С. М. Львовский

Семейства прямых и гауссовы отображения

МЦНМО

УДК 514.753.35+514.745.2
ББК 22.151
Л89

Львовский С. М.
Семейства прямых и гауссовы отображения
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
38 с.
ISBN 978-5-4439-2023-8

Всякое одномерное семейство прямых на плоскости (кроме вырожденных случаев) является семейством касательных к некоторой кривой. В пространстве, однако, это уже совершенно не так; в брошюре объясняется, как, глядя на одномерное семейство прямых в пространстве, определить, является ли оно «касательным». По ходу дела читатель знакомится с такими важными понятиями современной математики, как внешняя алгебра и грассмановы многообразия.

Брошюра написана по материалам цикла лекций на Летней школе «Современная математика» в Дубне в 2003 г. Она доступна студентам младших курсов и школьникам старших классов.

Подготовлено на основе книги: *С. М. Львовский*. Семейства прямых и гауссовы отображения. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2023-8

© Львовский С. М., 2013.
© МЦНМО, 2014.

§1. О чем эта книжка

Представим себе, что в пространстве движется прямая (по ходу дела она может и смещаться, и поворачиваться) — см. рис. 1. В таких случаях говорят, что в пространстве задано семейство прямых (точнее говоря, одномерное семейство прямых). Разумеется, двигать прямую можно по-всякому, и семейства прямых при этом будут получаться самые

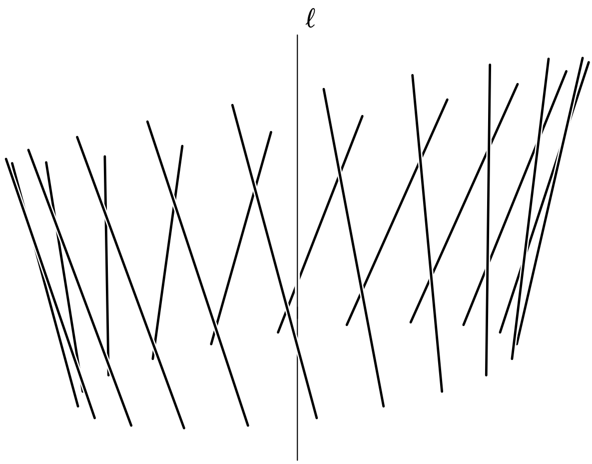

Рис. 1. Семейство прямых, полученное вращением одной из скрещивающихся прямых относительно другой (ℓ). Мы встретимся с этим семейством в п. 8.3.

разные. Один из возможных способов задать семейство, в частности, таков. Рассмотрим произвольную кривую C в пространстве и в каждой ее точке проведем касательную прямую. Получится семейство прямых (см. рис. 2). Такие семейства мы будем называть *касательными*.

Зададимся вопросом: *всякое ли семейство прямых в пространстве можно получить как семейство касательных к какой-нибудь кривой*?

Если понимать этот вопрос совсем буквально, то нетрудно заметить, что ответ на вопрос отрицателен: если все прямые из нашего семейства проходят через одну точку (иными словами, если все наши прямые суть образующие некоторого конуса), то ясно, что предъявить кривую, которой все они касаются, никак невозможно (рис. 3). Но этот ответ, хоть формально он и верен, порождает только следующий вопрос: ну хорошо, такие семейства прямых касательными действительно не являются; а все остальные являются или тоже не всегда? Можно еще сказать так: семейства прямых, проходящих через одну точ-

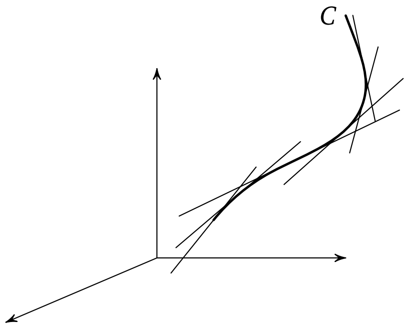

Рис. 2. Семейство прямых, касающихся кривой C

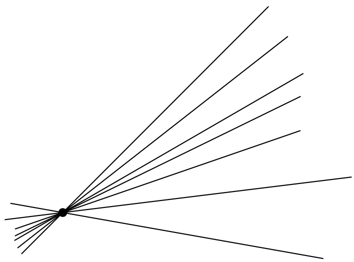

Рис. 3. Это семейство касательным точно не является

ку, очень «специальны»: если такое семейство слегка «пошевелить», то свойство «все прямые проходят через одну точку» разрушится. Что получится, если рассмотреть «случайно взятое» семейство — семейство общего положения?

Собственно говоря, для начала стоит задать тот же вопрос про прямые не в пространстве, а на плоскости: пусть дано одномерное семейство прямых на плоскости; всегда ли оно является семейством касательных к некоторой плоской кривой?

Для плоскости ответ оказывается очень простым. Именно, семейства прямых, проходящих через одну и ту же точку (на плоскости такое семейство, собственно говоря, для каждой точки только одно), касательными также не являются, но зато все остальные — являются: для всякого одномерного семейства прямых на плоскости, не проходящих через одну и ту же точку, найдется кривая, которой все эти кривые касаются. Если нарисовать прямые в семействе погуще, то существование такой кривой («огибающей», или «двойственной») не покажется чем-то удивительным (рис. 4).

