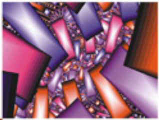
С. Лавров

bhv
www.bhv.ru
www.bhv.kiev.ua

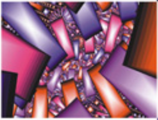
ПРОГРАММИРОВАНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, СРЕДСТВА, ТЕОРИЯ

МАСТЕР

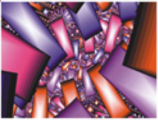
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Математическая логика
Теория множеств
Теория вычислимости



Основные понятия и
конструкции языков
программирования



Анализ свойств
программ

Святослав Лавров

Программирование. Математические основы, средства, теория

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2002

УДК 681.3.06

Современное программирование излагается как искусство заставить компьютер решить задачу, возникшую перед человеком. Даны единые основания математики и программирования, краткие сведения из области графов, теории вероятностей и информации (в ее математическом толковании). Приведены основные понятия и конструкции современных языков программирования. Рассмотрен ряд вопросов теории программирования с упором на математическую семантику языковых конструкций.

Для студентов и преподавателей вузов

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зав. редакцией	*Наталья Таркова*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Ангелины Лужиной*
Зав. производством	*Николай Тверских*
Фото на обложке	*Адама Бартоса*

Оригинал-макет подготовлен С. С. Лавровым

Лавров С. С.
Программирование. Математические основы, средства, теория. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 320 с.: ил.

ISBN 5-94157-069-4

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.02.02.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,51.
Доп. тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар, № 77.99.1.953.П.950.3.99 от 01.03.1999 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН.
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

Содержание

Введение

Современное программирование, понимаемое как искусство описать задачу, возникшую перед человеком, и заставить машину (компьютер) ее решить, остро нуждается как в средствах описания способа решения задачи, так и в средствах формализации понятий и связей между ними в различных областях. Как и многие другие виды человеческой деятельности, оно может быть уподоблено сооружению, нуждающемуся в солидном фундаменте, надежных стенах и, хотя бы легкой, крыше. Каждому из этих элементов в книге выделено по главе, их краткие заголовки вынесены в ее название.

Под фундаментом программирования понимаются его математические основы — глава 1. На самом деле математика и программирование выстроены на общем фундаменте, складывающемся из таких дисциплин, как математическая логика, теория множеств и теория вычислений. Их дополняют краткие сведения из области графов, вероятностей и информации (в ее математическом смысле).

Фундамент оставляет, как ему и положено, впечатление чего-то солидного и незыблемого. В какой-то степени так оно и есть. Но покоится этот фундамент не на скальном основании, а на зыбком грунте естественного языка, общечеловеческих представлений и здравого смысла. Грунтовые воды делают свое дело, заставляя все возведенное на нем пошатываться, а временами — разрушаться. Об особенностях и последствиях этого процесса также рассказывается в книге. Однако у автора (как, по-видимому, у всех пишущих на эти темы) нет ответа на некоторые возникающие по ходу изложения вопросы. Иногда это оговаривается явно, иногда сомнительные высказывания, оценки или эпитеты берутся в кавычки, иногда автор обходит такие темы молча.

А в какой мере математика вообще способна послужить основой для чего бы то ни было? Р. Фейнман в своем знаменитом курсе физики, говоря о связи физики с другими науками, выразился так: «...на замечательной связи, объединяющей физику с математикой, мы не задержимся. (Математика, с нашей точки зрения, не наука в том смысле, что она не относится к *естественным* наукам. Ведь мерило ее справедливости отнюдь не опыт.) Кстати, не все то, что не наука, уж обязательно плохо. Любовь, например, тоже не наука.»

Стены программирования со встроенным в них оборудованием — это сложившиеся в нем понятия и конструкции — глава 2. Вместе взятые, они для множества людей создают условия для выпуска весьма разнообразной продукции. По бокам постоянно вырастают новые корпуса. А в старом центральном здании трудятся люди, которые хранят проверенные жизнью традиции и в меру сил передают молодежи свой опыт и знания. Но хорошо хранить верность традициям, лишь пока они не окостенели, не начали мешать творчеству, не стали бедствием сродни оголтелому новаторству.

Крыша над зданием призвана защитить людей, в нем находящихся и работающих, хотя бы от непогоды. При стихийных бедствиях ни крыша, ни стены не помогают. Ураганы срывают крыши над корпусами, при наводнениях вода заливает низко расположенные помещения, землетрясения разрушают здания целиком, особенно если они возведены недобросовестными строителями, к тому же — наспех.

