

Кудрявцев Л.Д.
Кутасов А.Д.
Чехлов В.И.
Шабунин М.И.

**Сборник задач
по математическому
анализу**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517
ББК 22.161
К 88

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.
Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособ. / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-0306-0.

Книга является первой частью трехтомного сборника задач, созданного на основе многолетнего опыта преподавания курса математического анализа в Московском физико-техническом институте. В нее включен материал, связанный с понятием предела, непрерывности и производной. Каждый параграф содержит справочный материал, набор типовых примеров с решениями и задачи для самостоятельной работы с ответами.

Для студентов университетов и технических вузов с расширенной программой по математике.

Табл. 55. Ил. 94. Библиогр. 20 назв.

Рецензенты:

заведующий кафедрой общей математики ВМиК МГУ
им. М. В. Ломоносова, академик *В. А. Ильин*;
профессор МФТИ, академик *С. М. Никольский*.

ISBN 978-5-9221-0306-0 (Т. 1)
ISBN 978-5-9221-0305-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2003, 2010
© Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов,
В. И. Чехлов, М. И. Шабунин, 2003, 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является первой частью сборника задач и содержит материал, относящийся к трем важным разделам курса математического анализа — “Предел”, “Непрерывность” и “Дифференцируемость”. Сборник состоит из четырех глав.

В первой главе рассматриваются множества и операции над ними, основные понятия комбинаторики, сведения о действительных и комплексных числах, многочлены и алгебраические уравнения, числовые функции и последовательности. Изучение материала этой главы имеет целью подготовить читателя к освоению курса математического анализа.

Во второй главе содержится большое число задач, связанных с понятием предела последовательности и функции.

В третьей главе собраны задачи по разделу “Производная и дифференциал”, а четвертая глава посвящена применению производных к исследованию функций.

При составлении сборника авторы опирались на многолетний опыт преподавания курса математического анализа в Московском физико-техническом институте. В сборнике содержится большое число оригинальных задач, составленных преподавателями кафедры высшей математики МФТИ и используемых в работе со студентами. Значительная часть задач сборника подготовлена авторами. В сборник включены задачи из широкоизвестных изданий, в частности, из сборника задач по математическому анализу Б. П. Демидовича и сборника задач по высшей математике Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина.

Каждый параграф сборника содержит теоретические сведения, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельной работы. Задачи каждого параграфа сгруппированы по темам и каждая группа задач расположена в порядке возрастания трудности — от совершенно простых до достаточно сложных.

Особое внимание в сборнике уделено задачам, способствующим усвоению фундаментальных понятий математического анализа. Большой набор задач, иллюстрирующих ту или иную тему, дает возможность преподавателю использовать задачник для работы в аудитории, для домашних заданий и при составлении контрольных работ.

Сборник задач предназначен в основном для вузов с расширен-

ной программой по математике. Наличие большого числа задач разной трудности дает возможность использовать задачник как в университетах, так и в технических вузах.

Первое издание вышло в свет в 1984 г.

В настоящее издание внесены ряд существенных изменений. В каждом параграфе четко выделен справочный материал, затем даны примеры с решениями и задачи с ответами, которые для удобства читателей приводятся в конце каждого параграфа. Переработан материал гл. I и § 11, 23 в направлении существенного сокращения, добавлены задачи (в небольшом числе) в § 8 – 10, 16, 18, 19, 24 без изменения общей нумерации задач.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, многолетняя плодотворная работа которого в значительной степени способствовала появлению этого сборника.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества. Комбинаторика

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Множества.

1) Буквами N, Z, Q, R, C обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

2) Если x — элемент множества A , то пишут $x \in A$, а если x не является элементом множества A , то пишут $x \notin A$.

3) Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством множества B* . В этом случае говорят также, что A содержится в B или что B содержит A .

4) Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

5) Для удобства вводится понятие пустого множества (его обозначают $\emptyset$), которое по определению не содержит элементов и содержится в любом множестве.

2. Операции над множествами.

1) Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B , называется *объединением множеств A и B* и обозначается $A \cup B$ или $A + B$.

2) Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A , так и множеству B , называется *пересечением множеств A и B* и обозначается $A \cap B$ или AB . Если $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

3) Множество, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B , называется *разностью множеств A и B* и обозначается $A \setminus B$.

4) Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называют *дополнением множества A до множества B* и обозначают A'_B .

В тех случаях, когда рассматриваются только подмножества некоторого основного множества U , дополнение множества M до множества U называют просто дополнением M и вместо M'_U пишут просто M' .

Непосредственно из определения дополнения множества следуют

равенства

$$M \cup M' = U, \quad M \cap M' = \emptyset, \quad (M')' = M.$$

5) Для любых подмножеств A и B множества U справедливы также следующие равенства, которые называют *законами двойственности* или *законами де Моргана*:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

т. е. дополнение объединения двух множеств равно пересечению их дополнений, а дополнение пересечения двух множеств равно объединению их дополнений.

3. Эквивалентные и неэквивалентные множества.

1) Говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу множества A сопоставлен один и только один элемент множества B , так что различным элементам множества A сопоставлены различные элементы множества B и каждый элемент множества B оказывается сопоставленным некоторому элементу множества A .

2) Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными*. Если множества A и B эквивалентны, то пишут $A \sim B$; если они не эквивалентны, то пишут $A \not\sim B$.

3) Если $A \sim B$, то говорят, что множества A и B *имеют одинаковую мощность*.

Если $A \not\sim B$, но $A \sim B_1 \subset B$, то говорят, что множество A *имеет меньшую мощность, чем множество B* .

4) Множество $A \neq \emptyset$ называется *конечным*, если существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что

$$A \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

В этом случае говорят, что множество A содержит n элементов или что множество A имеет мощность n .

Пустое множество $\emptyset$ также считается конечным, его мощность принимается равной нулю.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

5) Множество A называется *счетным*, если $A \sim \mathbb{N}$. Говорят, что счетное множество имеет счетную мощность. Если множество конечно или счетно, то его называют *не более чем счетным*.

Множество называется *несчетным*, если оно имеет мощность, большую, чем мощность множества $\mathbb{N}$.

Теоремы Кантора.

1. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

2. *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Множество A называется множеством *мощности континуума*, если $A \sim \mathbb{R}$.

4. Система множеств.

1) Пусть дано множество $S = \{s\}$, называемое множеством индексов, и каждому индексу s сопоставлено множество A_s . Множество $\{A_s\}$, элементами которого являются множества A_s , $s \in S$, называют *системой* или *семейством множеств*. Понятия объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай произвольной конечной или бесконечной системы множеств следующим образом.

2) *Объединением* системы множеств A_s , $s \in S$, называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств системы.

3) *Пересечением* системы множеств A_s , $s \in S$, называется множество всех элементов, содержащихся в каждом множестве системы.