Рис. 4. Огибающая, она же двойственная кривая на плоскости

Двойственные кривые на плоскости, несмотря на интуитивную очевидность их существования, — предмет также интересный, но в этом курсе мы его развивать не будем, а сосредоточимся на прямых в пространстве. Оказывается, что для этого случая свойство семейства прямых «быть касательным» — не правило, а исключение. В этой книжке мы получим необходимое и достаточное условие того, что данное семейство прямых в пространстве является касательным. Как вы увидите, его не так сложно записать на языке формул, но гораздо интереснее сформулировать геометрически. Мы приведем три такие формулировки, в совершенно разных терминах. Начнем же с того, что разовьем язык, на котором удобно описывать семейства прямых.

§ 3. Кривые и касательные в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{RP}^n$

Поговорим еще о кривых в проективном пространстве и касательных к ним. Кривая в $\mathbb{R}^n$ — это просто отображение из интервала на числовой оси в $\mathbb{R}^n$:

$$\gamma\colon (a; b) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)). \tag{3.1}$$

Подразумевается, что это отображение «достаточно хорошее»: например, дифференцируемое (в том смысле, что все функции γ_i дифференцируемы), а еще лучше — бесконечно дифференцируемое.

Каждая точка в $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(V)$ задается ненулевым вектором в V; поэтому кривую в $\mathbb{P}(V)$ можно задать как кривую (одномерное семейство ненулевых векторов) в V: $t \mapsto v(t)$. Это задание, разумеется, неоднозначно: если φ — любая не обращающаяся в нуль «хорошая» функция, то отображение $t \mapsto \varphi(t)v(t)$ задает ту же кривую. А если все векторы $v(t)$ коллинеарны, то наша «кривая» состоит из одной-единственной точки; мы такие вырожденные случаи рассматривать не будем.

Для кривых в $\mathbb{R}^n$ определены, как известно, касательные векторы: если $\gamma\colon (a; b) \to \mathbb{R}^n$ — кривая и $p = \gamma(t_0)$ — точка на этой кривой, то касательный вектор к этой кривой в точке p — не что иное, как вектор скорости

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0)).$$

Прямая, проходящая через точку $p = \gamma(t_0)$ вдоль вектора $\gamma'(t_0)$ — это касательная прямая к кривой в точке p. Если $\gamma'(t_0)$ — нулевой вектор, то касательную прямую определить не удастся; далее мы будем считать, что все касательные векторы ненулевые — точка движется по кривой с ненулевой скоростью. См. рис. 6.

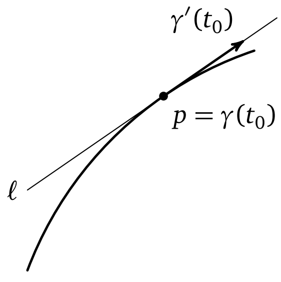

Рис. 6. Касательный вектор $\gamma'(t_0)$ и касательная прямая ℓ

Для кривых в проективном пространстве мы не будем пытаться определить касательные векторы (это можно, но нам не потребуется), а определим сразу касательные прямые. Если все ту же кривую (3.1) в $\mathbb{R}^n$ рассмотреть как кривую в $\mathbb{RP}^n$, то можно считать, что она задана как

$$t \mapsto v(t) = (1, \gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)).$$

Если касательную к ней в точке $p = \gamma(t_0)$, то есть прямую, проходящую через p в направлении $\gamma'(t_0)$, дополнить бесконечно удаленной точкой, то получится прямая в $\mathbb{RP}^n$; ей соответствует двумерное подпространство в $V = \mathbb{R}^{n+1}$, порожденное векторами

$$v(t_0) = (1, \gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_n(t_0))$$

и

$$(0, \gamma_1'(t_0), \ldots \gamma_n'(t_0)) = v'(t_0).$$

В общем случае, когда кривая в $\mathbb{P}(V)$ задана как отображение $t \mapsto v(t)$, также определим касательную прямую «в момент времени t_0» (т. е. в точке, соответствующей $v(t_0)$) как прямую в $\mathbb{P}(V)$, которой соответствует двумерное подпространство в V, порожденное векторами $v(t_0)$ и $v'(t_0)$. Поскольку задание кривой в $\mathbb{P}(V)$ как отображения из интервала в V неоднозначно, надо проверить, что касательная прямая от этого задания не зависит. И действительно, если $\tilde{v}(t) = \varphi(t)v(t)$ — другое задание той же кривой (где φ — не обращающаяся в нуль функция), то $\tilde{v}'(t) = \varphi'(t)v(t) + \varphi(t)v'(t)$, и ясно, что пары векторов

$$(v(t_0), v'(t_0)) \quad \text{и} \quad (\varphi(t_0)v(t_0), \varphi'(t_0)v(t_0) + \varphi(t_0)v'(t_0))$$

задают одно и то же векторное подпространство в V. См. рис. 7.

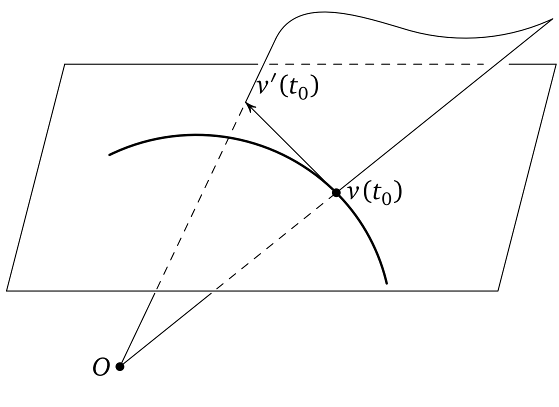

Рис. 7. Двумерная плоскость в V, соответствующая касательной прямой в $\mathbb{P}(V)$, порождена прямыми $\overline{Ov(t_0)}$ и $\overline{Ov'(t_0)}$ ($\dim V = 3$, O — начало координат в V)

Оглавление