

ЗАДАЧНИК

Сборник задач по математической демографии

Лебедев А. В.



Экономический
факультет
МГУ
имени
М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Экономический факультет

Серия учебных пособий для студентов
магистратуры экономического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова
по демографии и экономике народонаселения

А.В.ЛЕБЕДЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ДЕМОГРАФИИ

Издание второе,
исправленное и дополненное

М о с к в а 2017 год

УДК 314.172
ББК 60.7я73
Л33

Серия основана в 2017 году

Научный руководитель серии: д.э.н. *И. Е. Калабихина*
Рецензенты серии: к.ф.-м.н. Е.М.Андреев, к.э.н. *М. Б. Денисенко*

Лебедев А. В.

Л33 Сборник задач по математической демографии: учебное пособие / Лебедев А. В. — Изд. 2-е исправл. и доп. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2017. — 117 с. (серия учебных пособий по экономике народонаселения и демографии для студентов магистратуры)

ISBN 978-5-906783-59-2

ISBN 978-5-906783-61-5 (серия учебных пособий по экономике народонаселения и демографии для студентов магистратуры)

Настоящее учебное пособие включает в себя более ста задач в различных областях математической демографии. Представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности, а также модели движения населения. Помимо классических разделов, учебное пособие содержит дополнения, относящиеся к вопросам роста численности населения Земли и социально-экономическим аспектам демографии. Приведены таблицы различных демографических показателей. Используются данные Госкомстата России.

Для студентов экономического потока механико-математического факультета МГУ, студентов экономического факультета МГУ, а также всех интересующихся математическими моделями демографии.

ISBN 978-5-906783-59-2
ISBN 978-5-906783-61-5

© Экономический факультет
МГУ имени М. В. Ломоносова, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Модели роста численности населения.....	7
2. Модели смертности	10
3. Модели рождаемости.....	21
4. Модели движения активного населения.....	28
5. Модели естественного движения населения.....	31
6. Общие модели движения населения.....	36
7. Объединение и расщепление групп	40
8. Регулирование движения населения	43
9. Мотивация движения населения	49
10. Социально-экономическое расслоение.....	53
Ответы и решения	57
Образцы контрольных работ	96
Пример творческого задания	100
Приложение	103
Список литературы.....	112
Информация об авторе	116

Введение

Преподавание предмета “Математические модели демографии” на экономическом потоке механико-математического факультета МГУ было введено в 1995 году. Настоящий сборник задач создан доцентом А.В.Лебедевым на основе семинарских занятий, которые проводятся им с 1998 года (сначала в дополнение к лекционному курсу профессора О.В.Старовойрова, а затем к собственному курсу). С 2006 года А.В.Лебедевым читается курс “Математические методы в демографии” на экономическом факультете МГУ для магистрантов кафедры народонаселения.

По своей структуре и содержанию сборник первоначально в основном соответствовал учебнику О.В.Старовойрова “Азы математической демографии” [9] (за исключением главы о потенциальной демографии), а также содержал дополнения, относящиеся к вопросам роста численности населения Земли [4] и социально-экономическим аспектам демографии [10] (в частности, проблеме расслоения общества по доходам в условиях рыночной экономики). Были представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности [7, 14]. Приложение содержало таблицы различных демографических показателей. Использовались данные источников [4, 6, 9, 10], а также информация из официальных изданий Госкомстата [3, 8].

Во новом издании добавлены меры неравенства в смертности [27] и рождаемости [28], декомпозиция демографических показателей по возрастным группам и причинам смерти [13, 21], АРС-анализ [16, 18, 29, 30], обобщенные гравитационные модели [1].

В сборник включены как “абстрактные” теоретические задачи, посвященные математическому анализу моделей и выводу формул, так и “конкретные” прикладные, опирающиеся на реальные (или правдоподобные) данные, требующие вычисления определенных демографических показателей. При этом студенты имеют возможность применить полученные ранее знания в математическом анализе, решении дифференциальных и разностных уравнений (в том числе векторно-матричных), теории вероятностей и математической статистике [11], теории случайных процессов [2, 12]. Ряд задач посвящен проверке статистических гипотез, что имеет немаловажное значение в демографии.