4) Объединение и пересечение системы множеств A_s , $s \in S$, обозначают соответственно

$$\bigcup_{s \in S} A_s \quad \text{и} \quad \bigcap_{s \in S} A_s.$$

В частных случаях, когда система множеств конечна или счетна, пишут

$$\bigcup_{s=1}^n A_s, \quad \bigcap_{s=1}^n A_s, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{или} \quad \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s, \quad \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

5. Упорядоченные множества. Множество называется *упорядоченным*, если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \leq b$ или $b \leq a$ (a не превосходит b или b не превосходит a), обладающее свойствами:

1) рефлексивности: $a \leq a$, т. е. любой элемент не превосходит самого себя;

2) антисимметричности: если $a \leq b$ и $b \leq a$, то элементы a и b равны;

3) транзитивности: если $a \leq b$, $b \leq c$, то $a \leq c$.

6. Размещения и перестановки.

1) Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением* из n элементов по k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)). \quad (1)$$

2) Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!. \quad (2)$$

7. Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

или по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (3)$$

Справедливы равенства

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, \quad k < n.$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать закон двойственности

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

▲ Пусть $x \in (A \cap B)'$; тогда $x \notin A \cap B$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \in A'$ или $x \in B'$, а это означает, что $x \in A' \cup B'$. Таким образом, доказано включение

$$(A \cap B)' \subset A' \cup B'.$$

Пусть $x \in A' \cup B'$; тогда $x \in A'$ или $x \in B'$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \notin A \cap B$, а это означает, что $x \in (A \cap B)'$. Таким образом, доказано включение

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)'.$$

Из включений $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ и $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ следует, что множества $(A \cap B)'$ и $A' \cup B'$ состоят из одних и тех же элементов, т. е. равны. ▲

Пример 2. Группа студентов изучает семь учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если на этот день недели запланированы занятия по четырем дисциплинам?

▲ Различных способов составления расписания столько, сколько существует четырехэлементных упорядоченных подмножеств у семиэлементного множества, т. е. равно числу размещений из семи элементов по четыре элемента. По формуле (1), полагая в ней $n = 7$, $k = 4$, находим

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

▲ Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. ▲

Пример 4. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

▲ В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т. е. их число равно C_{18}^2 . По формуле (3) находим

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится 306 встреч. ▲

ЗАДАЧИ

1. Даны множества A , B , C . С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих:

- 1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству;
- 3) по крайней мере двум из этих множеств.

2. Доказать, что равенства: 1) $A \cup B = B$; 2) $A \cap B = A$; верны тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

3. Доказать, что равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно тогда и только тогда, когда $A \supset C$.

4. Доказать равенство:

- 1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; 2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
- 3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; 4) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

5. Доказать, что включение $A \setminus B \subset C$ верно тогда и только тогда, когда $A \subset B \cup C$.

6. Доказать, что:

- 1) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$; 2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

7. Определить, в каком отношении ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$) находятся множества X и Y , если:

- 1) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
- 2) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
- 3) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

8. Пусть A и B — произвольные подмножества множества U . Доказать равенство:

- 1) $(A \setminus B)' = A' \cup B$; 2) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$;
- 3) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

9. Пусть $A \subset U$, $B \subset U$. Найти множество $X \subset U$, удовлетворяющее уравнению

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A') = B.$$

10. Найти подмножества A и B множества U , если известно, что для любого множества $X \subset U$ верно равенство

$$X \cap A = X \cup B.$$

11. Пусть $A_s \subset U$, $s \in S$. Доказать:

$$1) \left(\bigcup_{s \in S} A_s \right)' = \bigcap_{s \in S} A_s'; \quad 2) \left(\bigcap_{s \in S} A_s \right)' = \bigcup_{s \in S} A_s'.$$

12. Дана система произвольных множеств A_s , $s \in \mathbb{N}$.

$$1) \text{ Пусть } B_n = \bigcup_{s=1}^n A_s, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ Доказать, что } \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s.$$

$$2) \text{ Пусть } B_n = \bigcap_{s=1}^n A_s, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ Доказать, что } \bigcap_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

13. Доказать, что множество является бесконечным тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

14. Доказать, что если множество A бесконечное, а множество B счетное, то $(A \cup B) \sim A$.

15. Доказать, что если $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.

16. Доказать, что если $A \subset B \subset C$ и $A \sim C$, то $A \sim B$.

17. Доказать счетность следующих множеств:

- 1) множества всех чисел вида 2^k , $k \in \mathbb{N}$;
- 2) множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты;
- 3) множества всех точек плоскости с рациональными координатами;
- 4) множества всех многочленов с рациональными коэффициентами.

18. Доказать, что следующие множества имеют мощность континуума:

- 1) множество всех точек непустого интервала $(a; b)$;
- 2) множество всех последовательностей, составленных из цифр 0 и 1;
- 3) множество всех последовательностей действительных чисел;
- 4) множество всех точек квадрата;
- 5) множество всех точек круга;
- 6) множество всех подмножеств счетного множества;
- 7) множество всех счетных подмножеств множества мощности континуума.

19. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:

- 1) один из них должен быть старшим;
- 2) старшего быть не должно?

20. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:

- 1) все путевки различны;
- 2) все путевки одинаковы?

21. Сколькими способами можно расположить в ряд пять белых и четыре черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая:

- 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга;
- 2) все шары разные.

22. Сколько диагоналей имеет выпуклый n -угольник?

23. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения диагоналей.

24. На первой из двух параллельных прямых лежат 15 точек, на второй 21. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

25. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на черных клетках?

26. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

27. Сколько различных десятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 2?

28. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: 1) зебра; 2) баран; 3) водород; 4) абракадабра?

29. Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырем игрокам так, чтобы каждый получил 7 костей?

30. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

31. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1, 3, 5, 7, 9)?

32. Сколько делителей имеет число 462?

33. На полке стоят m книг в черных переплетах и n книг в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

34. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если 4 бандероли должны содержать по 2 книги?

ОТВЕТЫ

7. 1) $X \supset Y$; 2) $X = Y$; 3) $X \subset Y$. 9. $X = B'$.
 10. $A = U$, $B = \emptyset$. 19. 1) 870; 2) 435. 20. 1) 60; 2) 10.
 21. 1) 15; 2) 43200. 22. $\frac{n(n-3)}{2}$. 23. 210. 24. 5355. 25. 576.
 26. 18; 10. 27. 1024. 28. 1) 120; 2) 60; 3) 420; 4) 83160.
 29. $\frac{(28)!}{(7!)^4}$. 30. 5040. 31. 15625. 32. 16. 33. $(n+1)!m!$. 34. 945.

§ 2. Элементы логики. Метод математической индукции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Высказывания. Операции над высказываниями.

1) Под *высказыванием* понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным или ложным.

Предложение, о котором невозможно однозначно сказать, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

2) Из всякого высказывания A можно получить новое высказывание, *отрицая* его, т. е. утверждая, что высказывание A ложно, иначе говоря, не имеет места, не выполняется. *Отрицание* высказывания A обозначается символом $\bar{A}$ или $]A$. Каково бы ни было высказывание A , из двух высказываний A и $\bar{A}$ одно является истинным, а другое ложным.