Люди ищут защиту в науке (по Фейнману — не естественной), в теории — глава 3, придающей их деятельности солидность или хотя бы видимость солидности. Но с наукой временами случаются казусы, при которых ее служителям приходится объяснять не то, чему была посвящена их деятельность, а причины ее неудач. Крыши, увы, имеют обыкновение протекать.

В этих заметках местами ведется довольно длинный разговор вокруг хорошо известных, классических, формул. При всем почтении к формулам следует придавать гораздо большее значение понятийному контексту, в котором те или иные формулы получены и могут быть применены. Сами формулы легко найти в справочнике. Контекст же в работах, написанных в «академическом» стиле, часто лишь скупо проговаривается, а то и подразумевается (принимаем такую-то систему аксиом или такие-то допущения — и все). А его надо знать и понимать. Использование формул вне породившего их контекста приводит, как говорится, к непредсказуемым последствиям.

Если после всего сказанного читатель не утратил желание поближе познакомиться с книгой, то — Бог в помощь.

Книга написана по материалам курсов лекций, читавшихся в 70-х – начале 80-х годов на математико-механическом факультете Ленинградского (в то время) государственного университета. Раздел (глава) 2 представляет собой существенную переработку работы [27]. Глава 3 — менее существенную переработку вышедшей небольшим тиражом книги [28].

Книга делится на разделы трех уровней. Разделы первого уровня часто называются главами, как это уже было сделано выше. Ссылки на формулы внутри разделов даются по их номерам. Ссылка вида (1.2.3–4) относится к формуле (4) из раздела 1.2.3.

Пунктуация во фрагментах программ и некоторых других формальных текстах следует правилам используемого языка, а не русской грамматики. Конец доказательства теоремы или леммы отмечен знаком $\lhd$.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить В. Тумасониса, чьи замечания помогли значительно улучшить изложение главы 2, Р. И. Подловченко за многочисленные полезные замечания по главе 3, членов кафедры МО ЭВМ мат.-мех ф-та СПбГУ, содействовавших своим интересом написанию этой книги, среди них особо — М. В. Дмитриеву за отчаянные попытки сломить сопротивление чиновников из издательства СПбУ к изданию главы 3 в виде отдельной книги, а также В. П. Котлярова и его сотрудников (СПбГТУ) за внимание к работе и за содействие к появлению в конце концов издания [28].

Но, может быть, более всего я должен благодарить терпеливых слушателей моих лекций. А у бывших студентов-первокурсников матмеха ЛГУ я, вероятно, должен просить прощения за все несовершенства курса математической логики, который я им читал из года в год.

1. Математические основы

Здесь охвачены лишь начальные сведения из некоторых математических дисциплин с некоторым уклоном в сторону математической логики (причины объяснены во Введении, в остальном учитывались потребности последующих глав).

1.1. Формальные языки

1.1.1. Неформальный взгляд на формализацию

Математика состоит из ряда математических дисциплин или *теорий*. Некоторые из них так и называются: «теория чисел», «теория вероятностей» и т. п. Примерами, более знакомыми читателю, могут служить элементарная арифметика и элементарная геометрия, изучаемые в средней школе. Их мы и будем использовать ниже в качестве источников иллюстративных примеров.

Математическую теорию можно строить с разной степенью формализации. Первоначально математические понятия возникают как абстракции явлений реального мира. Если у Иры, Оли и Кати в руках по яблоку, то всего яблок столько же, сколько девочек. Совокупность всех упомянутых здесь яблок имеет некоторое общее свойство с совокупностью девочек. Примерно так люди пришли к понятию числа «три» и вообще к понятию натурального (положительного) числа, а заодно и к (может быть, неявному) понятию совокупности.

Сходным образом можно пояснить понятие сложения натуральных чисел (переход от чисел, характеризующих две совокупности каких-либо реальных объектов, к числу, характеризующему объединенную совокупность) и другие арифметические понятия. В геометрии понятие точки возникло как идеализация колышка, забитого в землю, или следа ножки циркуля на листе бумаги. К понятию прямой можно прийти, отвлекаясь почти от всех реальных свойств натянутой веревки или луча света, попадающего от далекой звезды в глаз наблюдателя.