Другой аспект задач связан со введением в реальную проблематику. В частности, проводится иллюстрация “с цифрами в руках” демографической ситуации в России 1980-х и 1990-х гг.

Некоторые задачи относятся не к человеческому населению, а к так называемым эксплуатируемым популяциям (животных) [9]. Кроме определенной значимости в сельском хозяйстве и природопользовании, такие модели позволяют легче выявить и объяснить закономерности, свойственные и более сложным системам (населению).

Более ста задач сгруппировано в десять глав, причем имеются ссылки из последующих на предыдущие. Результаты некоторых задач используются для решения других. Буквой “Т” отмечены задачи теоретического характера, буквой “В” — вычислительного (для их решения логично использовать компьютер).

В начале каждой главы приведены необходимые

сведения из теории. Многие задачи содержат ряд однотипных подпунктов, что позволяет лучше организовать аудиторную и домашнюю работу студентов. Сборник снабжен ответами и комментариями, проиллюстрирован многочисленными графиками.

По сравнению с первым изданием 2004 года [5], во втором издании исправлены обнаруженные ошибки, добавлены новые темы и задачи (в главы 1–3, 5, 7–9), образцы контрольных работ и примеры творческих заданий, убрана глава 11 (посвященная вопросам страхования, изучаемым в других курсах), существенно увеличен список литературы.

В заключение, автор выражает надежду, что его труд поможет новым поколениям студентов овладеть важным, актуальным и интересным предметом — *математической демографией*.

Всем интересующимся современной демографией автор рекомендует сайт “Демоскоп Weekly” (<http://www.demoscope.ru>) и сайт кафедры народонаселения экономического факультета МГУ (<http://demography.econ.msu.ru>).

Автор благодарен профессору О.В.Староверу (ЦЭМИ РАН), доценту Е.В.Чепурину (механико-математический факультет МГУ), профессору И.Е.Калабихиной (экономический факультет МГУ), к.ф.-м.н., с.н.с. Е.М.Андрееву (РЭШ, НИУ ВШЭ), профессору Д.М.Эдиеву (СКГГТА) за полезные замечания и предложения при подготовке сборника.

1. Модели роста численности населения.

Простейшей моделью чистого размножения (без смертности) с дискретным временем, учитывающей возраст элементов популяции, является *модель Фибоначчи* (для пар кроликов, порождающих новые пары и т.д.).

Традиционной в математической демографии является модель с непрерывным временем, в которой скорость роста населения пропорциональна текущей численности (*модель Мальтуса*), т.е.

$$x'(t) = kx(t),$$

где k — некоторый коэффициент (*показатель роста, естественный прирост*). Решением этого уравнения, очевидно, является экспонента: $x(t) = x(0)e^{kt}$, $t \geq 0$.

В более общих моделях допускается зависимость показателя роста от времени и численности населения: $k = k(t, x)$. Например, в модели *демографического взрыва* полагают $k(x) = cx$, $c > 0$, при этом $x(t)$ достигает бесконечности за конечное время T . В других моделях, где k убывает до нуля с ростом x , может происходить стабилизация численности населения при $t \rightarrow \infty$.

Поскольку значения параметров, которые будут определять динамику численности населения в будущем, заранее точно не известны, их иногда рассматривают или моделируют как случайные величины с некоторым распределением (исходя из области правдоподобных значений и современных трендов изменения). При *стохастическом прогнозировании* [6, 23] путем компьютерной симуляции строится множество возможных траекторий процесса с различными значениями

определяющих параметров. Среди итоговых численностей населения можно рассмотреть, например, *медианный* прогноз (50% больше, 50% меньше), *нижний децильный* (10% меньше, 90% больше) и *верхний децильный* (90% меньше, 10% больше) и т.п.