3) Высказывание “истинны оба высказывания A и B ” называется *конъюнкцией* высказываний A и B и обозначается $A \wedge B$.

4) Высказывание “истинно хотя бы одно из высказываний A и B ” называется *дизъюнкцией* высказываний A и B и обозначается $A \vee B$.

5) Высказывание, полученное из данных высказываний A и B при помощи слов “если ..., то ...”, называют *импликацией* и обозначают $A \Rightarrow B$ или $A \rightarrow B$ (читают: если A , то B). Высказывание A называют при этом *условием*, а высказывание B — *заключением*. Говорят также, что A является *достаточным условием* для B , а B является *необходимым условием* для A .

Высказывание $A \Rightarrow B$ считается ложным только в том случае, когда A истинно, а B ложно.

6) Высказывание, полученное из данных высказываний A и B при помощи слов “тогда и только тогда, когда”, называют *эквиваленцией* или *двойной импликацией* и обозначают $A \Leftrightarrow B$ или $A \leftrightarrow B$. Высказывание $A \Leftrightarrow B$ истинно только тогда, когда либо оба высказывания A и B истинны, либо оба ложны. В этом случае говорят также, что высказывания A и B *равносильны* и что каждое из них является *необходимым и достаточным условием* другого.

2. Предложения, зависящие от переменной. Знаки (символы) общности и существования.

1) Предложение $P(x)$, зависящее от переменной x , принадлежащей некоторому множеству M ($x \in M$), не является, вообще говоря, высказыванием. Например, об истинности предложения $P(x) = \{x \text{ — простое число}\}$ ничего нельзя сказать, если не указать число x . Это предложение является истинным при одних значениях x (например, при $x = 5$, $x = 7$) и ложным при других значениях x (например, при $x = 8$, $x = 15$). Такие предложения называют *неопределенными высказываниями (предикатами)*.

2) *Знак общности* $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова All — все) заменяет слова “все”, “всякий”, “каждый”, “любой”. Если $P(x)$ — некоторое неопределенное высказывание, то запись $\forall x P(x)$ (или $(\forall x) P(x)$) означает, что для любого элемента $x \in M$ истинно $P(x)$, и представляет собой высказывание. Это высказывание истинно, если $P(x)$ истинно для каждого $x \in M$. Чтобы убедиться в ложности высказывания $\forall x P(x)$, достаточно указать хотя бы один элемент $a \in M$, для которого $P(a)$ — ложное высказывание (найти один противоречащий пример).

3) *Знак существования* $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова Exists — существует) заменяет слова “существует”, “найдется”. Запись $\exists x P(x)$ представляет собой высказывание; оно истинно, если существует такой элемент $a \in M$, для которого $P(a)$ истинно. В противном случае (если в множестве M нет ни одного элемента a , для которого $P(a)$ истинно) высказывание $\exists x P(x)$ ложно.

4) Правила построения отрицаний для предложений, содержащих символы $\forall$ и $\exists$ (их в логике называют *кванторами*), можно записать в виде

$$\overline{\forall x \in M P(x)} \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \overline{P(x_0)}, \quad (1)$$

$$\overline{\exists x_0 \in M P(x_0)} \Leftrightarrow \forall x \in M \overline{P(x)}. \quad (2)$$

Таким образом, для построения отрицания предложения, содержащего знаки $\forall$ и $\exists$ и утверждение P , следует знак $\forall$ заменить на $\exists$, знак $\exists$ — на знак $\forall$, а утверждение P — на его отрицание $\overline{P}$.

3. Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого номера n , достаточно установить, что:

А) это утверждение верно при $n = 1$;

Б) если утверждение справедливо для номера n (n — любое натуральное число), то оно верно и для следующего номера $n + 1$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Рассмотрим неопределенные высказывания, заданные на множестве всех четырехугольников Q :

$A(Q) \equiv \{\text{четырехугольник } Q \text{ — ромб}\},$

$B(Q) \equiv \{\text{диагонали четырехугольника } Q \text{ взаимно перпендикулярны}\}$. Докажем, что $\forall Q A(Q) \Rightarrow B(Q)$, а обратное утверждение $\forall Q B(Q) \Rightarrow A(Q)$ неверно.

▲ Так как в любом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, то $A(Q) \Rightarrow B(Q)$ для любого ромба Q .

Обратная теорема неверна: существует четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, не являющийся ромбом. ▲

Пример 2. Пусть $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, — квадратичная функция, $D = b^2 - 4ac$. Доказать, что

$$\{\forall x \in R \quad y \geq 0\} \Leftrightarrow \{D \leq 0, a > 0\}.$$

▲ Из равенства

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] \quad (1)$$

и условий $D \leq 0$, $a > 0$ следует, что $y \geq 0$ для всех $x \in R$. Обратно, пусть $y \geq 0$ при всех $x \in R$. Докажем, что $D \leq 0$ и $a > 0$. Пусть условие $D \leq 0$ не выполняется; тогда $D > 0$ и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 , а квадратичная функция меняет знак при переходе через точки x_1 и x_2 . Итак, $D \leq 0$, и из равенства (1) и условия $y \geq 0$ при всех $x \in R$ следует, что $a > 0$. ▲

Пример 3. Пусть задано числовое множество M . Записать с помощью кванторов утверждения A и B и их отрицания:

а) $A \equiv \{\text{все элементы } x \text{ множества } M \text{ удовлетворяют условию } x > 0\}$;

б) $B = \{\text{существует число } a > 0 \text{ такое, что все элементы множества } M \text{ удовлетворяют условию } |x| \leq a\}$.

▲ а) Пусть A не имеет места, т. е. не все элементы множества M удовлетворяют условию $x > 0$. Это означает, что найдется (существует) такой элемент $x \in M$, для которого неравенство $x > 0$ не выполняется, т. е. справедливо противоположное неравенство $x \leq 0$. Запишем A и $\bar{A}$ с помощью кванторов:

$$A \equiv \{\forall x \in M \quad x > 0\}, \quad \bar{A} \equiv \{\exists x \in M: x \leq 0\}.$$

б) Пусть не существует числа $a > 0$ такого, чтобы для любого $x \in M$ имело место неравенство $|x| \leq a$. Это означает, что для любого $a > 0$ неравенство $|x| \geq a$ не может выполняться для каждого $x \in M$. Иначе говоря, существует такой элемент $x = x_a \in M$ (зависящий, вообще говоря, от a), для которого неравенство $|x| \leq a$ не выполняется, т. е. справедливо неравенство $|x| > a$.

Запишем B и $\bar{B}$ с помощью кванторов:

$$B \equiv \{\exists a > 0: \forall x \in M \quad |x| \leq a\},$$

$$\bar{B} \equiv \{\forall a > 0 \exists x_a \in M: |x_a| > a\}. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Доказать, что при всех $n \in N$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

▲ При $n = 1$ равенство (2) является верным ($1 = 1$). Докажем, что из предположения о том, что верно равенство (1), следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \quad (3)$$

полученного из (2) заменой n на $n+1$.