Между прочим, проверка того, насколько близка форма этого луча к идеальной прямой, отличается ли сумма углов реального треугольника космических размеров от $180°$, короче — соблюдаются ли аксиомы геометрии в реальном мире, требует постановки сложнейших физических экспериментов. Не слишком ли суров был Фейнман в своих оценках? Любовь прекрасна — спора нет. Но, может быть, математика еще прекраснее? А программирование?. .

Построение и истолкование математической теории, когда каждое понятие более или менее явно подразумевает некоторые явления окружающей нас действительности, называется *содержательным*.

При таком построении за любым математическим утверждением видится совокупность разнообразных, но в чем-то сходных ситуаций реального мира. Например, формуле «$3+2=5$» может соответствовать вопрос: «У Коли есть три книги, а у Саши — две, сколько книг у них вместе?» и ответ: «Пять книг». Ссылки на подобные примеры не только допустимы, но и весьма желательны.

В школьной математике мы знакомимся и с чисто формальными методами, например, с формальными приемами преобразования выражений на уроках алгебры.

Так, в цепочке равенств

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \tag{1}$$

использован, во-первых, целый ряд равенств, выражающих свойства чисел и операций над ними, как-то:

$$\begin{cases} (x+y)z = xz + yz, & (x+y)+z = x+(y+z), \\ x-y = x+(-1)\cdot y, & x+y = y+x, \\ x = 1\cdot x, & n+(-n) = 0, \\ xy = yx, & x\cdot 0 = 0, \\ xx = x^2, & x+0 = x, \end{cases} \tag{2}$$

где вместо x, y и z могут подразумеваться любые выражения, а вместо n — любое число. Во-вторых, применен общий принцип подстановки: если выражение A содержит в себе некоторое другое выражение C (в частности, A может совпадать с C), а выражение B получается из A заменой C на равное ему выражение D, то выражения A и B равны. В роли выражений C и D могут выступать левая и правая (или наоборот) части любого из равенств (2), а в роли A — любое правильно построенное выражение. В-третьих, цепочка равенств

$$K = L = M = N$$

представляет собой сокращенную запись совокупности равенств

$$K = L,\ L = M,\ M = N.$$

В-четвертых, неявно использован еще один принцип: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$. Его двукратное применение позволяет прийти к равенству

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \tag{3}$$

Упражнение 1.1.1. Опираясь на равенства (2), обосновать равенства:

а. $x(y+z) = xy + xz$,
б. $(x-y)z = xz - yz$,
в. $x - x = 0$.

Упражнение 1.1.2. Выписать опущенные шаги цепочки (1), связанные с применением равенств $(x+y)+z = x+(y+z)$ и $x+0 = x$.

Мы не зря так подробно остановились на этом простом примере — при построении и исследовании формальных теорий, чему посвящена бóльшая часть главы 1, очень важно помнить о тех элементарных шагах преобразований формул, которые обычно подразумеваются, и уметь их восстанавливать. Кроме того, необходима именно такая степень детальности, хотя бы на некоторых шагах.

Формализация математической теории связана, прежде всего, с отказом от употребления естественного, русского или иного, языка, таящего в своих глубинах немало рифов. Например, слова «в руках по яблоку» можно понять и так: «в каждой руке по яблоку». Выбор между этими вариантами читатель должен был сделать на основе последовавшего за этим утверждения автора — для логики вещь чудовищная.

Вместо слов «от перемены мест слагаемых сумма не меняется» пишется $x + y = y + x$. Утверждение «две прямые, порознь параллельные третьей, параллельны между собой» записывается в виде $p||r \wedge q||r \Rightarrow p||q$. Но и формализованный язык должен обладать своей структурой — системой и иерархией обозначений. Так, буквами (x, y, p, ...), возможно с индексами и штрихами (например, χ_1'), обычно обозначаются объекты (числа, прямые и пр.) теории. Некоторые знаки ('$+$', '$\cdot$', ...) обозначают операции над этими объектами, другие ('$=$', '$\|$' и т. п.) — отношения между ними, третьи ('$\wedge$', '$\Rightarrow$' и др.) помогают из простых утверждений образовывать более сложные. Выражения — последовательности символов — могут обозначать объекты, возникающие в результате применения операций к другим объектам ($x + y$ — сумма чисел x и y, $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B, AB — прямая, проведенная через точки A и B и т. д.), утверждения относительно этих объектов ($x = y$, $p \| q$, $n = 0$, ...), а также комбинации или последовательности таких утверждений. Пример цепочки равенств (1) показывает, что довольно длинная цепь рассуждений может быть представлена одним формальным выражением. Правило подстановки — это иллюстрация того, как некоторый способ рассуждения

> «Воспользуемся равенством $(x + y)z = xz + yz$ для случая, когда x обозначает объект a, y — объект b, а z — объект $(a - b)$. Получим $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$.»

