Л.Д. КУДРЯВЦЕВ, А.Д. КУТАСОВ,
В.И. ЧЕХЛОВ, М.И. ШАБУНИН

УДК 517
ББК 22.161
К 88

Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. **Сборник задач по математическому анализу.** В 3 т. Т.2. **Интегралы. Ряды** / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 504 с. — ISBN 978-5-9221-0307-7.

Книга является второй частью трехтомного сборника задач, созданного на основе многолетнего опыта преподавания курса математического анализа в Московском физико-техническом институте. В нее включен материал, относящийся к следующим разделам математического анализа: неопределенные интегралы, определенные интегралы, несобственные интегралы, числовые ряды, функциональные последовательности и ряды. Каждый параграф содержит справочный материал, набор типовых примеров с решениями и задачи для самостоятельной работы с ответами.

Для студентов университетов и технических вузов с расширенной программой по математике.

Рецензенты:

заведующий кафедрой общей математики ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, академик *В.А. Ильин*;
профессор МФТИ, академик *С.М. Никольский*.

Табл. 1. Ил. 41. Библиогр. 20 назв.

ISBN 978-5-9221-0307-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является второй частью сборника задач и содержит материал, относящийся к двум важным разделам курса математического анализа — “Интегралы” и “Ряды”. Сборник состоит из пяти глав.

В первой главе рассматриваюся общие приемы и методы интегрирования, содержится большое число задач, связанных с нахождением первоообразных для рациональных, иррациональных и трансцендентных функций.

Вторая глава посвящена определенному интегралу. Рассматриваются определение и свойства интеграла Римана, формула Ньютона–Лейбница, правило дифференцирования интеграла с переменными верхним и нижним пределами интегрирования, формулы замены переменного и интегрирования по частям, различные методы оценки и приближенного вычисления интегралов. Много внимания уделяется приложениям определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.

В третьей главе рассматриваются несобственные интегралы.

В четвертой главе изучаются числовые ряды. Рассматриваются свойства сходящихся рядов, критерий Коши сходимости ряда, ряды с неотрицательными членами. Много внимания уделено абсолютно и не абсолютно сходящимся рядам.

Пятая глава посвящена функциональным рядам. Особое внимание уделяется таким трудным для усвоения понятиям, как равномерная и неравномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов (§ 17, 18). Рассматриваются критерии равномерной сходимости, признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. В § 19 изучаются свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов, в § 20 — степенные ряды, в § 21 — ряд Тейлора, в § 22 — тригонометрические ряды Фурье. Асимптотическому представлению функций посвящен § 23, а в § 24 рассматриваются бесконечные произведения.

Сборник предназначен для студентов, обучающихся во втузах с расширенной программой по математике и в университетах, а также для преподавателей. Большой набор задач разной степени трудности дает возможность преподавателю использовать сборник при работе со студентами в аудитории, при составлении контрольных работ и заданий. Он может оказаться полезным и для лиц, самостоятельно изучающих математику.

Первое издание вышло в 1986 г. Во второе издание внесен ряд изменений. В каждом параграфе вначале дан справочный материал, затем приведены примеры с решениями и задачи с ответами. Добавлены задачи в главах 3–5.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, многолетняя плодотворная работа которой в значительной степени способствовала появлению этого сборника.

ГЛАВА 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Общие приемы и методы интегрирования

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема в каждой его внутренней точке, причем $F'(x) = f(x)$.

В курсах математического анализа доказывается, что для каждой непрерывной функции первообразная существует.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$, то $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то множество

$$\{F(x) + C, \quad C \in R\},$$

т. е. совокупность всех первообразных функции $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\, dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + C\}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Формулу (1) принято записывать без фигурных скобок, т. е. опуская обозначение множества:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

2. Свойства неопределенного интеграла.

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)\, dx.$$

2. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

3. Если функция $f(x)$ имеет первообразную и $a \in R$, то функция $af(x)$ также имеет первообразную, причем при $a \neq 0$ верно равенство

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на некотором промежутке, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

3. Формулы для основных неопределенных интегралов. Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции.

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a>0, \quad a\neq 1; \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$ 5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ 7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$ 9. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$ 11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a\neq 0.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x|<a, \quad a\neq 0.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C, \quad a\neq 0.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad a\neq 0 \quad (|x|>|a|).$

4. Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть на некотором промежутке определена сложная функция $f(\varphi(x))$ и функция $t=\varphi(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках; тогда если интеграл $\int f(t)\,dt$ существует, то интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ также существует, причем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)}. \qquad (2)$$

Эту формулу называют *формулой интегрирования подстановкой.*

Если для функции $t=\varphi(x)$ на рассматриваемом промежутке существует обратная $x=\varphi^{-1}(t)$, то формулу (2) можно переписать в

виде
$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)},$$
или, если исходную переменную интегрирования обозначать как обычно через x,
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{3}$$

Формулу (3) обычно называют *формулой интегрирования заменой переменной.*

Замечание. При использовании формулы (3) в записи решения знак подстановки $|_{x=\varphi^{-1}(t)}$ обычно опускают.

5. Интегрирование по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке и дифференцируемы во всех его внутренних точках. Тогда если на этом промежутке существует интеграл $\int vu'\,dx$, то существует и интеграл $\int uv'\,dx$, причем
$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx \quad \text{или} \quad \int udv = uv - \int v\,du. \tag{4}$$

Формула (4) называется *формулой интегрирования по частям.* Применение формулы (4) целесообразно в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и vdu являлось задачей более простой, чем интегрирование исходного выражения.

По известному дифференциалу dv функция v и определяется неоднозначно, но в формуле (4) в качестве v может быть выбрана *любая* функция с данным дифференциалом dv.

Иногда для вычисления интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$, и ее неопределенный интеграл.

▲ Так как $(2\sqrt{x})' = 1/\sqrt{x}$, $x > 0$, то
$$F(x) = 2\sqrt{x}, \quad x > 0,$$
и
$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C, \quad x \in (0; +\infty). \ ▲$$

Пример 2. Для функции $f(x) = 1/x$, $x \in (-\infty; 0)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(-2; 2)$.

▲ Так как $(\ln|x|)' = 1/x$, то $\ln|x|$ — одна из первообразных функции $f(x) = 1/x$ и, следовательно, искомая первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = \ln|x| + C$, где C — некоторая постоянная. Постоянную C

находим из условия $F(-2)=2$, т. е. $\ln 2 + C = 2$, откуда $C = 2 - \ln 2$. Таким образом,

$$F(x) = \ln|x| + 2 - \ln 2 = \ln|x/2| + 2. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Найти $\int (x - 2e^x)\,dx$.

$\blacktriangle$ Используя свойства 4 и 3 неопределенного интеграла и табличные интегралы 1 (при $\alpha = 1$) и 3, получаем

$$\int (x - 2e^x)\,dx = \int x\,dx - 2\int e^x\,dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C, \quad x \in R. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x}\,dx$.

$$\blacktriangle \int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x}\,dx = \int dx - 4\int x^{-1/6}\,dx + 4\int x^{-1/3}\,dx =$$
$$= x - \frac{24}{5}x^{5/6} + 6x^{2/3} + C, \quad x > 0. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}$.

$$\blacktriangle \int \frac{dx}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{x^2 + 4 - x^2}{x^2(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C, \quad x \neq 0. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Найти $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx$.

$$\blacktriangle \int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$$
$$= \ln(x + \sqrt{x^2+3}) - 3\ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C, \quad |x| > \sqrt{3}. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$.

$$\blacktriangle \int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C, \quad x \in R. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

$\blacktriangle$ На каждом интервале, где определена подынтегральная функция, получаем

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\int 3^x \cdot 5^{2x}\,dx$.

$$\blacktriangle \int 3^x \cdot 5^{2x}\,dx = \int 75^x\,dx = \frac{75^x}{\ln 75} + C, \quad x \in R. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Найти интеграл:

1) $\int (3x-5)^{10}\,dx$; 2) $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; 3) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

4) $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$, $|x|<\frac{\pi}{2}$; 5) $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$; 6) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}\,dx$.