Прибавляя к обеим частям равенства (2) слагаемое $(n+1)^2$, имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \quad (4)$$

Преобразуем правую часть (4):

$$\frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (3) является верным, и поэтому формула доказана для любого $n \in \mathbb{N}$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для любых высказываний A и B справедливы равенства

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}, \quad \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

2. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv \{\text{каждое из чисел } a, b \text{ делится на } 7\}$, $B \equiv \{\text{сумма } a + b \text{ делится на } 7\}$;

2) $A \equiv \{\text{последняя цифра числа } a \text{ четная}\}$, $B \equiv \{\text{число } A \text{ делится на } 4\}$;

3) $A \equiv \{\text{треугольник } A_1B_1C_1 \text{ равнобедренный}\}$, $B \equiv \{\text{две медианы треугольника } A_1B_1C_1 \text{ равны между собой}\}$;

4) $A \equiv \{\text{из отрезков, длины которых равны } a, b, c, \text{ можно составить треугольник}\}$, $B \equiv \{\text{положительные числа } a, b, c \text{ связаны неравенствами } a + b > c, b + c > a, c + a > b\}$.

3. Доказать, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac < 0$ и $a < 0$.

4. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) — квадратный трехчлен, $D = b^2 - 4ac$, x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, $x_1 \leq x_2$ ($D \geq 0$), $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$, M и K — заданные числа. Доказать, что:

1) $\{x_1 < M, x_2 < M\} \Leftrightarrow \{D \geq 0, x_0 < M, af(M) > 0\}$;

2) $\{x_1 > M, x_2 > M\} \Leftrightarrow \{D \geq 0, x_0 > M, af(M) > 0\}$;

3) $\{x_1 < M < x_2\} \Leftrightarrow \{af(M) < 0\}$;

4) $\{K < x_1 < M, K < x_2 < M\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{D \geq 0, K < x_0 < M, f(K)f(M) > 0\}$;

5) $\{x_1 < K < M < x_2\} \Leftrightarrow \{af(K) < 0, af(M) < 0\}$.

5. Пусть $A_k(x)$ и $B_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — неопределенные высказывания, заданные на множестве M и такие, что:

А) для любого $x \in M$ хотя бы одно из высказываний $A_k(x)$ является истинным;

Б) $A_k(x) \Rightarrow B_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$;

В) высказывания $B_1(x), \dots, B_n(x)$ взаимно исключают друг друга, т. е. если одно из них для каждого $x \in M$ истинно, то все остальные ложны.

Доказать, что $B_k(x) \Rightarrow A_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, а высказывания $A_1(x), \dots, A_n(x)$ взаимно исключают друг друга.

6. Пусть A_k, B_k ($k = 1, 2, 3$) — неопределенные высказывания, заданные на множестве всех треугольников со сторонами a, b, c и соответствующими углами A, B, C :

$A_1 \equiv \{\text{угол } A \text{ острый}\}, A_2 \equiv \{\text{угол } A \text{ прямой}\}, A_3 \equiv \{\text{угол } A \text{ тупой}\},$

$B_1 \equiv \{a^2 < b^2 + c^2\}, B_2 \equiv \{a^2 = b^2 + c^2\}, B_3 \equiv \{a^2 > b^2 + c^2\}.$

Доказать, что $A_k \Leftrightarrow B_k$ ($k = 1, 2, 3$).

Методом математической индукции решить задачи 7–13.

7. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верны равенства:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1);$

2) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3};$

3) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n - 1)n = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{3};$

4) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2;$

5) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n - 1)n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}.$

8. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$:

1) число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19;

2) число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6;

3) число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11;

4) число $n^5 - n$ делится на 5.

9. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство Бернулли

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, \quad \text{если } a > -1.$$

10. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство:

1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1;$

2) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24};$

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}};$

$$4) \sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

11. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

12. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные положительные числа такие, что $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Доказать, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

13. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные положительные числа. Доказать, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

ОТВЕТЫ

2. 1) $A \Rightarrow B$; 2) $B \Rightarrow A$; 3) $A \Leftrightarrow B$; 4) $A \Leftrightarrow B$.

§ 3. Действительные числа

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Множество действительных чисел.

1) *Действительное (вещественное)* число a записывается в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad (1)$$

где α_0 — неотрицательное целое число, а каждое α_n ($n \in \mathbb{N}$) — одна из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Знак $+$ в записи (1) обычно не пишут, а число вида $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ называют *неотрицательным*.

2) Бесконечная десятичная дробь называется *периодической* с периодом $\beta_1 \dots \beta_m$ и записывается в виде

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m), \quad (2)$$

если после некоторого десятичного разряда (его номер обозначен n) группа цифр $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$ все время повторяются. Бесконечные десятичные периодические дроби (и только они) являются *рациональными числами*, т. е. записываются в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

3) Переход от записи рационального числа a в виде (2) к записи вида $\frac{p}{q}$ производится по формуле

$$a = \alpha_0 \frac{\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{m} \underbrace{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}_{n} - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{m} \underbrace{00 \dots 0}_{n}}. \quad (3)$$

В числителе дроби (3) записана разность чисел, стоящих после запятой в равенстве (2) соответственно до второго и первого периода, а в знаменателе — число $10^{m+n} - 10^n$.

4) Число $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ называется *абсолютной величиной (модулем)* числа (1) и обозначается $|a|$, т. е.

$$|\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots| = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

5) Бесконечная десятичная дробь называется *допустимой*, если она не содержит периода, состоящего только из цифры 9. Любое действительное число может быть записано в виде допустимой бесконечной десятичной дроби.

2. Сравнение действительных чисел.

1) *Сравнение неотрицательных чисел.* Два неотрицательных действительных числа a и b , записанных в виде допустимых бесконечных десятичных дробей

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \quad \text{и} \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots, \quad (4)$$

равны ($a = b$) тогда и только тогда, когда

$$\alpha_k = \beta_k \quad \text{при всех} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$\{a = b\} \Leftrightarrow \{\alpha_k = \beta_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Поэтому любое действительное число однозначным образом записывается в виде допустимой бесконечной десятичной дроби.

Если неотрицательные действительные числа a и b записаны в виде допустимых бесконечных десятичных дробей (4), то говорят, что число a меньше числа b и пишут $a < b$, если либо $\alpha_0 < \beta_0$, либо $\alpha_0 = \beta_0$ и существует номер n такой, что $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$, но $\alpha_n < \beta_n$.

2) *Сравнение произвольных действительных чисел.* Если a — отрицательное число, а b — отрицательное число, то считают, что $b < a$ (или $a > b$). Если оба числа отрицательные, то считают, что $a = b$, если $|a| = |b|$, и $a < b$, если $|b| < |a|$.

3. Неравенства, содержащие знак модуля. Для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a + b| \geq ||a| - |b||.$$

4. Числовые промежутки.

