев представить их с использованием минимального количества логических операций. Некоторые функции минимизировать, т. е. сократить количество входящих в их состав компонент, нельзя, а для других это возможно и разными способами.

Пусть исходная функция представлена в ДНФ и имеет вид $y = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1}$. Для ее преобразования можно воспользоваться правилами и основными законами алгебры логики. Если из первых двух слагаемых за скобки вынести произведение $x_0 \cdot x_1$, то функция примет вид $y = x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) + x_0 \cdot \overline{x_1}$. Так как сумма прямого и инверсного значений одной и той же переменной x_2 равна единице, а умножение на единицу оставляет результат неизменным, то

$$y = x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) + x_0 \cdot \overline{x_1} = x_0 \cdot x_1 \cdot 1 + x_0 \cdot \overline{x_1} = x_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot \overline{x_1}.$$

В оставшемся выражении за скобки можно вынести x_0, выражение в скобках опять будет равно единице и в итоге $y = x_0 \cdot x_1 = x_0 \cdot \overline{x_1} = x_0 \cdot (x_1 + \overline{x_1}) = x_0$. То есть данная конкретная функция от трех переменных, ранее содержащая три компоненты, будет равна x_0.

В ходе выполнения процедуры минимизации часть переменных исчезает. Это, в частности, происходит при обработке пар слагаемых, представляющих собой произведения переменных и отличающихся тем, что какая-либо переменная входит в одно из слагаемых в прямом, а в другое — в инверсном виде, причем все остальные компоненты слагаемых совпадают. В этом случае из двух слагаемых получается одно с уменьшенным на единицу количеством переменных.

Отсюда следует, что выражение $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x_2}$ минимизировать можно, а $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ — нет. Если за скобки вынести x_0, то в выражении $x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ число переменных не уменьшится.

Таким образом, для минимизации требуется просмотреть все компоненты, входящие в состав функции, и попарно сгруппировать слагаемые, отличающиеся значениями лишь одной переменной. Затем вместо каждой из пар записать выражение с уменьшенным на единицу числом переменных. Эта процедура может повторяться несколько раз. В итоге форма представления исходной функции будет содержать минимальное количество слагаемых и переменных. Аналогичным образом проводится минимизация функций, представленных в конъюнктивной форме.

Формализовать этот процесс можно, используя так называемые *карты Карно*. Данный прием особенно удобен, если число аргументов логической функции не превышает четырех-пяти. Для применения карт Карно исходная функция должна быть представлена в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме — СДНФ*, т. е. в виде сумм логических произведений, куда входят все комбинации переменных.

Пусть некоторая функция f_1 от трех переменных представлена табл. 1.11. В виде СДНФ она содержит пять слагаемых и выглядит следующим образом: $f_1 = \underline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + \underline{x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} + \underline{\underline{x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot x_2}} + \underline{\underline{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2}}$. Ее можно минимизировать аналитически, т. к. в данном выражении существуют пары слагаемых, в которых меняется значение лишь одной переменной. Это первое и третье, четвертое и пятое. Проделав необходимые действия, получим $f_1 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot x_2$.

Однако для рассматриваемой функции процесс минимизации можно продолжить дальше. Если в исходном выражении рассмотреть первое и второе слагаемые, то можно сделать вывод, что обрабатывая их, удалось бы сократить переменную x_1, но в преобразованном выражении первое слагаемое уже изменено и данная процедура формально не выполнима.

Таблица 1.11. *Представление логической функции для минимизации с помощью карт Карно*

x_0	x_1	x_2	y_1
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

В то же время в соответствии с законами алгебры логики, в частности, $x + x = x$, в любое выражение можно без изменения результата логически прибавлять любые имеющиеся там слагаемые. Следовательно, если в первоначальную форму представления функции прибавить $\overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$, то после обработки этой компоненты со вторым слагаемым, получится $\overline{x_0} \cdot \overline{x_2}$. Выражение для f_1 примет вид $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot x_2$, соответствующий минимальной дизъюнктивной форме представления рассматриваемой функции. Объединение слагаемых с одновременным уменьшением числа входящих в их состав переменных часто называется *склеиванием*. В целом аналитическая процедура минимизации оказывается достаточно длительной даже для простых функций.

Карта Карно представляет собой таблицу, количество клеток или ячеек в которой K равно числу значений, принимаемых функцией, которое связано с количеством переменных n соотношением $K = 2^n$. Для функции от трех переменных карта Карно содержит восемь ячеек. Им приписываются все возможные значения комбинаций аргументов. Совокупность аргументов в каждой комбинации разбивается на две группы. У функции f_1 в качестве одного из возможных вариантов разбиения в одну группу можно объединить x_0, x_1 и отдельно рассматривать x_2 либо сгруппировать x_0, x_2, а x_1 представлять отдельно. Возможны и иные варианты.