▲ 1) Найдем интеграл с помощью формулы (2), предварительно преобразовав его следующим образом:

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}(3x-5)'\,dx.$$

Положив в формуле (2) $t=\varphi(x)=3x-5$ и $f(t)=t^{10}$, получим

$$\frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}(3x-5)'\,dx = \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt\Big|_{t=3x-5}.$$

Таким образом,

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C\Big|_{t=3x-5} = \frac{1}{33}(3x-5)^{11}+C.$$

Замечание. Обычно, пользуясь формулой (2), в записи решения для краткости опускают знак подстановки $|_{t=\varphi(x)}$. Например, вычисление данного интеграла проводят так:

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}\,d(3x-5) =$$
$$= \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt = \frac{t^{11}}{33}+C = \frac{(3x-5)^{11}}{33}+C.$$

2) По формуле (2), положив в ней $t=\varphi(x)=5x^3+1$, $f(t)=\sqrt[5]{t}$, получаем

$$\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}\,(5x^3+1)'\,dx =$$
$$= \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}\,d(5x^3+1) = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{18}\sqrt[5]{t^6}+C = \frac{1}{18}(5x^3+1)\sqrt[5]{5x^3+1}+C.$$

3) $$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C.$$

4) $$\int \frac{dx}{2+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin^2 x} = \int \frac{1}{3+2\operatorname{tg}^2 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{d\operatorname{tg} x}{3+2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

5) $$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\int \frac{dx^8}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\arcsin x^8+C.$$

6) $$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}\,dx = \int \frac{1+1/x^2}{\sqrt{x^2-7+1/x^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{d(x-1/x)}{\sqrt{(x-1/x)^2-5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 7 + \frac{1}{x^2}}\right| + C. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Найти интеграл:

$$1) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

▲ 1) Воспользуемся формулой (3) интегрирования заменой переменной. Подынтегральная функция определена на промежутке $x \geqslant 0$. Сделаем замену переменной $x = t^2$, $t \geqslant 0$. Согласно формуле (3), положив в ней

$$x = \varphi(t) = t^2, \quad f(x) = 1/(2+\sqrt{x}),$$

получим

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{1}{2+\sqrt{t^2}}(t^2)'\,dt = \int \frac{2t}{2+t}\,dt = 2\int \frac{2+t-2}{2+t}\,dt =$$

$$= 2t - 4\ln|2+t| + C = 2\sqrt{x} - 4\ln|2+\sqrt{x}| + C.$$

2) Сделаем замену переменной, положив $x = 1/t$; тогда

$$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^2\sqrt{1+1/t^2}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\int d(\sqrt{t^2+1}) =$$

$$= -\sqrt{t^2+1} + C = -\sqrt{1/x^2+1} + C.$$

3) Положим $e^x + 1 = t^2$, $t > 0$; тогда

$$e^x\,dx = 2t\,dt \quad \text{и} \quad dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Найти интеграл:

$$1) \int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx; \quad 2) \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx.$$

▲ 1) Представим подынтегральную функцию в виде линейной комбинации двух рациональных дробей так, чтобы числителем первой дроби была производная знаменателя $x^2 - x + 1$, а числителем второй дроби — единица:

$$\frac{3x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Интеграл от каждого слагаемого легко вычисляется:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + C_1,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1/2)}{(x-1/2)^2+3/4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_2.$$

Таким образом,

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

2) Представим подынтегральную функцию в виде линейной комбинации двух дробей так, чтобы числителем первой дроби была производная квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, а числителем второй дроби — единица:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}.$$

Теперь интеграл легко вычисляется:

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx=-\frac{3}{2}\int(-x^2+6x-8)^{-1/2}d(-x^2+6x-8)+$$
$$+13\int\frac{d(x-3)}{1-(x-3)^2}=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C.\ \blacktriangle$$

Пример 13. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

▲ 1-й способ:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2-й способ:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)}=\int\frac{d(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)}=\int\frac{d\operatorname{tg}(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)}=$$
$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.\ \blacktriangle$$

Пример 14. Найти интеграл:

1) $\displaystyle\int\ln x\,dx$; 2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$.

▲ 1) Положим $u=\ln x$, $dv=dx$; тогда

$$du=dx/x,\quad v=x.$$

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$$

2) Положим $u=x$, $dv=\sin x\,dx$; тогда

$$du=dx,\quad v=-\cos x,$$

и, согласно формуле (4),

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.\ \blacktriangle$$

Пример 15. Найти интеграл:

1) $\int x^2 e^x\,dx$; 2) $\int \arccos^2 x\,dx$.

▲ 1) Положим $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$; тогда

$$du = 2x\,dx, \quad v = e^x.$$

По формуле (4) имеем

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx.$$

К полученному интегралу снова применим формулу интегрирования по частям. Положив $u = 2x$, $dv = e^x\,dx$, найдем

$$du = 2\,dx, \quad v = e^x.$$

Следовательно,

$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C.$$

Поэтому

$$\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Замечание. Решение этого примера можно записать короче:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

2) Пусть $u = \arccos^2 x$, $dv = dx$; тогда

$$du = -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad v = x.$$

Согласно формуле (4)

$$\int \arccos^2 x\,dx = x\arccos^2 x + 2\int \frac{x\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для вычисления полученного интеграла еще раз воспользуемся формулой (4), положив

$$u = \arccos x, \quad dv = x\,dx/\sqrt{1-x^2}.$$

Тогда

$$du = -dx/\sqrt{1-x^2},$$

и, вычислив интеграл

$$v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + C_1,$$

возьмем $v = -\sqrt{1-x^2}$. В результате получим

$$\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\arccos x - \int dx = -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C_2.$$

Итак, $\int \arccos^2 x\,dx = x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C$. ▲

Пример 16. Найти интеграл $J = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a \neq 0$.

▲ Положим $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$; тогда

$$du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = x.$$

По формуле (4) получаем

$$J = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Запишем подынтегральную функцию последнего интеграла в виде

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2};$$

тогда будем иметь

$$J = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - J.$$

Таким образом, с помощью формулы интегрирования по частям получено уравнение, из которого J легко определяется:

$$J = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C. \ ▲$$

Пример 17. Получить для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in N, \quad a \neq 0,$$

рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n\right).$$

▲ Используем формулу интегрирования по частям для интеграла J_n. Положим

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx.$$

Тогда

$$du = \frac{-2nx\,dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x,$$

и, следовательно,

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}.$$

Прибавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции полученного интеграла:

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\,dx.$$

Записав последний интеграл в виде разности интегралов, получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

откуда
$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right).$$
Так как
$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$
то, положив в полученной формуле $n=1$, можно найти J_2. Зная J_2, можно найти J_3 и т. д. ▲

ЗАДАЧИ

1. Для функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$:

1) $f(x) = 1/(2\sqrt{x}) + \sin(x+1)$, $x \in (0; +\infty)$, $(1; 1)$;
2) $f(x) = 2/x - 3/x^2$, $x \in (-\infty; 0)$, $(-1; 1)$;
3) $f(x) = |x|$, $x \in R$, $(-2; 4)$.

2. Найти интеграл:

1) $\displaystyle\int x(x+1)(x-2)\,dx$; 2) $\displaystyle\int (x^2-1)^2\,dx$;

3) $\displaystyle\int \left(\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}\right)dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\,dx$; 5) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{7+x^2}$; 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-5}$; 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}$; 9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+13}$;

10) $\displaystyle\int (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{x^2})^3\,dx$; 11) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$;

12) $\displaystyle\int 2^{2x}e^x\,dx$; 13) $\displaystyle\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$; 14) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-x^4}$; 15) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

16) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 17) $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x\,dx$; 18) $\displaystyle\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

3. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой оси. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) если $f(x)$ — периодическая функция, то и $F(x)$ — периодическая функция;
2) если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция;
3) если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция.

4. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ не имеет на всей числовой оси ни одной первообразной.

5. Привести пример разрывной функции, для которой на всей числовой оси первообразная существует.

6. Найти все первообразные функции:

1) $x|x|$, $x \in R$; 2) $|1+x| - |1-x|$, $x \in R$;
3) $(2x-3)|x-2|$, $x \in R$; 4) $e^{|x|}$, $x \in R$; 5) $|\operatorname{sh} x|$, $x \in R$;

6) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{если } |x|\leqslant 1,\\ 1-|x|, & \text{если } |x|>1;\end{cases}$ 7) $\max(1;\, x^2)$, $x\in R$;

8) $[x]\cdot|\sin\pi x|$, $x\in[0;\,+\infty)$.

