



БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

ВЫПУСК 56

В. М. ТИХОМИРОВ

РАССКАЗЫ О МАКСИМУМАХ И МИНИМУМАХ



УДК 517
ББК 22.10
Т46

Тихомиров В. М.
Рассказы о максимумах и минимумах
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
Библиотечка «Квант»; Вып. 56
220 с.
ISBN 978-5-4439-3035-0

Прослеживается история методов нахождения наименьших и наибольших величин. Подробно излагаются решения многих замечательных задач на максимум и минимум, принадлежащие великим математикам прошлых эпох — Евклиду, Архимеду, Герону, Тарталье, Ферма, Кеплеру, Бернулли, Ньютону и др. Говорится о зарождении многих идей, заложивших основания современного анализа. Объясняются связи экстремальных задач с проблемами естествознания, техники и экономики, рассказывается об основных принципах современной теории экстремальных задач, на основе теории экстремумов приводятся решения многих задач алгебры, геометрии, анализа.

Для школьников старших классов, учителей, студентов, преподавателей.

Подготовлено на основе книги: *В. М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах.* — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2017. — («Б-чка „Квант“»; Вып. 56). — ISBN 978-5-4439-1035-2.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3035-0

© Тихомиров В. М., 2017.
© МЦНМО, 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Часть первая. Старинные задачи на максимум и минимум	7
<i>Рассказ первый.</i> Зачем решают задачи на максимум и минимум?	7
<i>Рассказ второй.</i> Древнейшая задача — задача Дидоны	15
<i>Рассказ третий.</i> Максимумы и минимумы в природе (оптика)	27
<i>Рассказ четвертый.</i> Максимумы и минимумы в геометрии	35
<i>Рассказ пятый.</i> Максимумы и минимумы в алгебре и анализе	45
<i>Рассказ шестой.</i> Задача Кеплера	56
<i>Рассказ седьмой.</i> Брахистохрона	63
<i>Рассказ восьмой.</i> Аэродинамическая задача Ньютона ..	75
Часть вторая. Методы решения экстремальных задач ..	92
<i>Рассказ девятый.</i> Что такое функция?	92
<i>Рассказ десятый.</i> Что такое экстремальная задача? ..	105
<i>Рассказ одиннадцатый.</i> Экстремумы функций одной переменной	113
<i>Рассказ двенадцатый.</i> Экстремумы функций многих переменных. Принцип Лагранжа	126
<i>Рассказ тринадцатый.</i> Снова порешаем!	137
<i>Рассказ четырнадцатый.</i> Что было дальше в теории экстремальных задач?	164
<i>Рассказ пятнадцатый и последний</i>	210
Список литературы	219

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой... доступной только величайшему искусству.

Б. Рассел

Следовать за мыслями великого человека есть наука самая занимательная.

А. С. Пушкин

Рассказ первый

ЗАЧЕМ РЕШАЮТ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ?

В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Л. Эйлер

Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин... и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.

П. Л. Чебышёв

...Хочется дойти до самой сути.

Б. Л. Пастернак

О максимумах и минимумах мы узнаем в школе. Вот одна старинная задача, которую вы могли решать на уроках геометрии.

Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l . Требуется найти на l такую точку D , чтобы сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей (рис. 1).

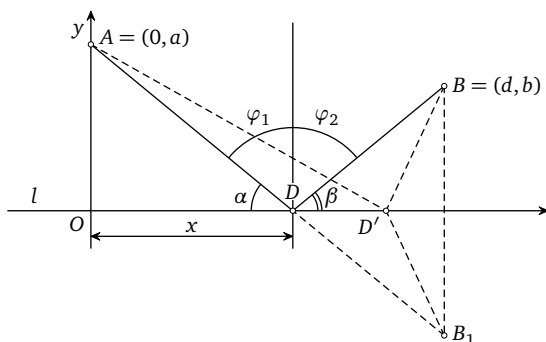


Рис. 1

Здесь надо найти наименьшее значение, т. е. *минимум*. Во многих задачах требуется найти *максимум*, т. е. наибольшее значение чего-нибудь. Оба понятия — максимум и минимум — объединяются единым термином — *экстремум*, что по-латыни означает «крайнее». Задачи на отыскание максимума и минимума называются *экстремальными задачами*. (Почти тот же самый смысл вкладывается в название задачи *оптимизации*.) Методы решения и исследования различного рода экстремальных задач составляют специальные разделы математического анализа. Они объединяются в общую главу, называемую *теорией экстремальных задач*.