1) *Отрезок, интервал, полу интервал* записываются соответственно как

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x: a < x < b\},$$

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x: a < x \leq b\}.$$

Точки a и b называют соответственно *левым* и *правым концом* промежутка (отрезка, интервала или полуинтервала).

2) Бесконечные промежутки:

$$(a, +\infty) = \{x: x > a\}, \quad (-\infty, a) = \{x: x < a\}, \quad (-\infty, +\infty) = \{x: x \in R\}.$$

3) Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называют ε -окрестностью точки a и обозначают $U(a; \varepsilon)$ или $U_\varepsilon(a)$, т. е.

$$U_\varepsilon(a) = \{x: |x - a| < \varepsilon\}.$$

5. Точные грани числовых множеств.

1) Множество X действительных чисел ($X \subset R$) называется *ограниченным сверху*, если существует число $C \in R$ такое, что все элементы множества X не превосходят C , т. е.

$$\exists C \in R: \quad \forall x \in X \quad x \leq C.$$

2) Множество $X \subset R$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое число C' , что все элементы множества X не меньше C' , т. е.

$$\exists C' \in R: \quad \forall x \in X \quad x \geq C'.$$

3) Множество $X \subset R$ называют *ограниченным*, если оно ограничено как сверху, так и снизу, т. е.

$$\exists C' \in R \quad \exists C \in R: \quad \forall x \in X \quad C' \leq x \leq C. \quad (5)$$

Условие (5) равносильно условию

$$\exists C_0 > 0: \quad \forall x \in R \quad |x| \leq C_0.$$

4) Если множество X ограничено сверху, то наименьшее из всех чисел, ограничивающих его сверху, называют его *верхней гранью* (или *точной верхней гранью*).

Число M является *точной верхней гранью* множества X , если выполняются следующие условия:

$$\forall x \in X \quad x \leq M, \quad \forall \alpha < M \quad \exists x \in X: \quad x > \alpha.$$

Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$ (читается: супремум).

5) Если множество X ограничено снизу, то наибольшее из всех чисел, ограничивающих его снизу, называют его *нижней гранью* (или *точной нижней гранью*).

Число m является *точной нижней гранью* множества X , если выполняются следующие условия:

$$\forall x \in X \quad x \geq m, \quad \forall \beta > m \quad \exists x \in X: \quad x < \beta.$$

6) Всякое ограниченное сверху (снизу) непустое множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

7) Если множество X не ограничено сверху (не ограничено снизу), то пишут $\sup X = +\infty$ (соответственно $\inf X = -\infty$).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Записать в виде рациональной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь

$$a = 3,7(13).$$

▲ Так как $10^3a = 3813,(13)$, $10a = 37,(13)$, то $990a = 3676$, откуда

$$a = \frac{3676}{990} = \frac{1838}{495} = 3\frac{353}{495}. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что для любых действительных чисел a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющих условиям $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$, $\sum_{k=1}^n b_k^2 = 1$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq 1.$$

▲ Так как $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, а $|x + y| \leq |x| + |y|$, то $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = 1. \quad \blacktriangle$

ЗАДАЧИ

1. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь a в виде $\frac{p}{q}$, если p и q — натуральные числа, не имеющие общих делителей:

1) $a = 2,(13)$; 2) $a = 1,3(18)$; 3) $a = 0,125(0)$; 4) $a = 3,4(31)$.

2. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональные.

3. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

4. Доказать, что для любых рациональных чисел a и b таких, что $a < b$, найдется иррациональное число c , удовлетворяющее условию $a < c < b$.

5. Доказать, что для любых рациональных чисел p , q , r , из которых хотя бы одно не равно нулю, число $p\sqrt{2} + q\sqrt{3} + r\sqrt{2/3}$ иррациональное.

6. Сравнить следующие действительные числа:

1) 3,3 и 3,298; 2) 3,1416 и 3,14159; 3) 3,141592 и $22/7$;

4) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 5) $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$.

7. Доказать, что если $|b| < \frac{|a|}{2}$, то $\frac{1}{|a-b|} < \frac{2}{|a|}$.

8. Пусть $X = \{x: x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$. Доказать, что множество X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

9. Найти $\sup X$ и $\inf X$, если множество X состоит из элементов, являющихся членами последовательности $\{x_n\}$, где:

$$1) x_n = \frac{1}{n}; \quad 2) x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad 3) x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

10. Пусть X, Y — непустые ограниченные множества действительных чисел, а $X + Y$ — множество всевозможных чисел вида $x + y$, где $x \in X, y \in Y$. Показать, что $X + Y$ — ограниченное множество, причем $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$, $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

11. Пусть X, Y — непустые ограниченные множества неотрицательных действительных чисел, XY — множество всевозможных чисел xy , где $x \in X, y \in Y$. Показать, что XY — ограниченное множество, причем $\sup XY = \sup X \cdot \sup Y$, $\inf XY = \inf X \cdot \inf Y$.

12. Пусть X и Y — множества действительных чисел, $X - Y$ — множество всевозможных чисел вида $x - y$, где $x \in X, y \in Y$. Показать, что $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$.

13. Пусть X — множество действительных чисел, а $-X$ — множество чисел вида $y = -x$, где $x \in X$. Доказать, что $\inf(-X) = -\sup X$, $\sup(-X) = -\inf X$.

14. Пусть X и Y — непустые множества действительных чисел такие, что:

а) для любого $x \in X$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство

$$x \leq y;$$

б) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_\varepsilon \in X$ и $y_\varepsilon \in Y$ такие, что

$$y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon.$$

Показать, что $\sup X = \inf Y$.

15. Доказать, что множество всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, 0 < p < q$, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Найти его точную верхнюю и точную нижнюю грани.

ОТВЕТЫ

1. 1) $\frac{211}{99}$; 2) $\frac{29}{22}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{3397}{990}$. **3.** Может.

6. 1) $3,3 > 3,298$; 2) $3,1416 > 3,14159$; 3) $3,141592 < \frac{22}{7}$;

4) $\sqrt{3} + 2 > \sqrt{2} + \sqrt{5}$; 5) $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

8. $\sup X = \sqrt{2}$, $\inf X = -\sqrt{2}$. **9.** 1) 1 и 0; 2) $\frac{3}{2}$ и 0; 3) 1 и $\frac{1}{2}$.

16. 1 и 0.

§ 4. Прогрессии. Суммирование. Бином Ньютона. Числовые неравенства

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Числовая последовательность.

1) Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n , то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n) , число x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n .

2) Последовательность обычно задается либо формулой, с помощью которой можно вычислить каждый ее член по соответствующему номеру, либо формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим (рекуррентной формулой).

2. Арифметическая прогрессия.

1) *Арифметическая прогрессия* — последовательность $\{a_n\}$ — определяется рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где a_1 и d — заданные числа; число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

2) Формула n -го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

3) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т. е. при $k \geq 2$ справедливо равенство

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

4) Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

3. Геометрическая прогрессия.