7. Найти интеграл ($a\neq 0$):

1) $\int e^{ax}\,dx$; 2) $\int \sin(ax+b)\,dx$; 3) $\int (ax+b)^{\alpha}\,dx$;

4) $\int \sin^2(ax+b)\,dx$; 5) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,dx$;

6) $\int \sin ax\sin(ax+b)\,dx$.

8. Найти интеграл:

1) $\int \frac{dx}{7x^2+5}$; 2) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

4) $\int \frac{dx}{15x^2-34x+15}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}$.

9. Доказать равенство

$$\int (\varphi(x))^{\alpha}\cdot\varphi'(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, & \text{если } \alpha\neq -1,\\ \ln|\varphi(x)|+C, & \text{если } \alpha=-1.\end{cases}$$

Найти интеграл (10–16).

10. 1) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}\,dx$; 2) $\int \frac{3x-2}{2-3x+5x^2}\,dx$;

3) $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$; 4) $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx$; 5) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$;

6) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$; 7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$;

8) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$; 9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+7x^2}}$;

10) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$, $x>2$; 11) $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$;

12) $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$.

11. 1) $\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^2}$; 2) $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$; 3) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^{12}}$;

4) $\int \frac{x^5\,dx}{x+1}$; 5) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}\,dx$; 6) $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$;

7) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; 8) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.

12. 1) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$; 2) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$; 3) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$;

4) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$; 5) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 7) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

8) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$; 9) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 10) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

13. 1) $\int xe^{-x^2}\,dx$; 2) $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}$;
4) $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$; 5) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 6) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;
8) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$; 9) $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$; 10) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$; 11) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$;
12) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; 13) $\int \frac{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,dx$; 14) $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x\,dx}{\operatorname{ch}^6 x}$.

14. 1) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$; 3) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\,dx$;
4) $\int \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{x^2-1}$; 5) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 6) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

15. 1) $\int \sin^6 x\cos x\,dx$; 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$; 3) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$;
4) $\operatorname{ctg} x\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{\cos x}$; 6) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$, $|x|<\frac{\pi}{2}$;
7) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 8) $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x\,dx$; 9) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$;
10) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; 11) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$; 12) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$;
13) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}$; 14) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}}$;
15) $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sin^2 x}$; 16) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}$; 17) $\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$;
18) $\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$; 19) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}\,dx$; 20) $\frac{\cos x}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}\,dx$.

16. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$; 2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$; 3) $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$;
4) $\int \frac{\ln\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\,dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$; 6) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}\,dx$;
7) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$; 8) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x}\,dx$.

17. Найти интеграл:
1) $\int xe^{-x}\,dx$; 2) $\int x\,2^x\,dx$; 3) $\int x\operatorname{sh} x\,dx$; 4) $\int x\ln x\,dx$;
5) $\int \ln(x+\sqrt{4+x^2})\,dx$; 6) $\int x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|dx$;
7) $\int x^\alpha\ln x\,dx$, $\alpha\in R$; 8) $\int (x^2-2x+3)\ln(x+1)\,dx$.

18. С помощью формулы интегрирования по частям найти интеграл:

1) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$.

Найти интеграл (19–21).

19. 1) $\displaystyle\int x\cos(5x-7)\,dx$; 2) $\displaystyle\int x\sin^2\,dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

4) $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^2 2x\,dx$; 5) $\displaystyle\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}\,dx$; 6) $\displaystyle\int \sin x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x\,dx$.

20. 1) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$; 2) $\displaystyle\int \arccos(5x-2)\,dx$; 3) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$;

4) $\displaystyle\int x^2\arcsin 2x\,dx$; 5) $\displaystyle\int x^3\mathrm{arctg}\,x\,dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$;

7) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$; 8) $\displaystyle\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 9) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$;

10) $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

21. 1) $\displaystyle\int (x^2-6x+2)e^{3x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int x^2 2^x\,dx$; 3) $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx$;

4) $\displaystyle\int (x^2-x+1)\mathrm{ch}\,x\,dx$; 5) $\displaystyle\int (x^2+1)^2\cos x\,dx$; 6) $\displaystyle\int x^5\sin 5x\,dx$.

22. Доказать формулу ($P_n(x)$ — многочлен степени n, $a\neq 0$):

1) $$\int P_n(x)e^{ax}\,dx = \left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \ldots + (-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n}\right)\frac{e^{ax}}{a} + C;$$

2) $$\int P_n(x)\sin ax\,dx = -\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots\right)\frac{\cos ax}{a} + \left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \ldots\right)\frac{\sin ax}{a} + C;$$

3) $$\int P_n(x)\cos ax\,dx = \left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots\right)\frac{\sin ax}{a} + \left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \ldots\right)\frac{\cos ax}{a} + C.$$

Найти интеграл (23, 24).

23. 1) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$; 3) $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$;

4) $\displaystyle\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; 5) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,dx$; 6) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$.

24. 1) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$; 2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $a^2+b^2\neq 0$; 4) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $a^2+b^2\neq 0$;

5) $\displaystyle\int 3^x\cos x\,dx$; 6) $\displaystyle\int e^{3x}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; 7) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{ch}\,x\,dx$;

8) $\displaystyle\int\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)^2 dx$; 9) $\displaystyle\int e^{ax}\sin^2 bx\,dx$; 10) $\displaystyle\int xe^x\sin x\,dx$;

11) $\displaystyle\int x^2e^x\cos x\,dx$; 12) $\displaystyle\int xe^x\sin^2 x\,dx$; 13) $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx$;

14) $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx$; 15) $\displaystyle\int x^2\sin\ln x\,dx$; 16) $\displaystyle\int e^{\arccos x}\,dx$.

25. Получить для интеграла J_n $(n\in N)$ рекуррентную формулу:

1) $J_n=\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx$, $a\neq 0$; 2) $J_n=\displaystyle\int \ln^n x\,dx$;

3) $J_n=\displaystyle\int x^\alpha \ln^n x\,dx$, $\alpha\neq -1$; 4) $J_n=\displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$, $n>2$;

5) $J_n=\displaystyle\int \sin^n x\,dx$, $n>2$; 6) $J_n=\displaystyle\int \cos^n x\,dx$, $n>2$;

7) $J_n=\displaystyle\int \operatorname{sh}^n x\,dx$, $n>2$; 8) $J_n=\displaystyle\int \operatorname{ch}^n x\,dx$, $n>2$;

9) $J_n=\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $n>2$; 10) $J_n=\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x}$, $n>2$.

Найти интеграл (26–28).

26. 1) $\displaystyle\int x^8e^{-x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \ln^4 x\,dx$; 3) $\displaystyle\int x^3\ln^3 x\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{x^2+9}}$;

5) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$; 6) $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^7 x}$.

27. 1) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; 3) $\displaystyle\int x^2e^{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{x\ln x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 6) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$; 7) $\displaystyle\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$;

8) $\displaystyle\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$; 9) $\displaystyle\int \cos^2\ln x\,dx$; 10) $\displaystyle\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx$;

11) $\displaystyle\int \cos x\cdot\ln(1+\sin^2 x)\,dx$; 12) $\displaystyle\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$.

28. 1) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x^2\,dx$; 2) $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{arctg} e^x\,dx$; 3) $\displaystyle\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx$; 5) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$; 6) $\displaystyle\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

29. Найти функции $f(x)$, $x\in(0;+\infty)$, удовлетворяющие условию $f'(x^2)=1/x$, $x>0$.

30. Найти функции $f(x)$, $x\in R$, удовлетворяющие условию

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x\in(0;1],\\ x, & \text{если}\quad x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

31. Найти функции $f(x)$, $x\in(0;+\infty)$ и $g(x)$, $x\in R$, удовлетворяющие условиям

$$xf'(x^2)+g'(x)=\cos x-3x^3,\quad f(x^2)+g(x)=\sin x-x^4.$$

32. Найти функцию $f(x)$, $x\in(0;+\infty)$ и $g(x)$, $x\in R$, удовлетворающую при $x > 0$ условиям:

1) $f(x) + g(x) = x + 1, \quad f'(x) - g'(x) = 0,$
$$f'(2x) - g'(-2x) = 1 - 12x^2;$$

2) $f(x) + g(x) = x^4/6, \quad f'(x) - g'(x) = \sin x, \quad f'(2x) - g'(-2x) = 0.$

ОТВЕТЫ

1. 1) $\sqrt{x} - \cos(x+1) + \cos 2$; 2) $\ln|x| + 3/x + 4$; 3) $x|x|/2 + 6$.