Здесь наша цель — обсудить два вопроса: зачем решают задачи на максимум и минимум и из каких компонентов складывается теория экстремальных задач.

Выше была поставлена геометрическая задача. Ее можно встретить почти в каждом учебнике геометрии. Когда же она появилась впервые? И зачем?

Считают, что автором этой задачи является известный математик античности Герон Александрийский. (Далее мы называем ее *задачей Герона*. О Героне мы все знаем благодаря формуле площади треугольника, носящей его имя.) Книга, где была помещена эта задача, называлась «О зеркалах». О времени ее написания идут споры, но большинство исследователей сходятся на том, что она написана в I веке до н. э. Сам труд Герона не сохранился, и о нем известно из комментариев к нему, написанных позже. Думаю, что читатель уже слышал про задачу

Герона и решал ее. Я привел ее потому, что нам она будет очень полезна для разного рода иллюстраций.

Вспомним, как решается задача Герона.

Пусть B_1 — точка, симметричная B относительно прямой l . Соединим A с B_1 . Тогда точка D пересечения AB_1 с прямой l будет искомой (см. рис. 1).

Действительно, для любой точки D' , отличной от D , имеет место неравенство

$$|AD'| + |D'B| = |AD'| + |D'B_1| > |AB_1| = |AD| + |DB_1|. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $[AB]$ — отрезок, соединяющий точки A и B , $|AB|$ — длина отрезка $[AB]$, $AB \parallel CD$ — прямая AB параллельна прямой CD .

В неравенстве (1) мы использовали свойства симметрии, из которых следуют равенства $|DB| = |DB_1|$, $|D'B| = |D'B_1|$ и неравенство треугольника $|AD'| + |D'B_1| > |AB_1|$. Задача решена.

Отметим: искомая точка D обладает тем свойством, что угол α равен углу β (см. рис. 1), а также угол φ_1 равен углу φ_2 или, как говорят, *угол падения равен углу отражения*.

Попробуйте теперь, используя идею, заложенную в только что проведенном рассуждении, решить следующие задачи.

Задача 1. Дан угол и точка C внутри него. Найти точки A и B на сторонах угла так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

Задача 2. Дан угол и две точки C и D внутри него. Найти точки A и B на сторонах угла так, чтобы сумма длин $|CA| + |AB| + |BD|$ была наименьшей.

Но вернемся к задаче Герона. Герон исследует в своей книге законы отражения света и прилагает итоги своих размышлений к вопросам, связанным со свойствами зеркал. В частности, он доказывает, что параболическое зеркало фокусирует пучок лучей, параллельных оси параболы.

В ту пору законы природы старались постичь умозрительно, с помощью логических рассуждений, не прибегая к эксперименту. У нас еще будет повод поговорить о зарождении современной науки, опирающейся на опыт. Первым экспериментатором в истории науки был Галилей, который жил в XVII веке, Герон же при объяснении законов отражения искал для них

логические основания. Он высказал предположение, что природа действует к р а т ч а й ш и м п у т е м. Вот как пишет об этом один из его комментаторов Дамианос (VI век н. э.): «Герон... показал, что прямые, наклоненные под равными углами, являются самыми меньшими из всех промежуточных, образующих наклоны с одной и той же стороны от одной и той же прямой. Доказывая это, он говорит, что если природа не хочет попусту обводить луч зрения, то она изломит их под равными углами».

Исследователи истории науки полагают, что здесь впервые прозвучала мысль о том, что природа управляется *экстремальными принципами*. Идею Герона развил Ферма. (На этом мы подробнее остановимся дальше — в третьем рассказе.) Ферма вывел известный к тому времени закон преломления света, исходя из допущения, что траектория распространения света от одной точки до другой в неоднородной среде характеризуется тем, что вдоль нее т р а т и т с я н а и м е н ь ш е е в р е м я. Начиная с этого момента, идея экстремальности проявлений природы становится путеводной звездой всего естествознания. В подтверждение и были приведены в качестве эпиграфа слова Эйлера. Отложим пока обсуждение удивительности этого феномена, но факт остается фактом: траектории света и радиоволн, движения маятников и планет, течения жидкостей и газов и многие другие движения выделяются из многообразия всех возможных движений тем, что они являются решениями некоторых задач на максимум или минимум. Это обстоятельство оказывается плодотворным средством математического описания природы.