1) *Геометрическая прогрессия* — последовательность $\{b_n\}$ — определяется рекуррентной формулой

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где b_1 и q — заданные числа, отличные от нуля; число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии.

2) Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

3) Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению его соседних членов, т. е. при $k \geq 2$ справедливо равенство

$$b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}.$$

Если $b_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ ($b_1 > 0$, $q > 0$), то

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}},$$

т. е. каждый член такой геометрической прогрессии равен среднему геометрическому его соседних членов.

4) Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{если } q \neq 1.$$

5) Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*, а ее сумма выражается формулой

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

4. Суммирование.

1) Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные числа. Их сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ обозначается также $\sum_{k=1}^n a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

где k называется *индексом суммирования*.

2) Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, т. е.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{p=1}^n a_p.$$

3) Операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел α и β имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k.$$

4) Рассмотрим сумму, содержащую mn слагаемых a_{ij} , где индексы i и j принимают значения от 1 до n и от 1 до m соответственно ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$). Эта сумма обозначается

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \quad \text{или} \quad \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{ij}$$

и называется *двойной суммой*. Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

5) Задачу о вычислении сумм вида

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k),$$

где $f(x)$ — заданная функция, обычно рассматривают как задачу о нахождении S_n как функции от n . Например, если $f(k) = a_{k+1} - a_k$, где $\{a_n\}$ — заданная последовательность, то

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots \\ \dots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1. \quad (1)$$

4. Бином Ньютона.

1) Для любых чисел a , b и любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива *формула бинома Ньютона*

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n, \quad (2)$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

— число сочетаний из n элементов по k элементов. В частности, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

2) Слагаемые $C_n^k a^{n-k} b^k$ называют *членами разложения* (2), а числа C_n^k — *коэффициентами разложения* или *биномиальными коэффициентами*. Коэффициенты разложения обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

3) Полагая в формуле (2) $a = 1$, $b = x$, получаем

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \quad (4)$$

Подставляя в равенство (4) $x = 1$ и $x = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

3. Числовые неравенства.

1) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, а если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

2) Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

3) Если $a > b > 0$, то $\{a > b\} \Leftrightarrow \{\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}\}$.

4) $\{a > b\} \Leftrightarrow \{\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}\}$.

5) $\{a^{2k} > b^{2k}\} \Leftrightarrow \{|a| > |b|\}$, $k \in \mathbb{N}$.

6) Для любых действительных чисел справедливо неравенство

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

7) Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

8) Неравенство $|a| < b$, где $b > 0$, равносильно двойному неравенству $-b < a < b$.

9) Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (5)$$

Равенство в (5) имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

10) Для любых действительных чисел a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) выполняется *неравенство Коши–Буняковского*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \quad (6)$$

Равенство в (6) имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие числа α и β , что при всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполняется равенство $\alpha a_k + \beta b_k = 0$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить суммы:

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}; \quad 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

▲ 1) Так как $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то по формуле (1) находим

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3) Используя равенство

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

и формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить сумму $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

▲ Рассмотрим тождество

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Полагая в этом тождестве $x = 1, 2, \dots, n$ и складывая почленно получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

то, используя формулу (1), получаем

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n,$$

откуда

$$S_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Итак,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \blacktriangle \quad (7)$$

Замечание. В § 2 (пример 4) равенство (7) было доказано методом индукции.

Пример 3. Вычислить сумму $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$.

▲ Рассмотрим равенство

$$S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n 2 \sin kx \sin \frac{x}{2}.$$

Так как

$$2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \cos \left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

то по формуле (1) находим

$$S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x,$$

откуда

$$S_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \text{если} \quad \sin \frac{x}{2} \neq 0;$$

если $\sin(x/2) = 0$, то $S_n(x) = 0$. ▲

Пример 4. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + b$. Выразить через x_1 , a , b и n :

$$1) x_n; \quad 2) S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

▲ 1) Так как $x_k = ax_{k-1} + b$, $x_{k-1} = ax_{k-2} + b$, то

$$x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) = a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \dots = a^{k-2}(x_2 - x_1),$$

т. е.

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Полагая в этой формуле $k = 2, 3, \dots, n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1) \sum_{k=2}^n a^{k-2},$$

или

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = ((a - 1)x_1 + b) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1},$$

откуда

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1.$$

При $a = 1$ последовательность $\{x_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью b , и поэтому

$$x_n = x_1 + (n - 1)b.$$

$$2) S_n = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k = x_1 + a \sum_{k=2}^n x_{k-1} + (n - 1)b,$$

$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n - 1)b,$$

$$S_n(1 - a) = x_1 - ax_n + (n - 1)b = x_1 - a^n x_1 - ab \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} + (n - 1)b,$$

откуда

$$S_n = \frac{(n - 1)b}{1 - a} + \frac{ab}{(a - 1)^2} (a^{n-1} - 1) + \frac{a^n - 1}{a - 1} x_1, \quad a \neq 1. \blacktriangle$$

Пример 5. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой

$$x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2},$$

где $\alpha\beta \neq 0$. Выразить x_n через x_0 , x_1 , α , β и n .

▲ Исходное равенство можно записать так:

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}).$$

Обозначим $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, тогда $y_n = \beta y_{n-1}$, откуда $y_n = \beta^{n-1} y_1$, т. е. $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1} y_1$, или

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-1} y_1.$$

Полагая $x_n = \beta^n z_n$, получаем

$$z_n = \frac{\alpha}{\beta} z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}.$$

Считая $\alpha \neq \beta$ и используя результат предыдущего примера, находим

$$z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta},$$

где $z_1 = x_1/\beta$, $y_1 = x_1 - \alpha x_0$. Отсюда получаем

$$x_n = x_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta x_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то $x_n = n\alpha^{n-1}x_1 - x_0(n-1)\alpha^n$. $\blacktriangle$

Пример 6. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2$.

$\blacktriangle$ Рассмотрим тождество $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Приравнявая в этом тождестве коэффициенты при x^n и используя формулу (4), получаем

$$C_n^n C_n^0 + C_n^{n-1} C_n^1 + \dots + C_n^{n-k} C_n^k + \dots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n.$$

Это равенство в силу (3) можно записать в виде $\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Пример 7. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$.

$\blacktriangle$ Используя равенства

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1},$$

получаем

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1). \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Доказать неравенство Коши–Буняковского (6).