- 1.1. В начальный момент $t = 0$ имеется одна пара взрослых кроликов. Найти число пар всех кроликов в любой момент t , если каждая взрослая пара на каждом шагу рождает одну пару молодых, а молодые становятся взрослыми за единицу времени (*задача Фибоначчи*).
- 1.2. В начальный момент $t = 0$ имеется 2 пары взрослых кроликов. Найти число пар взрослых кроликов в любой момент t , если каждая взрослая пара на каждом шагу рождает 4 пары молодых, а молодые становятся взрослыми за 2 единицы времени.
- 1.3. Определить рост численности населения $x(t)$ с показателем $k = k(x)$, где
 - а) $k(x) = c(l - x)$,
 - б) $k(x) = c(l^\alpha - x^\alpha)$, $\alpha > 0$;
 - в) $k(x) = c \ln(l/x)$,
 с начальным условием $x(0) = x_0$ при $0 < x_0 < l$.
- 1.4. В модели “демографического взрыва” найти зависимость между начальным значением численности населения x_0 и моментом взрыва T .
- 1.5. (Т) Докажите, что в модели с запаздыванием

$$x'(t) = f(x(t - \varepsilon)), \quad \varepsilon > 0,$$

где f — функция, ограниченная на любом от-

резке, а $x(t)$ ограничено при $t \leq 0$, невозможен “взрыв” (т.е. достижение бесконечного значения за конечное время).

1.6. Имеются две модели роста численности населения Земли [4]:

I) гиперболическая — $x(t) = C_1/(T_1 - t)$, $t < T_1$,
при $C_1 = 2 \times 10^{11}$, $T_1 = 2025$;

II) тригонометрическая

$$x(t) = \frac{C_2}{\tau} \operatorname{arcctg} \frac{T_2 - t}{\tau}$$

при $C_2 = 1,85 \times 10^{11}$, $T_2 = 2005$, $\tau = 45$. Найти:

- а) прогноз на 2000 год в обеих моделях;
- б) момент прохождения уровня 10 млрд. в обеих моделях¹;
- в) (В) наибольшее расхождение в прогнозах до 1975 г.;
- г) предельное значение численности в модели II;
- д) какая из моделей лучше соответствует данным табл. 1.1 в различные периоды XX века?

1.7. Имеются две изолированные популяции, экспоненциально растущие с показателями 0,2% и 2% (в год). Пусть в начальный момент отношение их численностей 2:1.

- а) Найти отношение численности первой к второй через 10 лет.
- б) Когда численности популяций сравняются?

¹ Есть и ряд других моделей. Так, по расчетам Лутца, Сандерсона и Щербова [23], численность населения Земли достигнет лишь 9 млрд. в течение ближайших 60 лет, а затем начнет сокращаться. Более новые результаты и прогнозы см. в [22, 24]

- 1.8. Имеется две изолированные популяции с показателями роста -2% и $+2\%$ (в год). Пусть в начальный момент их численности 100 и 10 млн. чел. Найти минимум суммарной численности населения и момент его прохождения.
- 1.9. Популяция экспоненциально растет с показателем k , который оценивается с относительной ошибкой ε . По начальному условию x_0 делают прогноз на t лет вперед. Найти интервал возможных значений для $x(10)$, если $x_0 = 100$ млн. чел., $k = 0,01$ (в год), $\varepsilon = 0,1$.
- 1.10. Пусть показатель роста k — случайная величина. Найти среднюю численность населения $\tilde{x}(t)$, если
- а) k принимает значения $k_1, \dots, k_n$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n$;
 - б) k имеет нормальное распределение со средним k_0 и дисперсией σ^2 ;
 - в) k имеет показательное распределение со средним k_0 .

2. Модели смертности.

Силой смертности d называют предел отношения вероятности смерти человека на промежутке $(t, t + h)$, к h , при $h \rightarrow 0$.