Вот в чем состоит первая причина, побуждающая решать задачи на максимум и минимум и развивать теорию экстремальных задач. Она привела в XVIII веке к созданию специального раздела этой теории, который был назван *вариационным исчислением*.

Вторая причина кроется в нас самих. Людям свойственно стремление к лучшему, и потому им всегда хочется выбрать оптимальную из имеющихся возможностей. Случается, что математика может здесь помочь.

Обсудим это, и пусть снова задача Герона послужит нам примером. Иногда в учебниках ей придают вид проблемы,

возникающей на практике. Тогда прямая l становится, скажем, прямолинейным участком железной дороги, точки A и B — городами, точка D — железнодорожной платформой. И ставится вопрос: *где следует поставить платформу, чтобы соединяющие ее с городами прямолинейные шоссейные участки имели наименьшую суммарную длину?*

Вот еще несколько геометрических задач, которые могут иметь прикладное значение. Попробуйте продумать их самостоятельно.

Задача 3. Пусть имеются три города — A , B и C . Требуется указать такое место D , чтобы суммарная длина прямолинейных участков шоссе, соединяющих D с A , B и C , была минимальной.

Задача 4. То же самое, что и в задаче 3, но для четырех городов.

Задача 5. Изменится ли решение предыдущей задачи, если поставить вопрос о наименьшей длине шоссейной дороги, соединяющей 4 города, и при этом не уточнено, что все пути должны соединяться в одной точке?

Конечно, такого рода задачи представляют собой лишь модели реальных жизненных ситуаций. На практике все обстоит гораздо сложнее: и участки железной дороги не бывают прямолинейными, и шоссе не строят строго по прямым, и «сумма расстояний» в чистом виде редко бывает «критерием оптимальности». Но несомненно, что и при строительстве железных, шоссейных или иных дорог, равно как и при строительстве газо- и нефтепроводов, и при многом другом, обычно возникает вопрос о том, как это осуществить наиболее целесообразно, скажем, наиболее дешево.

Такие проблемы постоянно возникают в хозяйственной деятельности. Все время приходится изыскивать или самый дешевый, или самый быстрый, или самый короткий, или самый экономичный способ достижения цели.

Приведем пример проблемы оптимизации экономического содержания. Пусть имеются базы с некоторым продуктом, магазины и автопарк. Как следует диспетчеру автопарка организовать доставку необходимого продукта в магазины наиболее экономично? (Такого типа задачи называются «транспортными». Впоследствии мы уточним их постановку.) При решении

сходных вопросов приходится обращаться к математике. Методы, разработанные для решения задач на максимум и минимум к середине XX века, оказались недостаточными для решения подобных проблем.

Выяснилось, в частности, что во многих задачах экономического содержания большую роль играет понятие *выпуклости* — там часто встречаются выпуклые и даже линейные функции и множества. Пришлось существенно развить теорию выпуклых множеств и функций. Эта теория получила даже специальное название — *выпуклый анализ*. Были созданы и новые направления в теории экстремальных задач — *линейное* и *выпуклое программирование*. Начала этих направлений были заложены в 1930-е годы советским математиком Л. В. Канторовичем.

Большое число задач оптимизации возникает в технике. Это задачи управления технологическими процессами, приборами, системами. Вот пример. Пусть имеется тележка, движущаяся прямолинейно без трения по горизонтальным рельсам. Тележка управляется внешней силой, которую можно изменять в заданных пределах. Требуется остановить тележку в определенном положении в кратчайшее время. Эта задача называется *простейшей задачей о быстродействии в автоматическом регулировании*. Очень много задач возникло в химической промышленности, в космонавтике и т. п. При этом выяснилось также, что методы вариационного исчисления недостаточны для решения этих задач. Пришлось создавать новую главу, дополняющую вариационное исчисление. Она получила название *оптимального управления*.

Вот и вторая причина, заставляющая нас решать задачи оптимизации и развивать теорию экстремальных задач, — желание «удовлетворить требованиям практики», о котором говорил Чебышёв.

Но этими двумя причинами нельзя объяснить всего.