$\blacktriangle$ Если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то в (6) имеет место равенство. Пусть хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ отлично от нуля, тогда $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен относительно x

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2,$$

где

$$a = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Так как $(a_k x + b_k)^2 \geq 0$, $x \in R$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + c$ неположителен: $b^2 \leq ac$. Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Выясним, в каком случае в (6) имеет место равенство. Пусть $b^2 = ac$. Тогда если $a = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то, положив $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), получим

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $a \neq 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корень x_0 (так как дискриминант трехчлена равен нулю), т. е.

$$ax_0^2 + bx_0 + c = \sum_{k=1}^n (a_k x_0 + b_k)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $a_k x_0 + b_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Положив $\alpha = x_0$, $\beta = 1$, получаем $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Легко проверить, что при выполнении условий $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) соотношение (6) превращается в равенство. ▲

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если положительные числа a , b , c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

2. Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

3. Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии. Доказать, что:

$$1) S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n; \quad 2) S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n).$$

4. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то при любом $n \geq 3$ и любом $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$a_1^k - C_n^1 a_2^k + C_n^2 a_3^k - \dots + (-1)^n C_n^n a_{n+1}^k = 0.$$

5. Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии. Доказать, что

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

6. Доказать, что для любого числа a и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})(1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1}) = (1 + a + a^2 + \dots + a^n)^2 - a^n.$$

7. Найти следующие суммы:

1) $1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots 1$ (последнее слагаемое — n -значное число);

$$2) \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}; \quad 3) 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n;$$

$$4) x^n + 2x^{n-1} + \dots + (n-1)x^2 + nx.$$

8. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$ отличных от нуля чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда при каждом $n \geq 3$ выполняется равенство

$$(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2)(b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n)^2.$$

9. Вычислить двойную сумму $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$, если:

$$1) a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad 2) a_{ij} = i; \quad 3) a_{ij} = i - j; \quad 4) a_{ij} = |i - j|.$$

10. Доказать, что для любых чисел a и b справедливы равенства:

$$1) a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k};$$

$$2) a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}.$$

11. Доказать тождество Лагранжа

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

12. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — заданные последовательности чисел. Доказать:

1) если $B_m = \sum_{j=1}^m b_j$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

(преобразование Абеля)

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n,$$

а при любом $n \in \mathbb{N}$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n;$$

2) если $D_s = \sum_{j=n+1}^{n+s} b_j$, то для любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) D_j + a_{n+p} D_p.$$

13. Вычислить сумму:

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}; \quad 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)};$$

$$\begin{aligned}
& 3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}; \quad 4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}; \\
& 5) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}.
\end{aligned}$$

14. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля.

Доказать, что справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right); \\
& 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right); \\
& 3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d} \left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}} \right).
\end{aligned}$$

15. Пусть $S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$, $p \in \mathbb{N}$:

- 1) доказать формулу $\sum_{p=1}^m C_{m+1}^p S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1)$;
- 2) вычислить по этой формуле $S_n(3)$, пользуясь тем, что

$$S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

16. Доказать равенство:

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = C_{2n+1}^3; \quad 2) \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1; \\
& 3) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}; \\
& 4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}; \\
& 5) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}; \\
& 6) \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}; \\
& 7) \sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.
\end{aligned}$$

17. Доказать равенство:

$$1) \sum_{k=0}^n \cos(x + ka) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \cos\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sum_{k=0}^n \sin(x + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \sin\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

18. Вычислить сумму:

$$1) \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x; \quad 2) \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x; \quad 3) \sum_{k=1}^n \sin^2 kx;$$

$$4) \sum_{k=1}^n \cos^2 kx; \quad 5) \sum_{k=1}^n \sin^3 kx; \quad 6) \sum_{k=1}^n \cos^3 kx.$$

19. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Выразить x_n через x_0 , x_1 и n , если:

$$1) a = 2, \quad b = 3; \quad 2) a = 3, \quad b = -2; \quad 3) a = \alpha, \quad b = 1 - \alpha, \quad \alpha \neq 2.$$

20. Написать формулу бинома Ньютона:

$$1) (1+x)^5; \quad 2) (a+b)^6; \quad 3) (x+y)^7; \quad 4) (a-b)^8.$$

21. Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3 .

22. Найти коэффициент многочлена:

$$1) (1-x+x^2)^3 \text{ при } x^3; \quad 2) (1+2x-3x^2)^4 \text{ при } x^3 \text{ и } x^4;$$

$$3) (1+x^2-x^3)^9 \text{ при } x^8; \quad 4) (1+x^2+x^3)^7 \text{ при } x^{11};$$

$$5) \sum_{k=3}^{15} (1+x)^k \text{ при } x^3.$$

23. Вычислить сумму:

$$1) \sum_{k=1}^n (k+1)C_n^k; \quad 2) \sum_{k=1}^n (k-1)C_n^k; \quad 3) \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k}; \quad 4) \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k-1};$$

$$5) \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k, \quad m < n; \quad 6) \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2.$$

24. Доказать равенство:

$$1) \sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}; \quad 2) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} kC_n^k = 0;$$

$$3) \sum_{k=0}^s C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s; \quad 4) \sum_{k=0}^m C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1};$$

$$5) \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}; \quad 6) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{n}{n+1}.$$

25. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами:

$$1) (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5; \quad 2) (\sqrt{5} - \sqrt{2})^8.$$

26. Найти наибольший коэффициент многочлена:

$$1) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4; \quad 2) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}.$$

27. Найти наибольший член разложения $(1 + \sqrt{2})^{30}$.

28. Доказать формулу:

$$1) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac;$$

$$2) (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc;$$

$$3) (a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab).$$

29. Доказать формулу

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным $k_1, k_2, \dots, k_p$ таким, что $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$.

30. Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$ справедливо неравенство:

$$1) 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3; \quad 2) 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}};$$

$$3) \sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

$$31. \text{ Доказать неравенство } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k+1}} > 1.$$

32. Пусть $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Доказать, что $(1+a)^n > 1 + C_n^k a^k$.

33. Доказать, что если $x > 0$, то справедливы неравенства

$$1 + \frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

34. Доказать, что если $|x| < 1$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

35. Пусть $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$a + a^2 + \dots + a^{2n-1} \leq n(1 + a^{2n}) - a^n.$$

36. Пусть $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Доказать, что

$$a^m + \frac{1}{a^m} \leq a^n + \frac{1}{a^n}.$$

37. Доказать, что если A — наименьшее из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, B — наибольшее, то справедливо неравенство

$$A \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq B.$$

38. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — действительные числа, A — наименьшее из чисел $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$, а B — наибольшее. Доказать, что

$$A \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq B.$$

39. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

40. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — действительные числа, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — положительные числа, M — наибольшая из дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$, а m — наименьшая. Доказать, что

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M.$$

41. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3; \quad 2) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

42. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

43. Доказать, что если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — такие положительные числа, что $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

44. Пусть $a_i > -1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и числа a_i имеют один и тот же знак. Доказать неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

45. Пусть $x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные действительные числа, $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k a_k \right| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

46. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \\ &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \end{aligned}$$

связывающее среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

47. Доказать, что если $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

48. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Доказать, что

$$\sqrt{a_1 a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

49. Доказать, что если A — наименьшее из положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, B — наибольшее, то справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} 1) \quad A &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq B; \quad 2) \quad A \leq \sqrt{\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n}} \leq B; \\ 3) \quad A &\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq B. \end{aligned}$$

50. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} 1) \quad &\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}; \\ 2) \quad &\left| \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|; \\ 3) \quad &\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

51. Доказать, что если $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, ..., $a_n \geq 0$ и $p \in \mathbb{N}$, то