2. 1) $x^4/3 - x^3/3 - x^2 + C$; 2) $x^5/5 - 2x^3/3 + x + C$;
3) $-\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 2\ln|x| + C$; 4) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$;
5) $\dfrac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7}} + C$;
7) $\dfrac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{5}}{x\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right| + C$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{7}}\right| + C$;
9) $\ln(x + \sqrt{x^2+13}) + C$; 10) $16x - \dfrac{36}{5}\sqrt[3]{4x^5} + \dfrac{18}{7}\sqrt[3]{2x^7} - \dfrac{x^3}{3} + C$;
11) $\arcsin\dfrac{x}{2} + 2\ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C$; 12) $\dfrac{2^{2x}e^x}{1+2\ln 2} + C$;
13) $-\dfrac{1}{5^x\ln 5} - \dfrac{1}{2^x\ln 2} + C$; 14) $\dfrac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right| - \dfrac{1}{3x} + C$;
15) $x/2 - (\sin x)/2 + C$; 16) $-\operatorname{ctg} x - x + C$; 17) $x - \operatorname{th} x + C$;
18) $x - \operatorname{cth} x + C$.

3. 1) Неверно; 2) верно; 3) неверно.

5. Указание. См. [1, задачу 13.173], $\alpha = 2$.

6. 1) $\dfrac{|x|^3}{3} + C$; 2) $\dfrac{(1+x)|1+x|}{2} + \dfrac{(1-x)|1-x|}{2} + C$;

3) $F(x) = \begin{cases} -(2/3)x^3 + (7/2)x^2 - 6x + C, & \text{если} \quad x < 2, \\ (2/3)x^3 - (7/2)x^2 + 6x - 20/3 + C, & \text{если} \quad x \geqslant 2; \end{cases}$

4) $F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 2 + C, & \text{если} \quad x < 0, \\ e^x + C, & \text{если} \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

5) $F(x) = \begin{cases} 1 - \operatorname{ch} x + C, & \text{если} \quad x < 0, \\ \operatorname{ch} x - 1 + C, & \text{если} \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

6) $F(x) = \begin{cases} x - x^3/3 + C, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \\ x - x|x|/2 + (1/6)\operatorname{sign} x + C, & \text{если} \quad |x| > 1; \end{cases}$

7) $F(x) = \begin{cases} x + C, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \\ (x^3 + 2\operatorname{sign} x)/3 + C, & \text{если} \quad |x| > 1; \end{cases}$

8) $([x]/\pi)([x] - (-1)^{[x]}\cos\pi x) + C$.

7. 1) $\dfrac{1}{a}e^{ax} + C$; 2) $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$;

3) $\frac{1}{a(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1}+C$, если $\alpha\neq-1$, $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$, если $\alpha=-1$;

4) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin 2(ax+b)+C$; 5) $\frac{x\cos 2b}{2}+\frac{\sin 2ax}{4a}+C$;

6) $\frac{x\cos b}{2}+\frac{\sin(2x+b)}{4a}+C$.

8. 1) $\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{5}}x\right)+C$; 2) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{1-3x}\right|+C$;

3) $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$; 4) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{3x-5}{5x-3}\right|+C$;

5) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$;

7) $\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$; 8) $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C$.

10. 1) $\ln|3x^2-7x+1|+C$;

2) $\frac{3}{10}\ln(2-3x+5x^2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$;

3) $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$;

4) $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)-\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$;

5) $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$;

6) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3})+C$;

7) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$;

8) $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}+C$;

9) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3+7x^2}+\sqrt{3}}{|x|}+C$; 10) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$;

11) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C$;

12) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C$.

11. 1) $\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1}+C$; 2) $-\frac{1}{15}(x^5+2)^{-3}+C$;

3) $\frac{1}{11}(1-x)^{-11}-\frac{1}{10}(1-x)^{-10}+C$;

4) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$; 5) $\ln|x^3-x+1|+C$;

6) $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$;

8) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+C$.

12. 1) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C$; 2) $\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C$;

3) $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$;
4) $\frac{2}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)\sqrt{x-1}+C$;
5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$;
6) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$; 7) $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$;
8) $-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}+C$; 9) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$; 10) $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C$.

13. 1) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 2) $\frac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}+C$; 3) $x-\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$;
4) $-x-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+2\ln(1+\sqrt{e^x})+C$; 5) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 6) $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$;
7) $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1}+C=-2\arcsin e^{-x/2}+C_1$;
8) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})+C$; 9) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$;
10) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(1+e^x)^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(1+e^x)^3}+C$; 11) $\ln|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}|+C$;
12) $2\,\mathrm{arctg}\,e^x+C$; 13) $\frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2x-\ln(1+\mathrm{ch}^2x))+C$;
14) $\frac{1}{3}\mathrm{th}^3x-\frac{1}{5}\mathrm{th}^5x+C$.

14. 1) $\frac{1}{3}\ln^3x+C$; 2) $\ln|\ln\ln x|+C$;
3) $\ln x-\ln 2\cdot\ln|\ln x+2\ln 2|+C$;
4) $-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$; 5) $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$;
6) $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}}+C$.

15. 1) $\frac{1}{7}\sin^7x+C$; 2) $-\ln(1+\cos x)+C$; 3) $-\sin\frac{1}{x}+C$;
4) $\ln|\sin x|+C$; 5) $\ln|\mathrm{tg}\,(x/2+\pi/4)|+C$;
6) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}}+C$, $|x|<\frac{\pi}{2}$; 7) $-2\cos\sqrt{x}+C$;
8) $2\left(\frac{1}{11}\sin^4x-\frac{2}{7}\sin^2x+\frac{1}{3}\right)\sqrt{\sin^3x}+C$;
9) $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5x}-2\sqrt{\cos x}+C$; 10) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$;
11) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|+C$; 12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C$;
13) $\frac{1}{8}\sqrt{25\sin^2x+9\cos^2x}+C$; 14) $\sqrt{2\sin^2x-1}+C$;
15) $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\mathrm{ctg}^3x}+C$;
16) $-\ln(2+\cos x+\sqrt{\cos^2x+4\cos x+1})+C$;
17) $\sin\ln x+C$; 18) $\frac{1}{4}\ln^2\mathrm{tg}\,x+C$; 19) $e^{\mathrm{tg}\,x}+\ln|\mathrm{tg}\,x|+C$;
20) $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1}+C=-2\arcsin e^{-(\sin x)/2}+C_1$.

16. 1) $\ln|\arcsin x| + C$; 2) $\frac{2}{3}\arcsin^{3/2} x + C$; 3) $-\frac{1}{6}\arccos^3 2x + C$;
4) $-\frac{1}{2}\ln^2 \arccos x + C$; 5) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + C$; 6) $-\frac{3}{4}\operatorname{arcctg}^{4/3} x + C$;
7) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C$; 8) $\operatorname{arctg}^2 e^x + C$.

17. 1) $-e^{-x}(x+1) + C$; 2) $\frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{\ln^2 2} + C$; 3) $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$;
4) $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$; 5) $x\ln(x + \sqrt{x^2+4}) - \sqrt{x^2+4} + C$;
6) $\frac{x^2}{2}\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{x}{2} + C$;
7) $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + C$, если $\alpha \neq -1$, $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$, если $\alpha = -1$;
8) $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{13}{3}\right)\ln(x+1) - \frac{x^3}{9} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{3}x + C$.

18. 1) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right) + C$; 2) $\frac{1}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{2x}{4+x^2}\right) + C$.

19. 1) $\frac{x}{5}\sin(5x-7) + \frac{1}{25}\cos(5x-7) + C$;
2) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$; 3) $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$;
4) $\frac{x}{2}\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| - \frac{x^2}{2} + C$; 5) $-x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$;
6) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln\operatorname{tg} x + C$.