*Силой смертности*² $d(x)$ в возрасте x называется отношение вероятности того, что человек, доживший до возраста x , умрет в возрасте до $x + h$, к h , при $h \rightarrow 0$.

*Функция дожития*³ $\bar{F}(x)$ описывает вероятность дожить до возраста x . Функция дожития представляет

² В специальной литературе часто обозначается через $\mu(x)$.

³ В специальной литературе часто обозначается через $l(x)$.

собой “хвост” функции распределения времени жизни F , т.е. $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Имеет место соотношение:

$$\bar{F}(x) = \exp \left\{ - \int_0^x d(u) du \right\}.$$

Средней продолжительностью предстоящей жизни в возрасте y — $M(y)$ называется среднее время до смерти человека, дожившего до возраста y . Имеют место соотношения:

$$M(y) = \frac{1}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty \bar{F}(u) du = e^{D(y)} \int_0^\infty e^{-D(u+y)} du;$$

$$D(y) = \int_0^y d(u) du.$$

Средней суммарной продолжительностью жизни в возрасте y называется величина $S(y) = y + M(y)$. Обычно с возрастом она растет.

Средняя продолжительность жизни T_0 равна средней продолжительности предстоящей жизни в возрасте ноль (т.е. для новорожденного). Ее можно вычислить по формулам:

$$T_0 = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx.$$

Помимо средней продолжительности жизни, изучают также *медианную T_{med}* и *модальную T_{mod}* продолжительности жизни, представляющие собой медиану (квантиль уровня $1/2$) и моду (точка максимума плотности) распределения F .

С содержательной точки зрения, первая характеристика — это возраст, в котором вероятности умереть

моложе и старше него равны, а вторая — это возраст, в котором чаще всего умирают.

Если предполагается, что смерть может наступить от различных причин, образующих полную группу событий (несовместных и учитывающих все возможности), то выделяют *силы смертности по причинам* (аналогично общей силе смертности). Имеет место соотношение

$$d = \sum_{i=1}^n d_i,$$

где d_i — сила смертности по i -ой причине из n возможных. Здесь также можем полагать $d_i = d_i(x)$.

При статистико-демографических исследованиях население обычно разбивается на 5-летние возрастные группы: $[x_{k-1}, x_k)$ и $[x_n, +\infty)$, $x_k = kh$, $1 \leq k \leq n$, $h = 5$, $n = 17$, $x_n = 85$. Оценками сил смертности по группам являются *возрастные коэффициенты смертности* m_k (числа умерших на определенное число людей данного возраста). Вводятся также оценки l_k для вероятностей дожития $\bar{F}(x_k)$ (числа доживших до данного возраста из определенного числа родившихся). Для оценки интегралов от функции дожития можно применить кусочно-линейную аппроксимацию на двусторонних интервалах и показательную — на одностороннем, т.е.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{F}(u) du \approx h \frac{l_{k-1} + l_k}{2}, \quad \int_{x_n}^{\infty} \bar{F}(u) du \approx \frac{l_n}{m_n}.$$

В качестве *меры неравенства* людей в продолжительности жизни, по аналогии с неравенством доходов (подробнее см. гл. 10), используется *коэффициент*

Джисини [27], который можно вычислить по формуле:

$$G = 1 - \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \bar{F}^2(x) dx.$$

Для оценки интеграла в первом приближении можно применять формулы

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{F}^2(u) du \approx h \frac{l_{k-1}^2 + l_k^2}{2}, \quad \int_{x_n}^\infty \bar{F}^2(u) du \approx \frac{l_n^2}{2m_n}.$$

Декомпозицией разности в некотором демографическом показателе смертности для двух населений (первое — базовое, второе — сравниваемое) называется представление этой разности в виде суммы вкладов по возрастным группам, причинам смерти или другим факторам [13, 21].

Классический метод декомпозиции заключается в последовательной замене силы смертности первого населения на силу смертности второго в возрастах от 0 до y , и принятии изменения показателя на промежутке от y_1 до y_2 за вклад соответствующей возрастной группы.