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

ОТВЕТЫ

$$\begin{aligned} 7. \quad 1) \quad &\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}; \quad 2) \quad 3 - \frac{2n+3}{2^n}; \\ 3) \quad &\frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2} \text{ при } x \neq 1; \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ при } x = 1; \\ 4) \quad &\frac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2} \text{ при } x \neq 1; \quad \frac{n(n+1)}{2} \text{ при } x = 1. \\ 9. \quad 1) \quad &n; \quad 2) \quad \frac{n^2(n+1)}{2}; \quad 3) \quad 0; \quad 4) \quad \frac{n(n^2-1)}{3}. \\ 13. \quad 1) \quad &\frac{n}{3n+1}; \quad 2) \quad \frac{n}{4n+1}; \quad 3) \quad \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}; \\ 4) \quad &\frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad 5) \quad \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

15. 2) $S_n(3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
18. 1) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 2) $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$; 3) $\frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2 \sin x}$;
 4) $\frac{n}{2} + \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2 \sin x}$;
 5) $\frac{3 \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{3(n+1)}{2} x \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}$;
 6) $\frac{\cos \frac{3(n+1)x}{2} \sin \frac{3}{2} nx}{4 \sin \frac{3x}{2}} + \frac{3 \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}}$.
19. 1) $x_n = \frac{3^n + (-1)^{n-1}}{4} x_1 + \frac{3}{4} (3^{n-1} + (-1)^n) x_0$;
 2) $x_n = (2^n - 1) x_1 - 2(2^{n-1} - 1) x_0$;
 3) $x_n = \frac{(\alpha - 1)^n - 1}{\alpha - 2} x_1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2} ((\alpha - 1)^{n-1} - 1) x_0$ при $\alpha \neq 2$; $x_n = nx_1 - (n - 1)x_0$ при $\alpha = 2$.
20. 1) $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$;
 2) $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$;
 3) $(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$;
 4) $(a - b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.
21. $C_{16}^6 x^3$.
22. 1) -7 ; 2) $-40, -74$; 3) $36C_9^3 + C_9^4 = 378$; 4) 245 ; 5) C_{16}^4 .
23. 1) $(n + 2)2^{n-1}$; 2) $(n - 2)2^{n-1} + 1$; 3) 2^{2n-1} ; 4) 2^{2n-1} ;
 5) $(-1)^m C_{n-1}^m$; 6) $(-1)^m C_{2m}^m$ при $n = 2m$; 0 при $n = 2m + 1$.
25. 1) 60 ; 2) $625, 7000, 7000, 1120, 16$.
26. 1) $\frac{27}{64}$; 2) $C_{10}^3 \frac{2^7}{3^{10}}$. 27. $C_{30}^{12} 2^9$.

§ 5. Комплексные числа

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение комплексного числа.

1) *Комплексные числа* — выражения вида $a + bi$ (a, b — действительные числа, i — некоторый символ). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z , а запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа*.

2) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют *равными* и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3) *Сложение и умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \quad (2)$$

4) Комплексное число вида $a + 0 \cdot i$ отождествляют с действительным числом a ($a + 0 \cdot i = a$), число вида $0 + bi$ ($b \neq 0$) называют *чисто мнимым* и обозначают bi ; i называют *мнимой единицей*. Действительное число a называют *действительной частью*, а действительное число b — *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$.

5) Справедливо равенство

$$i^2 = -1, \quad (3)$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

6) Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

7) Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

2. Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа.

1) *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы равенства

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3) Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$, т. е.

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

4) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 верны равенства:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

5) Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \quad (4)$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел.

1) Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b) , и эта точка обозначается той же буквой z

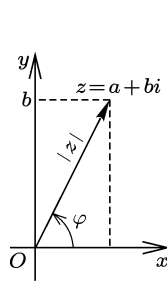


Рис. 5.1

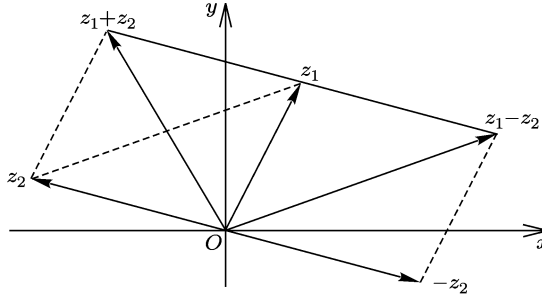


Рис. 5.2

(рис. 5.1). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс (ее называют *действительной осью*), а чисто мнимые числа — точками оси ординат (ее называют *мнимой осью*). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

2) Комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить вектор с началом в точке O и концом в точке z (см. рис. 5.1). Этот вектор будем обозначать той же буквой z , его длина равна $|z|$.

3) Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 5.2), а вектор $z_1 - z_2$ можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$.

4) Расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

где $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$.

5) Условию $|z - z_0| = R$, где z_0 — заданное комплексное число, $R > 0$, удовлетворяют точки, лежащие на окружности радиуса R с центром в точке z_0 .

6) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы неравенства

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

1) *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$* называется угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором z (см. рис. 5.1). Этот угол считается положительным, если отсчет угла ведется против часовой стрелки, и отрицательным — при отсчете по часовой стрелке.

2) Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$ и его модулем $r = |z|$ и аргументом φ выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} a = r \cos \varphi, \\ b = r \sin \varphi; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \quad (6)$$

3) Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ ($z \neq 0$) можно найти, решив систему (6). Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, φ_0 — одно из решений системы (6), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Для нахождения аргумента комплексного числа $z = a + bi$ ($a \neq 0$) можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \quad (7)$$

При нахождении аргумента комплексного числа z с помощью формулы (7) нужно обратить внимание на то, в какой четверти находится точка $z = a + bi$.

4) Из равенств (5) следует, что любое комплексное число $z = a + bi$, где $z \neq 0$, представляется в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (8)$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ — аргумент числа z . Запись комплексного числа z в виде (8), где $r > 0$, называют *тригонометрической формой комплексного числа*.

5) Комплексное число $\cos \varphi + i \sin \varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ функция $e^{i\varphi}$ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (9)$$

Равенство (9) находит обоснование в теории аналитических функций. Из (9) следует, что $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$, $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

6) Справедливы равенства

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (10)$$

$$e^{in\varphi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (11)$$

формулу (11) называют *формулой Муавра*.

7) Из (8) и (9) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где } r = |z|, \quad \varphi \text{ — аргумент числа } z, \quad (12)$$

а из равенств (10) следует, что если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, где $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (13)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (14)$$

Из формул (13) и (14) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

8) Если комплексные числа z_1 и z_2 записаны в показательной форме, т. е.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \quad (15)$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$). Пусть $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$; тогда

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$\begin{aligned} r^n &= \rho, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ r &= \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (15) имеет n различных корней

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i\varphi_k}, \quad (17)$$

где φ_k определяется формулой (16), $k = 0, 1, \dots, n-1$, θ — аргумент числа a .

На комплексной плоскости точки z_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке O .