заменяется правилом формального преобразования выражений.

Далее, на время проведения подобных преобразований можно забыть, что буквы x, y, p, q обозначают числа или прямые, и тем более — что в понятии числа или прямой отражаются какие-то свойства окружающего мира. Однако важно, что за каждой формальной теорией стоит ее содержательный прообраз. Его факты и закономерности, разумеется, должны отражаться как в выражениях, принимаемых за исходные, так и в правилах их преобразования. Да и сам этот прообраз должен обладать хоть какой-то научной ценностью — ведь совсем нетрудно, например, строго формализовать правила игры в домино.

Занимаясь формальным преобразованием выражений, мы вправе и даже обязаны не задумываться ни над смыслом исходных, промежуточных и окончательных выражений, ни над обоснованностью правил, по которым одни выражения получаются из других. Как только мы обращаемся к смыслу, мы рискуем внести в наши формальные преобразования что-то, не предусмотренное правилами формальной теории.

Так в многовековой истории попыток вывести аксиому параллельности из других аксиом геометрии Евклида известен ряд случаев, когда на основе «здравого смысла» в доказательствах использовались утверждения, эквивалентные этой аксиоме. Разумеется, такое «доказательство» — уже не формальное доказательство (нельзя даже сказать, что оно ошибочно, так как при формальном подходе нельзя говорить о правильности или ошибочности доказательства, можно лишь отличать доказательства от недоказательств).

В чистом виде ни содержательный, ни формальный подход в математике почти не встречаются. Чисто содержательны, пожалуй, лишь математические таблицы, вроде таблиц логарифмов или простых чисел (при всей их внешней бессодержательности и строго формальном виде). Если понятие логарифма уже освоено и воспринято, то информация «$\log 2 = 0.30103$» становится просто фактом реального мира. Чисто формальны некоторые кусочки этой книги, если извлечь их из контекста. В остальном же при построении математических теорий оба подхода сопутствуют друг другу.

Естественно, что математики тяготеют к формальному построению теории, ибо на замене содержательных понятий абстрактными и обозначении их символами основан весь путь развития математики и все достигнутые ею успехи. С другой стороны, любая фраза, начинающаяся словами «Легко видеть» или «Отсюда следует», апеллирует к пониманию читателя, к его навыкам во владении формальным аппаратом, а это уже не укладывается в рамки строгой формализации. Работы, формализованные до конца, были бы чрезвычайно раздуты и совершенно не читаемы. Наконец, математик обязан соотносить свои теории с действительностью (пусть эта действительность ограничивается кругом деятельности его коллег), если он не хочет уподобить занятие наукой раскладыванию пасьянсов.

Чем же все-таки полезна формализация, почему она плодотворна в математике? То, что проделано по формальным правилам, легко поддается проверке. Если все этапы последовательных формальных преобразований выдержали проверку, то достоверность связи между исходными и окончательными выражениями сомнений не вызывает. Споры между математиками не должны возникать, если только автор доказательства может сослаться на правила, по которым выполнены все шаги доказательства. Нельзя спорить и по поводу самих правил или исходных выражений теории, ибо формальный подход исключает необходимость ссылок на смысл или истинность этих правил и выражений. Обсуждать можно только применимость той или иной математической теории к конкретной ситуации реального мира (например, применимость планиметрии к вычислению площадей протяженных участков земной поверхности; см. также пример, приводимый несколько ниже). Но некоторые математики считают, что и это не должно их интересовать, и упрекнуть их в чем-нибудь трудно.

Ну и, наконец, — это уже аргументация второй половины XX века — без строжайшей формализации и регламентации было бы невозможно прибегнуть к помощи вычислительных машин ни в точных науках, ни во многих других областях человеческой деятельности.

Одной и той же формальной теории могут быть даны различные содержательные истолкования. Совсем тривиальный пример нам дает арифметика, в которой считать можно все, что угодно: яблоки, книги, звезды, ворон и т. д. Равенство (3) оказывается справедливым при любой содержательной интерпретации обозначений a и b и операций сложения и умножения, если только в этой интерпретации истинны все равенства (2). В частности, оно справедливо в области как целых, так и рациональных, действительных или комплексных чисел.