В частности, для средней продолжительности жизни таким методом получается формула:

$$\delta^{(2-1)}(y_1, y_2) = \bar{F}^{(2)}(y_1)(M^{(2)}(y_1) - M^{(1)}(y_1)) - \bar{F}^{(1)}(y_2)(M^{(2)}(y_2) - M^{(1)}(y_2)).$$

Существуют также другие, более сложные методы.

Внутри возрастной группы можно провести декомпозицию по причинам смерти, оценивая вклады различных причин по формулам:

$$\delta_i^{(2-1)}(x_{k-1}, x_k) = \frac{m_{k,i}^{(2)} - m_{k,i}^{(1)}}{m_k^{(2)} - m_k^{(1)}} \delta^{(2-1)}(x_{k-1}, x_k),$$

где $m_{k,i}^{(j)}$ — коэффициенты смертности по i -ой причине в k -ой возрастной группе для j -го населения. При этом доля вклада некоторой причины может быть и отрицательной (если смертность по ней для двух населений отличается в другую сторону, чем в целом).

Когортой называют совокупность людей, вступивших в некоторый промежуток времени в некоторое демографическое состояние (возможно, обладающих также некоторым дополнительным набором признаков). Обычно рассматривают когорты по годам рождения (5 или 10-летние).

На практике смертность людей зависит не только от возраста, но также от исторического периода в стране и когорт по годам рождения. Выявление эффектов возраста (age), периода (period) и когорты (cohort) называется APC-анализом [16, 18, 29, 30]. Задача эта в общем случае очень сложная.

В качестве простейшей модели можно представить следующую: пусть задано параметрическое семейство функций силы смертности $d(x, \theta)$, тогда в момент t для возраста x сила смертности равна $d(x, \theta_{ij})$, где

$$\theta_{ij} = \theta_0 + p_i + c_j.$$

Здесь θ_0 — базовое значение параметра, p_i — фактор i -ого периода, c_j — фактор j -ой когорты, i — номер периода, к которому относится момент t , j — номер когорты, к которой относится человек, находящийся в возрасте x в момент t .

2.1. (Т) Найти функцию дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в следующих

моделях силы смертности⁴ (при $0 \leq x < b$):

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad d(x) &= a/(b-x); \\ \text{б)} \quad d(x) &= \begin{cases} c/(l+x), & x < x_0 \\ a/(b-x), & x \geq x_0 \end{cases}, \quad c < 1. \end{aligned}$$

2.2. Пусть $d(x) = a/(b-x)$, $0 \leq x < b$, и средняя продолжительность жизни 60 лет. Найти вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте y лет, если:

а) $a = 1/2$, $y = 50$;

б) $b = 90$, $y = 80$.

2.3. Пусть $F(x) = (x/b)^a$, $0 \leq x \leq b$, $a > 0$. Найти силу смертности и среднюю продолжительность предстоящей жизни. Вычислить вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте y лет, если:

а) $y = 45$, $b = 90$, $T_0 = 72$ (года);

б) $y = 54$, $a = 2$, $T_0 = 60$ (лет).

2.4. В модели смертности Хелигмена-Полларда [7, с.165] полагают

$$d(x) = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x/(1 + GH^x).$$

Пусть $A = 0,0088$; $B = 0,3707$; $C = 0,2864$; $D = 0,0008$; $E = 8,37$; $F = 25,5$; $G = 0,0002$; $H = 1,0834$ (СССР, 1985–1986). Найти силу смертности в возрасте: а) 40 лет; б) 60 лет; в) 80 лет.

⁴ Формула а) соответствует гиперболической модели смертности Ж.Буржуа-Пиша; формула б) учитывает также детскую смертность в возрасте $x < x_0$.

Лебедев А.В.
Сборник задач
по математической демографии
Учебное пособие
МГУ, 2017
(второе издание).