20. 1) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;
2) $\frac{1}{5}((5x-2)\arccos(5x-2) - \sqrt{-25x^2+20x-3}) + C$;
3) $\frac{x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x}{2} + C$; 4) $\frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2} + C$;
5) $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C$; 6) $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C$;
7) $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$; 8) $-x - \sqrt{1-x^2}\arccos x + C$;
9) $\frac{x}{9}(3-x^2) - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\arcsin x + C$;
10) $4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}\arcsin(x/2) + C$.

21. 1) $\left(x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{38}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3} + C$; 2) $\left(\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2}\right)2^x + C$;
3) $\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C$;
4) $(x^2 - x + 3)\operatorname{sh} x - (2x-1)\operatorname{ch} x + C$;
5) $(x^4 - 10x^2 + 21)\sin x + 4x(x^2-5)\cos x + C$;
6) $\left(-x^5 + \frac{4x^3}{5} - \frac{24x}{125}\right)\frac{\cos 5x}{5} + \left(x^4 - \frac{12x^2}{25} - \frac{24}{625}\right)\frac{\sin 5x}{5} + C$.

23. 1) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$;
2) $-\frac{8}{27}x^{-3/2}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x + 3\ln x + 2\right) + C$;

3) $-\dfrac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\dfrac{3}{2}\ln^2 x+\dfrac{3}{2}\ln x+\dfrac{3}{4}\right)+C$;
4) $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$;
5) $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;
6) $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

24. 1) $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\dfrac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$;
2) $\dfrac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\dfrac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$;
3) $\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$; 4) $\dfrac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$;
5) $\dfrac{\sin x+(\ln 3)\cos x}{1+\ln^2 3}3^x+C$; 6) $\dfrac{\sin 2x-5\cos 2x}{13\sqrt{2}}e^{3x}+C$;
7) $\dfrac{\sin x\operatorname{sh} x-\cos x\operatorname{ch} x}{2}+C$; 8) $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-2}{8}e^{-2x}+C$;
9) $\dfrac{a^2+4b^2-a^2\cos 2bx-2ab\sin 2bx}{2a(a^2+4b^2)}e^{ax}+C$;
10) $\dfrac{x\sin x+(1-x)\cos x}{2}e^x+C$;
11) $\dfrac{(x-1)^2\sin x+(x^2-1)\cos x}{2}e^x+C$;
12) $\dfrac{(4-10x)\sin 2x-(5x+3)\cos 2x+25(x-1)}{50}e^x+C$;
13) $\dfrac{(\sin\ln x-\cos\ln x)x}{2}+C$; 14) $\dfrac{(\sin\ln x+\cos\ln x)x}{2}+C$;
15) $\dfrac{(3\sin\ln x-\cos\ln x)x^3}{10}+C$; 16) $\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arccos x}+C$.

25. 1) $J_n=\dfrac{1}{a}x^n e^{ax}-\dfrac{n}{a}J_{n-1}$; 2) $J_n=x\ln^n x-nJ_{n-1}$;
3) $J_n=\dfrac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1}-\dfrac{n}{\alpha+1}J_{n-1}$;
4) $J_n=\dfrac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n}-\dfrac{n-1}{n}aJ_{n-2}$;
5) $J_n=-\dfrac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$;
6) $J_n=\dfrac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$;
7) $J_n=\dfrac{\operatorname{ch} x\operatorname{sh}^{n-1}x}{n}-\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$;
8) $J_n=-\dfrac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^{n-1}x}{n}+\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$;
9) $J_n=-\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}J_{n-2}$;
10) $J_n=\dfrac{\operatorname{sh} x}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}J_{n-2}$.

26. 1) $-(x^8+8x^7+8\cdot 7x^6+8\cdot 7\cdot 6x^5+\ldots+8!\,x+8!)e^{-x}+C$;
2) $(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24)x+C$;

3) $\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right)\frac{x^4}{4} + C$;

4) $\frac{1}{16}\left(\left(\frac{8}{3}x^5 - 30x^3 + 405x\right)\sqrt{x^2+9} - 3645\ln(x + \sqrt{x^2+5})\right) + C$;

5) $\frac{3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8}{15}\sin x + C$;

6) $-\frac{8\sin^4 x + 10\sin^2 x + 15}{96}\sin 2x + \frac{5x}{16} + C$;

7) $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

8) $\frac{\operatorname{sh} x}{6\operatorname{ch}^6 x} + \frac{5\operatorname{sh} x}{24\operatorname{ch}^4 x} + \frac{5\operatorname{sh} x}{16\operatorname{ch}^2 x} + \frac{5}{8}\operatorname{arctg} e^x + C$.

27. 1) $-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C$; 2) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$;

3) $2(x^{5/2} - 5x^2 + 20x^{3/2} - 60x + 120x^{1/2} - 120)e^{\sqrt{x}} + C$;

4) $(\ln\ln x - 1)\ln x + C$; 5) $\sqrt{x^2+1}\ln\frac{x}{e} - \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + C$;

6) $2\sqrt{x+1}(\ln(x^2-1) - 4) - 4\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} + C$;

7) $2(2-x)\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + C$;

8) $\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x}) + C$;

9) $\frac{x}{10}(5 + \cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x)) + C$;

10) $-(x + \operatorname{ctg} x\cdot\ln(e\sin x)) + C$;

11) $\sin x\ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x + 2\operatorname{arctg}\sin x + C$; 12) $\frac{x-2}{x+2}e^x + C$.

28. 1) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$;

2) $-x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + C$;

3) $-\frac{1}{2}(\operatorname{sign} x)\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} + C$;

4) $2\sqrt{x+1}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C$;

5) $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$;

6) $-2\operatorname{sign}(1-x)\sqrt{x} + (1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} + C$.

29. $f(x) = 2\sqrt{x} + C$. **30.** $f(x) = \begin{cases} x+1+C, & \text{если } x \leqslant 0,\\ e^x + C, & \text{если } x > 0.\end{cases}$

31. $f(x) = C - x^2/2$, $g(x) = \sin x - x^4/2 - C$.

32. 1) $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - C$, $g(x) = \begin{cases} x/2 + C, & \text{если } x > 0,\\ x/2 - x^3 + C, & \text{если } x \geqslant 0;\end{cases}$

2) $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\cos x}{2} + C$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{12} + \frac{\cos x}{2} - C, & \text{если } x > 0,\\ \frac{x^4}{12} - \frac{\cos x}{2} + 1 - C, & \text{если } x \geqslant 0.\end{cases}$

§ 2. Интегрирование рациональных функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Интегрирование элементарных дробей.

Каждая рациональная функция на каждом промежутке, принадлежащем ее области определения, представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. [1, § 6])

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad p^2-4q<0.$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к разложению рациональной функции на элементарные дроби и к интегрированию элементарных дробей и многочленов.

Интегрирование элементарных дробей производится следующим образом:

1) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1;$

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2+q-p^2/4} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C;$$

4) $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$
$$= \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^n}, \quad n>1.$$

Последний интеграл линейной подстановкой $t = x + p/2$ приводится к интегралу J_n, для которого в примере 17 из § 1 получена рекуррентная формула.

Из формул 1)–4) следует, что интеграл от элементарной дроби выражается через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Поэтому неопределенный интеграл от любой рациональной функции на всяком промежутке, принадлежащем ее области определения, является элементарной функцией, представимой в виде алгебраической суммы композиций рациональных функций, логарифмов и арктангенсов.