В следующем рассказе речь пойдет о древнейшей задаче на максимум и минимум — о классической изопериметрической задаче. Около двадцати пяти веков назад в Древней Греции было открыто замечательное свойство круга — среди замкнутых кривых заданной длины охватывать наибольшую площадь. Вы, наверное, решали в школе задачи, описывающие

аналогичные свойства многоугольников. Вспомним две из них.

Задача 6. Найти треугольник заданного периметра, имеющий наибольшую площадь.

Задача 7. Доказать, что квадрат имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников с заданным периметром.

Вопрос, равносильный последней задаче, рассматривался еще в «Началах» Евклида; решением этой же задачи Ферма проиллюстрировал свой метод нахождения максимумов и минимумов, известный нам как теорема Ферма.

Зачем же ставились и для чего решались такие задачи? Что привлекает в них? Почему в большинстве книг по геометрии авторы так любят обсуждать задачи на максимум и минимум?

Это не так легко объяснить, но факт остается фактом, что на протяжении всей истории математики задачи на экстремум вызывали интерес и желание решать их. Может быть, все дело в том, что человеку свойственно стремление к совершенству, в том, что имеется какой-то таинственный стимул постижения «самой сути»? А может быть, в экстремальных задачах всегда или, по крайней мере, часто присутствует что-то изящное, привлекательное, нечто от той красоты, о которой говорит Рассел? И именно это побуждает нас решать задачи на максимум и минимум?

Сказанного достаточно, чтобы понять важность и увлекательность избранного нами предмета.

Но, может быть, нелишне сказать о временных границах наших рассказов. Первые задачи на максимум и минимум были поставлены в очень далекие времена: классическая изопериметрическая задача обсуждалась в V веке до н. э. О ней мы поговорим в следующем рассказе. А в предпоследнем, четырнадцатом, рассказе мы обсудим проблемы, которые возникают в наши дни.

Долгое время каждая задача на экстремум решалась индивидуально. В XVII веке явственно стала ощущаться необходимость создания каких-то общих методов. Такие методы были разработаны Ферма, Ньютоном, Лейбницем и другими — сначала для одной, потом для нескольких, а затем и бесконечного числа переменных. В итоге сформировались основные разделы теории экстремальных задач: *математическое программи-*

рование, т. е. теория конечномерных задач оптимизации, *выпуклое* (в том числе линейное) *программирование* (где изучают выпуклые задачи оптимизации), *вариационное исчисление* и *теория оптимального управления*.

Эта книга состоит из двух частей. В первой собраны старинные задачи, поставленные и решенные, как правило, до того, как были созданы первые общие методы. Во второй части рассказывается о некоторых методах теории экстремальных задач.

В первой части обсуждаются задачи, связанные с именами крупнейших математиков разных времен — Евклида, Архимеда, Ферма, Кеплера, Гюйгенса, И. Бернулли, Ньютона, Лейбница. Я не отказал себе в удовольствии «следовать за мыслями» этих великих людей.

Во второй же части... Но об этом пока еще рано говорить.

Рассказ второй

ДРЕВНЕЙШАЯ ЗАДАЧА — ЗАДАЧА ДИДОНЫ

Столько купили земли и дали ей имя Бирса,
Сколько смогли окружить бычьей шкурой.

Вергилий. Энеида

Прекраснейшим телом является шар, а прекраснейшей
плоской фигурой — круг.

Пифагор

Эпиграфом к нашему рассказу поставлены «из Энеиды два стиха» одного из величайших поэтов Древнего Рима — Публия Вергилия Марона. Как и всякое бессмертное творение, «Энеида» повествует о страстях человеческих, о добре и зле, о роке и страдании, о коварстве и любви, о жизни и смерти. Приведенные строки относятся к событию, произошедшему, если верить преданию, в IX веке до н. э. Вспомним легенду, воспроизведенную в «Энеиде».

Финикийская царевна Дидона, спасаясь от преследований своего брата, отправилась на запад вдоль берегов Средиземного моря искать себе прибежище. Ей приглянулось одно место на побережье нынешнего Тунисского залива. Дидона повела переговоры с местным предводителем Ярбом о продаже земли. Запросила она совсем немного — столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Дидоне удалось уговорить Ярба. Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на мелкие тесемки, связала их воедино и окружила большую территорию, на которой основала крепость, а вблизи от нее — город Карфаген. Там ожидали ее впоследствии неразделенная любовь и мученическая смерть.