Столбцы обозначаются комбинациями логических произведений прямых и инверсных значений соответствующих переменных группы. Для первого случая разбиения они будут такими: $x_0 \cdot x_1$, $x_0 \cdot \overline{x_1}$, $\overline{x_0} \cdot \overline{x_1}$, $\overline{x_0} \cdot x_1$.

Комбинации аргументов, используемые в обозначении соседних столбцов, должны отличаться лишь в одном разряде. То есть $x_0 \cdot x_1$ и $x_0 \cdot \overline{x_1}$, но не $x_0 \cdot x_1$ и $\overline{x_0} \cdot \overline{x_1}$, т. к. здесь меняют значения сразу обе переменные. Верхнюю строку можно обозначить x_2, а нижнюю $\overline{x_2}$, однако возможен и вариант $\overline{x_2}$, x_2. В итоге таблица будет иметь вид, представленный на рис. 1.1.

f_1	$x_0 \cdot x_1$	$x_0 \cdot \overline{x_1}$	$\overline{x_0} \cdot \overline{x_1}$	$\overline{x_0} \cdot x_1$
x_2				
$\overline{x_2}$				

Рис. 1.1. Форма представления карты Карно для логической функции от трех переменных

Далее карту Карно заполняют значениями функции, которые она принимает на соответствующих наборах переменных. Если аргумент в наборе равен единице, то в обозначение строки или столбца он входит без инверсии, а если нулю — то с инверсией. Таким образом, для рассматриваемой функции $f_1(0,0,0) = f_1(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2}) = 1$, $f_1(0,0,1) = f_1(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2) = 0$ и т. д. (рис. 1.2). Процедура минимизации заключается в том, что расположенные рядом единицы охватываются так называемыми *контурами склейки*, причем, как показано на рис. 1.2, некоторые из единиц могут входить сразу в несколько контуров, а некоторые ни в один. Количество ячеек в контуре должно быть равно одному из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 ... 2^k.

f_1	$x_0 \cdot x_1$	$x_0 \cdot \overline{x_1}$	$\overline{x_0} \cdot \overline{x_1}$	$\overline{x_0} \cdot x_1$
x_2	1	1	0	0
$\overline{x_2}$	0	1	1	1

Рис. 1.2. Карта Карно для логической функции f_1

Из табл. 1.11 следует, что функция f_1 принимает единичное значение, когда $x_0 = x_1 = x_2 = 1$, т. е. на наборе $x_0x_1x_2$, а также при $x_0 = x_2 = 1$, $x_1 = 0$. Таким образом, в выражение для функции будут входить компоненты $x_0x_1x_2 + x_0\overline{x_1}x_2$ и при их склеивании исчезнет переменная x_1.

Процедура минимизации с использованием карт Карно проводится следующим образом. Проверяются переменные, обозначающие строки и столбцы в контурах склейки, и если они меняют свое значение, то их не вносят в запись соответствующей компоненты функции. Рассмотрение верхнего контура дает произведение x_0x_2, т. к. x_1 меняет свое значение. Из следующего контура получится выражение $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

Оставшаяся единица соответствует комбинации переменных $\overline{x_0}x_1\overline{x_2}$. Таким образом. минимизированное выражение для функции будет иметь вид $f_1 = x_0 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2}$, совпадающий с полученным в ходе первого этапа ее минимизации аналитическим способом. Однако там добавление вспомогательной компоненты, которая не изменила значения функции, позволило устранить еще одну переменную и окончательное выражение получилось проще.

f_1	$x_0 \cdot x_1$	$x_0 \cdot \overline{x_1}$	$\overline{x_0} \cdot \overline{x_1}$	$\overline{x_0} \cdot x_1$
x_2	1	1	0	0
$\overline{x_2}$	0	1	1	1

Рис. 1.3. Пример пересекающихся контуров склейки

Аналогичный подход возможен и при использовании карт Карно. Для этого, как показано на рис. 1.3, вводятся дополнительные контуры, охватывающие уже склеенные единицы. Если ввести такой контур для нижней строки, то вместо $\overline{x_0}x_1\overline{x_2}$ получится $\overline{x_0} \cdot \overline{x_2}$ и функция примет вид $f_1 = x_0 \cdot x_2 + \overline{x_0} \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_1}$, полностью совпадающий с результатом аналитической минимизации.

Контуры склейки можно выбрать и как показано на рис. 1.4. В этом случае выражение для функции станет таким $f_1 = x_0 \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_1} + \overline{x_0} \cdot \overline{x_2}$. Оно не сов-