2. Метод Остроградского. Если знаменатель правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные, то интегрирование такой дроби обычно связано с громоздкими выкладками. В этом случае целесообразно пользоваться следующей *формулой Остроградского*:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ — многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ простые (однократные). Многочлен $Q_1(x)$ есть частное от деления многочлена $Q(x)$ на многочлен $Q_2(x)$, т. е. $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — это некоторые многочлены, степени которых соответственно меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Если корни $Q(x)$ известны, то тем самым известны многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределенными коэффициентами, которые находят после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского. Если $P_2 \not\equiv 0$, то, так как корни $Q_2(x)$ простые, интеграл $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$ есть функция трансцендентная; она равна сумме слагаемых вида

$$a\,\mathrm{arctg}\,(\alpha x + \beta) + b\ln(\gamma + \delta) + C, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

В связи с этим второе слагаемое в формуле Остроградского называют *трансцендентной частью* интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, а первое слагаемое — его *рациональной частью*. Метод Остроградского позволяет найти алгебраическую часть интеграла от правильной рациональной дроби чисто алгебраическим путем, т. е. не прибегая к интегрированию каких-либо функций.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

▲ Знаменатель рациональной дроби имеет простые корни $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Поэтому разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Из этого равенства рациональных дробей следует равенство многочленов:

$$x = A_1(x+2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x+2).$$

Полагая последовательно $x = -1$, $x = -2$, $x = 3$, находим

$$-1 = -4A_1, \quad -2 = 5A_2, \quad 3 = 20A_3,$$

т. е.

$$A_1 = 1/4, \quad A_2 = -2/5, \quad A_3 = 3/20.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + C. \ ▲$$

Пример 2. Найти $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx$.

▲ Подынтегральная функция — неправильная рациональная дробь. Разделив многочлен $P(x) = 2x^4+5x^2-2$ на многочлен $Q(x) = 2x^3-x-1$, получим частное $T(x) = x$ и остаток $R(x) = 6x^2+x-2$. Следовательно, данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби следующим образом:

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}.$$

Многочлен $Q(x) = 2x^3-x-1$ имеет действительный корень $x = 1$. Разделив $Q(x)$ на $x-1$, получим

$$Q(x) = 2x^3-x-1 = (x-1)(2x^2+2x+1).$$

Трехчлен $2x^2+2x+1$ не имеет действительных корней, поэтому разложение полученной правильной рациональной дроби на элементарные имеет вид

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов:

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1) + (Mx+N)(x-1).$$

Положив здесь $x = 1$, получим $5 = 5A$, т. е. $A = 1$. Приравняв коэффициенты при x^2 и свободные члены многочленов, получим

$$6 = 2A + M, \quad -2 = A - N,$$

откуда $M = 4$, $N = 3$. Таким образом, подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,dx + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \operatorname{arctg}(2x+1) + C. \ ▲$$

Пример 3. Найти $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$.

▲ Разложение подынтегральной функции на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

По определению равенства рациональных дробей имеем

$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+3).$$

Из равенства многочленов следует, что их коэффициенты при одинаковых степенях x равны, поэтому

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 2 = A + C, \\ x^2 & 1 = -A + B + D, \\ x^1 & 5 = A - B + 3C, \\ x^0 & 1 = B + 3D. \end{array}$$

Эта система имеет решение: $A = 0,\ B = 1,\ C = 2,\ D = 0$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}$.

▲ Разложим знаменатель рациональной дроби на множители:

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x^3 + x^2 - x - 1) = x^2(x+1)(x^2-1) = \\ = x^2(x+1)^2(x-1).$$

Из полученного разложения следует, что подынтегральная функция разлагается на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов:

$$x^4 + 1 = Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + \\ + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1). \quad (1)$$

Положив в равенстве (1) поочередно $x = 0,\ x = 1,\ x = -1$, получим $B = -1,\ C = 1/2,\ E = -1$. Чтобы найти коэффициент A, продифференцируем обе части равенства (1) и затем положим в нем $x = 0$. При дифференцировании правой части будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x = 0$:

$$4x^3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + 2B(x^2-1) + \ldots$$

Отсюда при $x = 0$ имеем $0 = -A - B$, т. е. $A = 1$. Для определения коэффициента D поступаем аналогично: дифференцируем обе части равенства (1), причем выписываем только те слагаемые правой части, которые не обращаются в нуль при $x = -1$; получаем равенство

$$4x^3 = Dx^2(x-1) + 2Ex(x-1) + Ex^2 + \ldots,$$

из которого при $x = -1$ имеем

$$-4 = -2D + 4E + E,$$

откуда находим $D = -1/2$. Следовательно,

$$\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Использованный здесь прием отыскания коэффициентов A и D удобен в тех случаях, когда знаменатель рациональной дроби имеет кратные корни. ▲

Пример 5. Найти $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

▲ Разложение подынтегральной функции на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$4x^2-8x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + \\ + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2. \quad (2)$$

Приравняв соответствующие коэффициенты этих многочленов, можно получить систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными A, B, C, D, E, F и решить ее. Но проще поступить иначе. Положив в равенстве (2) $x=1$, найдем $B=-1$. Затем положим $x=i$, тогда будем иметь

$$-4-8i = (Ei+F)(i-1)^2 = 2E-2iF.$$

Приравняв действительные и мнимые части, получим $-4=2E$, $-8=-2F$, т. е. $E=-2$, $F=4$. Продифференцируем обе части равенства (2), причем будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=1$. Тогда получим

$$8x-8 = A(x^2+1)^2 + 2B(x^2+1)2x + \ldots$$

Отсюда при $x=1$ имеем $0=4A+8B$, т. е. $A=2$. Продифференцируем обе части равенства (2), выписывая только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=i$:

$$8x-8 = (Cx+D)(x-1)^2 2x + E(x-1)^2 + (Ex+F)2(x-1) + \ldots$$

Подставив в это равенство $x=i$, найдем последние 2 коэффициента: $C=-2$, $D=-1$. Таким образом,

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \\ = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2+1} - \int \frac{2x-4}{(x^2+1)^2}\,dx = \\ = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл находим по рекуррентной формуле (см. пример 17 из § 1):

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

Итак,

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x-1} + \frac{1+2x}{x^2+1} + C. \ ▲$$

Пример 6. Найти методом Остроградского интеграл примера 5.

▲ В этом случае многочлен $Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2$, поэтому

$$Q_2(x) = (x-1)(x^2+1), \quad Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x^2+1).$$

Следовательно, существуют многочлены второй степени

$$P_1(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \text{и} \quad P_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

для которых верно равенство

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

Рациональную дробь $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}$ удобно сразу представить в виде суммы элементарных дробей и переписать формулу Остроградского следующим образом:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1}\right) dx.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \\ = \frac{(x-1)(x^2+1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} + \\ + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

откуда следует равенство многочленов:

$$4x^2 - 8x = -4x^4 - 2Bx^3 + (A+B-3C)x^2 + 2(C-A)x - \\ - B - C + D(x-1)(x^2+1)^2 + (Ex+F)(x-1)^2(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему

$$\begin{array}{c|l} x^5 & 0 = D + E, \\ x^4 & 0 = -A - D + F - 2E, \\ x^3 & 0 = -2B + 2D + 2E - 2F, \\ x^2 & 4 = A + B - 3C - 2D - 2E + 2F, \\ x^1 & -8 = -2A + 2C + D + E - 2F, \\ x^0 & 0 = -B - C - D + F. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = 3$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = -2$, $F = 1$. Итак,

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \\ = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C. \ ▲$$

Замечание. Рассмотренный в этом параграфе метод интегрирования рациональных дробей является общим: с его помощью можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби при условии, что известны или могут быть найдены все корни ее знаменателя. Следует иметь в виду, что во многих частных случаях для интегрирования рациональной дроби нет необходимости прибегать к общему методу, так как другие приемы (преобразование подынтегрального выражения, подстановка, интегрирование по частям) быстрее ведут к цели.

Пример 7. Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{x(x^5+2)}$.

▲ $J = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{x^5(x^5+2)} = \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^5+2}\right)dx^5 = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+2}\right| + C.$ ▲

Пример 8. Найти интеграл $J = \int \frac{x+x^7}{1+x^4}\,dx$.

▲ $$J = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+(x^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{(1+x^4-1)\,d(1+x^4)}{1+x^4} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{4}(1+x^4) - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$$ ▲

ЗАДАЧИ

Найти интеграл (1–9).

1. 1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$; 3) $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$;
4) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$; 5) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\,dx$; 6) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$.

2. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$;
3) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$; 4) $\int \frac{(5x-3)\,dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$;
5) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$; 6) $\int \frac{(5x-14)\,dx}{x^3-x^2-4x+4}$; 7) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$;
8) $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$; 9) $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$;
10) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

3. 1) $\int \frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4}\,dx$; 2) $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$; 3) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$;
4) $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx$; 5) $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$; 6) $\int \frac{x^5\,dx}{x^4-2x^3+2x-1}$;
7) $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x-2)(x^2+x)^2}$; 8) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$; 9) $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$;
10) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$; 11) $\int \frac{x^5-x+1}{x^6-x^5}\,dx$;

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

4. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(4x^2+8x+7)}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^3+2}$; 5) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x+3)(x^2+x+1)}\,dx$;

6) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+1)\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$; 7) $\displaystyle\int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}\,dx$;

8) $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5}\,dx$.

5. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{1-x^4}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{(21x^2-13x+18)\,dx}{(3x^2-4x+6)(x^2-2x-3)}$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x+x^3-x^4}\,dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{(7x^2-1)\,dx}{x^4+4x^2-5}$;

7) $\displaystyle\int \frac{3x^3-8x^2+15x-5}{(x-1)^2(x^2-4x+8)}\,dx$; 8) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+11x-5}{(x+1)^2(x^2-4x+5)}\,dx$;

9) $\displaystyle\int \frac{4x^3-x^2-2x+1}{(2x+1)^2(x^2+x+2)}\,dx$; 10) $\displaystyle\int \frac{3x^3-8x^2+8x-1}{(x-3)(3x^2+x+2)}\,dx$;

11) $\displaystyle\int \frac{5x^2+7x+4}{(x+1)^2(2x^2+3x+2)}\,dx$; 12) $\displaystyle\int \frac{3x^3-5x^2+18x-9}{(x-3)^2(2x^2+2x+3)}\,dx$.

6. 1) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$; 3) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{(3x^2-2)\,dx}{9x^4-13x^2+4}$; 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$; 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{2n}+1}$; $n \in N$.

7. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; 2) $\displaystyle\int \frac{(3x^2-2)x\,dx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)}$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x^3+1)}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}\,dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^3-x+1}$; 6) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$;

7) $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)\,dx}{(x-1)(x^4-1)}$; 8) $\displaystyle\int \frac{(3x^2+2x+10)\,dx}{(x^3+x^2)(2x^2-4x+5)}$;

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$; 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

8. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{(x^7+2)\,dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$; 4) $\displaystyle\int \frac{(2x^2+2x+13)\,dx}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}$;

5) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\,dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+12x^2-20x+10}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$.

9. 1) $\displaystyle\int \frac{x(x-2)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$; 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$;

4) $\displaystyle\int \frac{(3x^4+4)\,dx}{x^2(x^2+1)^3}$; 5) $\displaystyle\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$; 6) $\displaystyle\int \frac{x(2x^2+2x-1)\,dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$;

7) $\displaystyle\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$; 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$;

9) $\displaystyle\int \frac{(1-4x^5)\,dx}{(1+x+x^5)^2}$; 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}+2x^6+x}$.

10. Найти рациональную часть интеграла:

1) $\displaystyle\int \frac{(x^6+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$; 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$; 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2x^2-3)^3}$; 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

11. Найти условие, при котором первообразная данной рациональной функции является функцией рациональной:

1) $\displaystyle\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n;

2) $\displaystyle\frac{ax^2+bx+c}{x^5-2x^4+x^3}$; 3) $\displaystyle\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{(ax^2+bx+c)^2}$, $a\neq 0$, $b^2\neq 4ac$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; 2) $\displaystyle\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C$;

3) $\displaystyle\ln(x^2+6x+13)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$; 4) $\displaystyle x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$;

5) $\displaystyle\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$;

6) $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+C$.

2. 1) $\displaystyle\frac{1}{12}\ln\frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C$; 2) $\displaystyle\frac{2}{5}\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$;

3) $\displaystyle\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C$; 4) $\displaystyle\frac{1}{15}\ln\frac{|(x-2)^7(3x-1)^3|}{(x+1)^{10}}+C$;

5) $\displaystyle\frac{1}{33}\ln\left|\frac{(3x+1)^9(2x-3)^2}{x^{11}}\right|+C$; 6) $\displaystyle\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|+C$;

7) $\displaystyle\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$; 8) $\displaystyle\frac{1}{12}\ln\frac{(x+1)^4|x-2|^5}{(x-1)^4|x+2|^5}+C$;

9) $\displaystyle\frac{1}{60}\ln\frac{(x-3)^2|x+2|^3}{(x+3)^2|x-2|^3}+C$;

10) $\displaystyle\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}{x+2}\right|+C$.

3. 1) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 30x - \dfrac{27}{x-2} + 72\ln|x-2| + C$;

2) $\dfrac{3}{2}(x+1)^{-1} + \dfrac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3| + C$;

3) $-\dfrac{1}{2}(x-1)^{-1} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + C$; 4) $-(x-1)^{-2} + \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + C$;

5) $x - \dfrac{8(9x^2+12x+5)}{3(x+1)^3} - 8\ln|x+1| + C$;

6) $\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{9}{4}(x-1)^{-1} - \dfrac{1}{4}(x-1)^{-2} + \dfrac{1}{8}\ln|(x-1)^{31}(x+1)| + C$;

7) $-\dfrac{1}{2}x^{-1} - \dfrac{2}{3}(x+1)^{-1} + \dfrac{1}{36}\ln\left|\dfrac{(x-2)(x+1)^{44}}{x^{45}}\right| + C$;

8) $\dfrac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2} - \dfrac{3}{625}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right| + C$;

9) $\dfrac{x^3+x}{8(1-x^2)^2} - \dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$;

10) $\dfrac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C$;

11) $\dfrac{x^{-4}}{4} + \ln|x-1| + C$; 12) $-\dfrac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + \dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + C$.

4. 1) $\dfrac{1}{14}\ln\dfrac{x^2+4x+4}{4x^2+8x+7} + \dfrac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+2}{\sqrt{3}} + C$;

2) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

3) $\dfrac{3}{2}\ln(x^2+2) - 2\ln|x-1| + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$;

4) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}\ln|x^3+2| + C$;

5) $x - \dfrac{18}{7}\ln|x+3| - \dfrac{3}{14}\ln(x^2+x+1) + \dfrac{5\sqrt{3}}{7}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

6) $x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\ln|x+1| + 3\operatorname{arctg}(x+1) + C$;

7) $\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1} - 3\operatorname{arctg}(2x-1) + C$;

8) $\dfrac{x^2}{2} - x + \ln\dfrac{x^2-4x+5}{|x+1|} + 4\operatorname{arctg}(x-2) + C$.

5. 1) $\dfrac{3}{4}\ln|x-1| + \dfrac{1}{4}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$;

2) $-x + \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$;

3) $\dfrac{1}{52}\ln|x-3| - \dfrac{1}{20}\ln|x-1| + \dfrac{1}{65}\ln(x^2+4x+5) + {}$
$$+ \dfrac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2) + C;$$

4) $2\ln|x-3| - \ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln(3x^2-4x+6) + {}$
$$+ \dfrac{2}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-2}{\sqrt{14}} + C;$$

5) $\frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + {}$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

6) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C;$

7) $2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C;$

8) $\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + \ln(x^2-4x+5) + 4\operatorname{arctg}(x-2) + C;$

9) $-\frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2) - \frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C;$

10) $x + \ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln(3x^2+x+2) - \frac{1}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{23}} + C;$

11) $-\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.$

6. 1) $\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$

2) $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C;$

3) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C;$

4) $\frac{1}{10}\ln\frac{3x^2-5x+2}{3x^2+5x+2} + C;$

5) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$

6) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3 + C;$

7) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\Bigl(\sin\alpha_k\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k} - {}$
$$-\cos\alpha_k\cdot\ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha_k+1}\Bigr) + C, \text{ где } \alpha_k = \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

7. 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} + C;$

2) $\frac{1}{x+2} + \ln|x+2| - \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C;$

3) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$

4) $\frac{1}{4}\ln(x^4+x^3+2x^2) - \frac{2}{x} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C;$

5) $\frac{1}{3(1-x)} + \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$

6) $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x + C;$

7) $\frac{1}{4}\ln|x^4-1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2(x-1)} + C;$

8) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2x+1}{2x^2-4x+5}-\frac{2}{x}+C$;

9) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6(x+1)}+C$;

10) $\frac{-15x^4+5x^2-3}{15x^5}-\operatorname{arctg}x+C$.