Этот эпизод дает повод задуматься над вопросом: сколько же земли можно окружить бычьей шкурой?

Почему мы начинаем именно с этой задачи? Ведь решение ее довольно сложно. Казалось бы, следовало начинать с более простых вещей. Но я все-таки выбираю другой путь. Здесь, в этой части, я буду вести вас не от простого к сложному, а от далекого прошлого к нашим дням и потому начать хочу «с самого начала». Разве не удивительно, что в те «баснословные года» ставились и решались столь трудные и глубокие пробле-

мы? Как мало знали наши предшественники в сравнении с тем, что знаем мы с вами! Но они шли к цели и достигали ее!

Итак, сколько же земли можно окружить бычьей шкурой? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно правильно математически поставить задачу. Современный математик скажет так:

Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.

Эту задачу и называют задачей Дидоны или классической изопериметрической задачей. (Изопериметрические фигуры — это фигуры, имеющие одинаковый периметр.)

Мы пока обошлись только словами, и человека с достаточным уровнем математической культуры такая формулировка вполне удовлетворит, ибо он знает, что такое кривая, длина и площадь. На придание же точного смысла этим словам ушло свыше двух тысяч лет. Чтобы как следует объяснить эти термины, следовало бы написать отдельную книгу. Не будем чрезмерно углубляться в это и подойдем к нашей задаче «наивно», как подходили к ней древние (и как должна была на практике подойти к ней сама царица Дидона).

Попробуем только обойтись без шкуры быка. Отмотаем от катушки кусочек нити. Отрежем его и свяжем концами. Положим эту связанную нить на лист бумаги. Получилась *плоская замкнутая кривая*. Если теперь вырезать кусок бумаги по контуру нити, получится образ *площади, охватываемой этой кривой*. Эту площадь можно измерить. Измерение можно произвести достаточно точно, если наш лист был листом миллиметровки. Теперь уже можно понять и вопрос задачи: требуется выяснить, *как следует положить нашу нить, чтобы она охватывала наибольшую площадь*. Мы докажем чуть позже, что кривая, решающая классическую изопериметрическую задачу, — это окружность. Вергилий при описании действия Дидоны употребил глагол «circumdare» (окружать), содержащий корень «circus» (круг), что позволяет думать, что классическую изопериметрическую задачу сама Дидона решила правильно.

Из истории классической изопериметрической задачи. Многие историки полагают, что это — первая экстремальная задача, обсуждавшаяся в научной лите-

ратуре. Вместе с изопериметрическим свойством круга (т. е. свойством окружности охватывать наибольшую площадь среди изопериметрических фигур) античные геометры отмечали *изопифанное свойство шара* (т. е. свойство сферы охватывать наибольший объем среди изопифанных фигур — фигур, имеющих равную площадь поверхности). С этим свойством — наибольшей вместимости — связаны представления о круге и шаре как воплощении геометрического совершенства (вспомним слова Пифагора, взятые эпиграфом к этому рассказу). Вот еще одно подтверждение той же мысли. Великая книга Н. Коперника начинается со слов: «Прежде всего мы должны заметить, что мир является шарообразным или потому, что эта форма совершеннейшая из всех и не нуждается ни в каких скрепах, и вся представляет цельность, или потому, что эта форма среди всех других обладает наибольшей вместимостью, что более всего приличествует тому, что должно охватить и сохранить все».

Сейчас невозможно сказать, когда впервые была высказана мысль о наибольшей вместимости круга и шара. Во всяком случае, Аристотель (IV век до н. э.) — один из величайших мыслителей в истории человечества — пользуется этими фактами, как известными. А кто же (не считая Дидоны) на самом деле решил классическую изопериметрическую задачу? Литература, посвященная изопериметрическому свойству круга и изопифанному свойству шара, огромна. Из необозримого числа работ назовем одну книгу — монографию немецкого геометра В. Бляшке [4]. Там есть и указания исторического характера. Среди тех, кто дал решение изопериметрической и изопифанной задач, древние авторы называли и Архимеда. Считается, что первые *строгие* доказательства максимального свойства круга и шара дал Г. А. Шварц. Если вам захочется проследить «историю „изопериметрической задачи“, которая началась в седой древности легендой о карфагенской царице Дидоне, до господина тайного советника Германа Амандуса Шварца из Берлина», вы можете обратиться к статье Бляшке [5] (слова, заключенные выше в кавычки, взяты из [4]).