8. 1) $\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$;

2) $\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+C$;

3) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\frac{x}{x^2+x+1}-2\ln(x^2+x+1)+$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C;$$

4) $\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{(x^2+1)}-4\operatorname{arctg}x+C$;

5) $\frac{3x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{17}{8}\operatorname{arctg}x+C$;

6) $\frac{2x^3-6x^2+8x-9}{2(x^2-2x+2)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}+\operatorname{arctg}(x-1)+C$.

9. 1) $\frac{3x^2-x}{4(x-1)(x^2+1)}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$;

2) $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

3) $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

4) $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}x+C$;

5) $\frac{2x^6-3x^2}{4(x^4-1)}+\frac{3}{8}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}+C$; 6) $\frac{x+1}{2(x^2+x+1)^2(1-x)}+C$;

7) $-\frac{(x^2+1)^2}{(x+1)(x^2+x+1)^2}+C$; 8) $-\frac{2x^3+1}{3x^3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|+C$;

9) $\frac{x}{1+x+x^5}+C$; 10) $\frac{1}{5(x^5+1)}+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|+C$.

10. 1) $\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}$; 2) $\frac{x}{3(1-x^3)}$; 3) $\frac{x^3+3x^2+18x+16}{216(x^2+2x+10)^2}$;

4) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3}$; 5) $\frac{10x^4-25x^2+12}{36x(2x^2-3)^2}$;

6) $\frac{-(486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448)}{1922(x^3+x+1)^2}$.

11. 1) $P_n^{(n)}=0$; 2) $a+2b+3c=0$; 3) $ac_1+ca_1=bb_1/2$.

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Некоторые часто встречающиеся интегралы от иррациональных функций можно вычислить методом рационализации подынтегральной функции. Этот метод заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от иррациональной функции в интеграл от функции рациональной. В этом параграфе указываются подстановки, с помощью которых такое сведение удается осуществить для некоторых важнейших классов иррациональных функций. Через $R(x_1;x_2;...;x_n)$ будем обозначать функцию, рациональную относительно каждой из переменных x_1, x_2, ..., x_n. Например,

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}} = R(x;\ \sqrt{x};\ \sqrt{1+x^3}),$$

так как иррациональная функция $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}}$ является рациональной относительно переменных $x_1 = x$, $x_2 = \sqrt{x}$, $x_3 = \sqrt{1+x^3}$.

1. Интегралы вида

$$\int R\Big(x;\ \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{p_1};\ ...;\ \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{p_n}\Big)\,dx, \qquad (1)$$

где $n \in N$, $p_1, p_2, ..., p_n \in Q$, $a,b,c,d \in R$, $ad-bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где m — общий знаменатель рациональных чисел $p_1, p_2, ..., p_n$, приводятся к интегралу от рациональной функции.

2. Интегралы вида

$$\int R(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0, \qquad (2)$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций *подстановками Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t, \quad \text{если} \quad a > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{если} \quad c > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)\,t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)\,t,$$

где x_1 и x_2 — различные действительные корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c. (Знаки в правых частях равенств можно брать в любых комбинациях.)

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам. Укажем поэтому другой способ вычисления интегралов (2). Подынтегральную функцию $R(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c})$ алгебраическими преобразованиями всегда можно представить в виде суммы

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные дроби. Тем самым интеграл (2) можно свести к интегралу от рациональной дроби $R_2(x)$ и к интегралу вида

$$\int R_1(x)\,\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Представив рациональную дробь $R_1(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ и элементарных дробей, приходим к интегралам следующих трех видов:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4}$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad p^2-4q<0. \tag{5}$$

Для вычисления интеграла (3) удобно пользоваться формулой

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{6}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а λ — некоторое число. Дифференцируя обе части формулы (6) и затем умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаем равенство многочленов, из которого находим λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$. Интеграл в правой части формулы (6) линейной подстановкой сводится к основным интегралам 14–16 из § 1 и, следовательно, является трансцендентной функцией.

Формула (6) позволяет чисто алгебраическим путем найти алгебраическую часть $Q(x)\ \sqrt{ax^2+bx+c}$ интеграла (3).

Интеграл (4) подстановкой $t = 1/(x-\alpha)$ приводится к интегралу (3). Интеграл (5) в случае, когда квадратные трехчлены

$$ax^2+bx+c, \quad x^2+px+q$$

совпадают или отличаются только множителем, следует представить в виде линейной комбинации двух интегралов

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $u = x^2+px+q$, второй *подстановкой Абеля*

$$t = (\sqrt{x^2+px+q})' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

сводится к интегралу от многочлена.

В общем случае, если $p \neq b/a$, применяется подстановка

$$x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1},$$

где α и β подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах x^2+px+q и ax^2+bx+c исчезли члены, содержащие t в первой степени. При таком выборе чисел α и β интеграл (5) сведется к интегралу вида

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{st^2+r}},$$

где $P(t)$ — многочлен степени $2m-1$ и число $\lambda>0$. (Если $p=b/a$, то уничтожение членов первой степени достигается проще: линейной заменой $x=t-p/2$.)

Разложив правильную рациональную дробь $P(t)/(t^2+\lambda)^m$ на элементарные дроби, придем к интегралам

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}, \quad \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $u^2=st^2+r$, второй — подстановкой Абеля

$$v=(\sqrt{st^2+r})'=\frac{st}{\sqrt{st^2+r}}.$$

Для вычисления интегралов вида (2) часто удобно использовать тригонометрические или гиперболические подстановки. Для этого, предварительно выделив полный квадрат в трехчлене ax^2+bx+c и сделав соответствующую линейную замену, приводят интеграл (2) к одному из следующих видов:

$$\int R(t;\,\sqrt{p^2-t^2})\,dt, \quad \int R(t;\,\sqrt{t^2-p^2})\,dt, \quad \int R(t;\,\sqrt{t^2+p^2})\,dt.$$

К первому интегралу применяют подстановки

$$t=p\sin u, \quad t=p\cos u, \quad t=p\,\mathrm{th}\,u,$$

ко второму — подстановки

$$t=\frac{p}{\cos u}, \quad t=p\,\mathrm{ch}\,u,$$

и к третьему — подстановки

$$t=p\,\mathrm{tg}\,u, \quad t=p\,\mathrm{sh}\,u.$$

3. Интегралы вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx, \tag{7}$$

где a, b — действительные, m, n, p — рациональные числа, причем $a\neq 0$, $b\neq 0$, $n\neq 0$, $p\neq 0$, называют *интегралами от дифференциального бинома.* Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций в следующих трех случаях:

$$\begin{aligned} &p \text{ — целое число},\\ &\frac{m+1}{n} \text{ — целое число},\\ &\frac{m+1}{n}+p \text{ — целое число}. \end{aligned} \tag{8}$$

В первом случае применяется подстановка

$$x = t^N,$$

где N — общий знаменатель дробей m и n; во втором и в третьем случаях — соответственно подстановки

$$ax^n + b = t^s \quad \text{и} \quad a + bx^{-n} = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p.

Если ни одно из условий (8) не выполняется, то интеграл (7) не может быть выражен через элементарные функции (*теорема Чебышева*).

4. Интегралы вида

$$\int R\big(x;\, \sqrt{P_n(x)}\big)\, dx, \tag{9}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n > 2$, как правило, не выражаются через элементарные функции и в этом случае при $n = 3$ и $n = 4$ называются *эллиптическими*, а при $n > 4$ *гиперэллиптическими*. В том случае, когда интеграл (9) при $n = 3$ и $n = 4$ является элементарной функцией, он называется *псевдоэллиптическим* (см. задачи 22). Эллиптические интегралы играют большую роль в математике; в частности, длина дуги эллипса вычисляется с помощью эллиптического интеграла (пример 9 из § 7).

Каждый эллиптический интеграл может быть выражен через элементарные функции и через стандартные эллиптические интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{(1 + hx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \quad k \in (0;\, 1). \tag{12}$$

Подстановкой $x = \sin\varphi$ эти ингегралы сводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \tag{13}$$

$$\int \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{14}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad k \in (0;\, 1), \tag{15}$$

которые называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго, третьего рода в форме Лежандра*.

Через $F(\varphi,\, k)$ и $E(\varphi,\, k)$ обозначают соответственно ту из первообразных (13) и (14), которая при $\varphi = 0$ обращается в нуль (см. задачи 27).