Но на самом деле Шварцу, а до него Вейерштрассу и после него — самому Бляшке, как и многим другим математикам XIX и XX столетий, принадлежит (в отношении классической

изопериметрической задачи) лишь оформление идей своих далеких предшественников, оформление, способное удовлетворить современным требованиям строгости. Основные же пути решения изопериметрической задачи были абсолютно правильно намечены еще в античные времена. Сейчас мы расскажем об одном из таких путей, принадлежащем Зенодору — математику, жившему, как считают, где-то между III веком до н. э. и I веком н. э.

Зенодор совершенно строго, на современном уровне этого понятия, доказывает следующее утверждение.

Если существует плоский n -угольник, имеющий наибольшую площадь среди всех n -угольников с заданным периметром, то он должен быть равносторонним и равноугольным.

Плоский n -угольник, имеющий наибольшую площадь среди всех изопериметрических с ним n -угольников, будем называть (для краткости) *максимальным n -угольником*. Используя этот термин, теорему Зенодора можно сформулировать короче.

Максимальный n -угольник (если он существует) должен быть правильным.

Теорема Зенодора является следствием двух лемм.

Л е м м а 1. Максимальный n -угольник должен быть равносторонним.

Л е м м а 2. Максимальный n -угольник должен быть равноугольным.

Излагая работы наших далеких предшественников, я не буду, как правило, воспроизводить их буквально, не стану сохранять обозначения и стиль авторов или стремиться приводить именно авторские доказательства. Мне хотелось бы воспроизвести лишь основное направление мысли и обобщить дух рассуждений, изменяя и модернизируя формулировки и доказательства. Так и здесь я приведу обработки доказательств лемм 1 и 2. При этом двукратно будет использовано решение задачи Герона.

Прежде чем приступить к доказательствам, нужно сделать одно замечание.

Следует упомянуть об обстоятельстве, не оговоренном Зенодором. Покажем, что *невыпуклый многоугольник не может быть максимальным*. Действительно, если, скажем, угол

$A_1A_2A_3$ больше 180° (рис. 2), то, отразив вершину A_2 относительно прямой A_1A_3 и рассмотрев многоугольник $A_1A'_2A_3\dots A_n$, где A'_2 — образ A_2 , мы получим изопериметрический многоугольник большей площади, чем площадь $A_1A_2\dots A_n$. Теперь уже можно привести доказательства.

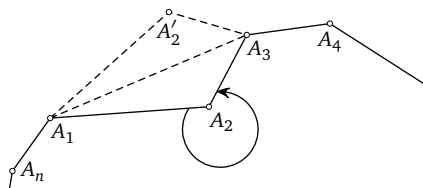


Рис. 2

Доказательство леммы 1. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — максимальный n -угольник. Тогда он, как было отмечено, является выпуклым. Допустим, что не все его стороны имеют одинаковые длины, и придём к противоречию. Пусть две какие-либо смежные стороны, скажем, A_1A_2 и A_2A_3 , не равны между собой по длине. Через вершину A_2 проведём прямую l , параллельную A_1A_3 (рис. 3). Рассмотрим задачу Герона для прямой l и точек

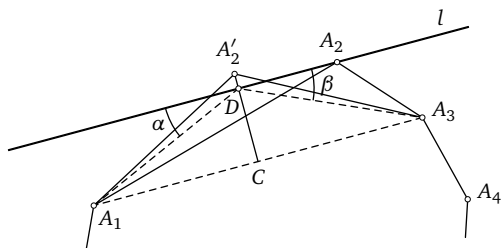


Рис. 3

A_1 и A_3 об определении точки D на l , для которой сумма расстояний $|A_1D| + |A_3D|$ была бы минимальной. В предыдущем пункте было доказано, что в искомой точке D угол α равен углу β . Но угол α равен углу DA_1A_3 , а угол β равен углу DA_3A_1 по свойству накрест лежащих углов при параллельных. Таким образом, треугольник A_1DA_3 — равнобедренный и, значит, точка D отлична от точки A_2 . Вместе с тем:

а) площадь $\triangle A_1DA_3$ равна площади $\triangle A_1A_2A_3$, ибо у них одинаковые высоты и основания;

б) сумма боковых сторон треугольника A_1DA_3 меньше суммы сторон A_1A_2 и A_2A_3 , ибо $D (\neq A_2)$ есть решение задачи Герона. Построим теперь равнобедренный треугольник $A_1A'_2A_3$, у которого $|A_1A'_2| + |A'_2A_3| = |A_1A_2| + |A_2A_3|$. Его площадь, разумеется, больше площади $\triangle A_1A_2A_3$, так как высота $|A'_2C|$ больше высоты $|DC|$ (в силу того, что наклонная $|A_1A'_2|$ длиннее наклонной $|A_1D|$), значит, площадь многоугольника $A_1A'_2\dots A_n$ больше площади изопериметрического с ним многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, что противоречит максимальности последнего многоугольника. Лемма 1 доказана.

С л е д с т в и е. Из леммы 1 вытекает, что максимальным треугольником является равносторонний и что максимальный четырехугольник должен быть ромбом. Из последнего заключения и из рис. 4 немедленно можно вывести, что максимальный четырехугольник на самом деле — квадрат.

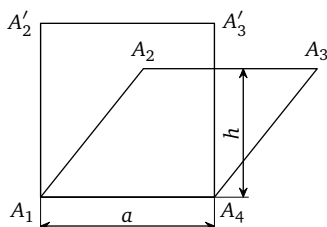


Рис. 4

Доказательство леммы 2. Пусть снова $A_1A_2\dots A_n$ — максимальный n -угольник. Мы уже знаем (лемма 1), что все стороны его равны, и помним, что он выпуклый. Допустим теперь, что не все его углы одинаковы, и придем к противоречию. Если не все углы равны, то существуют два неравных смежных угла $\alpha \neq \beta$. Докажем, что тогда существуют и два неравных несмежных угла. Рассмотрим последовательно расположенные углы многоугольника $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ (их не меньше пяти). Если $\gamma \neq \alpha$ или $\delta \neq \beta$, то мы достигли цели, так как углы α и γ (или β и δ) — несмежные. Остается рассмотреть случай $\alpha = \gamma, \beta = \delta, \alpha \neq \beta$, когда последовательность имеет вид: $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \epsilon, \dots$. Но здесь не равны друг другу два несмежных угла — первый и четвертый.

Таким образом, при сделанном предположении можно считать, что существуют два непересекающиеся внутренними частями треугольника DEF и PQR (рис. 5), каждый из которых

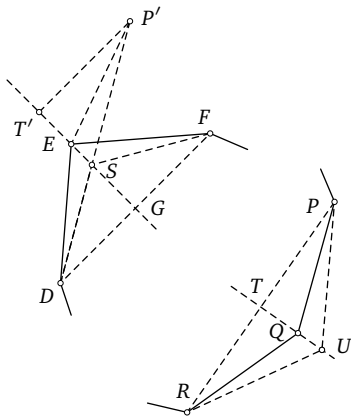


Рис. 5

образован подряд идущими вершинами нашего n -угольника, причем угол E меньше угла Q . В силу того, что $|DE| = |EF| = |PQ| = |QR|$, и из-за неравенства между углами, получаем, что $|DF| < |PR|$. Опустим из E и Q перпендикуляры EG на DF и QT на PR . К продолжению отрезка EG приложим треугольник $ET'P'$, равный (конгруэнтный) треугольнику QTP (точка T переходит в T' , P — в P' , Q — в E). И снова рассмотрим задачу Герона для прямой $T'G$ и точек P' и F . Пусть S — решение задачи Герона, т. е. точка на $T'G$, для которой сумма расстояний от P' до S и от S до F минимальна. В силу того, что угол $P'ET'$ (равный половине угла Q) больше угла FEG (равного половине угла E), точка S не совпадает с точкой E (ибо углы $P'ST'$ и FSG равны) и, более того, S лежит на отрезке EG . Отложим теперь на прямой QT отрезок TU , равный по длине отрезку $T'S$, и рассмотрим треугольники DSF и PUR . Сумма боковых сторон этих треугольников меньше суммы боковых сторон исходных треугольников DEF и PQR . Действительно,

$$\begin{aligned} |DS| + |SF| + |PU| + |UR| &= 2(|SF| + |SP'|) < 2(|FE| + |EP'|) = \\ &= |DE| + |EF| + |PQ| + |QR|. \end{aligned}$$

Мы пользовались тем, что наши треугольники равнобедренные, и тем, что S — решение задачи Герона. С другой стороны, площадь $\triangle P'ES$ больше площади $\triangle ESF$, ибо у первого высота равна $|P'T'| = \frac{1}{2}|PR|$, у второго высота равна $|FG| = \frac{1}{2}|DF|$, а по доказанному уже $|DF| < |PR|$. Отсюда следует, что сумма площадей треугольников DSF и PUR больше суммы площадей первоначальных треугольников DEF и PQR . Действительно,

$$S_{\triangle DSF} + S_{\triangle PUR} = S_{\triangle DEF} - 2S_{\triangle ESF} + S_{\triangle PQR} + S_{\triangle ESP'} > S_{\triangle DEF} + S_{\triangle PQR}. \quad (1)$$

Значит, n -угольник $DSF...PUR...$ имеет меньший периметр и большую площадь, чем наш изначальный n -угольник $DEF...PQR...$. Теперь можно с любым из треугольников (DSF или PQR) поступить точно так же, как мы поступили с $\triangle A_1DA_3$ при доказательстве леммы 1, т. е. надстроить его, уравнивая периметры многоугольников и сделав площадь нового многоугольника еще большей, чем площадь многоугольника $DEF...PQR...$, следовательно, этот многоугольник — не максимальный. Лемма 2 полностью доказана, а с нею доказана и теорема Зенодора. Осталось вывести из нее решение классической изопериметрической задачи.

Лемма о существовании максимального n -угольника. Мы доказали, что если максимальный n -угольник существует, то он правильный. Но существует ли максимальный n -угольник? А вдруг нет? Тогда все пойдет прахом. А ведь не всякая функция имеет максимум. Например, функция $f(x) = -(1+x^2)^{-1}$ не достигает своего наибольшего значения (подробнее этот пример разобран в одиннадцатом рассказе).

Вопросы существования решений не были предметом рассмотрения древних авторов. Значение проблем существования и методы доказательства теорем существования были поняты примерно сто лет назад. В дальнейшем нам придется не раз касаться этих вопросов. Здесь же мы приведем без доказательства следующее утверждение (которое Зенодор, по-видимому считал само собой разумеющимся).

Лемма 3. Максимальный n -угольник существует.

Отсюда из лемм 1 и 2 следует

Т е о р е м а 1. *Максимальный n -угольник является правильным n -угольником.*

Теперь осталось уже совсем немного.

З а в е р ш е н и е д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть P — периметр правильного n -угольника, а S — его площадь. Мы знаем из геометрии, что $P = 2nR \sin(\pi/n)$, где R — радиус описанного круга, $S = rP/2$, где r — радиус вписанного круга. При этом $r = R \cos(\pi/n)$. Сопоставляя все это, приходим к формуле, связывающей S и P :

$$P^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot S = 0.$$

Теорема 1 означает, что если P — периметр некоторого произвольного n -угольника, а S — его площадь, то имеет место неравенство

$$P^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot S \geq 0. \quad (2)$$

Из неравенства $\operatorname{tg} \alpha \geq \alpha$ (верного для $0 \leq \alpha < \pi/2$) и из (2) получим неравенство

$$P^2 - 4\pi S \geq 0, \quad (3)$$

справедливое для любого n -угольника и любого n . Отметим, что для любого круга имеет место очевидное равенство

$$P^2 - 4\pi S = 0, \quad (4)$$

где P — длина окружности, а S — площадь круга.

Теперь сформулируем лемму, связывающую все понятия, участвующие в формулировке классической изопериметрической задачи, с понятием n -угольника. Она означает, что длину кривой и площадь, охватываемую ею, можно с любой степенью точности приблизить периметром и площадью n -угольника.

Л е м м а 4. *Для любой замкнутой плоской кривой длины P^* , охватывающей площадь S^* , и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти некоторый n -угольник, периметр P и площадь S которого удовлетворяют неравенствам*

$$|P - P^*| \leq \varepsilon, \quad |S - S^*| \leq \varepsilon. \quad (5)$$