С некоторыми оговорками оно справедливо и при некоторых других интерпретациях.

Пример. В качестве объектов рассматриваются векторы и действительные числа, обозначаемые буквами. Под сложением и вычитанием понимаются сложение и вычитание векторов либо чисел (не допуская, конечно, сложения вектора с числом), а под умножением — либо умножение чисел, либо умножение числа на вектор (или наоборот), либо скалярное (но не векторное) умножение векторов (однако, в равенстве $(xy)z = x(yz)$ по крайней мере одна из букв x, y или z должна обозначать число). Знаки операций воспринимаются в зависимости от контекста, как и символ '0', обозначающий либо число, либо нулевой вектор. Можно убедиться, что любое из равенств (2) при этих соглашениях справедливо.

Упражнение 1.1.3. Доказать, что в параллелограмме с заданными диагоналями произведение сторон на косинус угла между ними не зависит от угла между диагоналями. (Указание: обозначить векторы-диагонали через $2a$ и $2b$).

Известно много примеров, когда разные физические явления описываются одинаковыми математическими уравнениями. Это означает, что одна и та же математическая теория (исследующая свойства решений этих уравнений) допускает разные физические интерпретации.

Но, может быть, еще чаще встречаются случаи интерпретации одной математической теории внутри другой. Так, вся аналитическая геометрия — это, по сути дела, геометрическая интерпретация теории алгебраических уравнений первого и второго порядка. Достойно внимания то, что сама геометрия, включая теорию конических сечений, возникла за много веков до ее аналитической сестры, где понятию конического сечения соответствует термин «кривая второго порядка». Не только в этом случае наглядные представления раньше становятся объектом научного исследования, чем эквивалентные им формальные средства, в конечном счете быстрее приводящие к цели. Методы математического анализа применяются в геометрии, теории чисел и других математических дисциплинах.

Некоторые дисциплины (например, функциональный анализ, а также теория множеств и математическая логика, с элементами которых мы будем знакомиться в этом разделе) первоначально и возникли ради возможности интерпретации их результатов в других разделах математики. Короче говоря, обнаружилось, что математические теории, допускающие лишь одну интерпретацию, составляют скорее исключение, чем правило (даже формализованная арифметика имеет нестандартные интерпретации, существенно отличающиеся от привычной арифметики натурального ряда). Все это стимулировало развитие математических дисциплин в XX веке именно как формальных теорий, не связанных с какой-либо содержательной интерпретацией.

Наконец, заменив математические утверждения и рассуждения выражениями — последовательностями символов, мы получаем возможность сделать сами эти рассуждения (доказательства) предметом математической теории и, как уже было сказано, предметом компьютерной обработки (автоматическое доказательство теорем и т. п.). Математическая логика — это и есть такая теория. Она исследует общие свойства формальных теорий, их возможности и ограничения, а также связи между формальными теориями и их содержательными интерпретациями, трактуя, впрочем, последние тоже достаточно абстрактно. Начиная со следующего раздела, наше изложение будет становиться все более формальным.

1.1.2. Алфавиты, слова, языки

Формальные теории, не пользуясь естественным языком, нуждаются в собственном формальном языке, на котором записываются встречающиеся в них выражения. Опишем простые средства, используемые для этой цели.

Алфавит — это конечное множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, элементы которого называются *буквами* или *символами*. Любая конечная последовательность букв $b_1 \ldots b_k$, где $b_i \in A$ для $i = 1, \ldots, k$ называется *словом* в алфавите A. Слово может состоять всего лишь из одной буквы, а может и вообще не содержать букв, тогда оно называется *пустым* и обозначается λ. Число букв в слове φ называется его *длиной* и обозначается $|\varphi|$. В частности, $|\lambda| = 0$.

Над словами определена операция *сцепления*. Результатом сцепления слов $\varphi = b_1 \ldots b_k$ и $\psi = c_1 \ldots c_m$ является слово $b_1 \ldots b_k c_1 \ldots c_m$. Его мы будем обозначать $\varphi\psi$ (другими словами, для операции сцепления не будем применять никакого специального знака, подобно тому, как в школьной алгебре произведение x на y обычно обозначается просто xy, а не $x \cdot y$ и не $x \times y$). Очевидно, что $|\varphi\psi| = |\varphi| + |\psi|$.

Слова $\varphi = b_1 \ldots b_k$ и $\psi = c_1 \ldots c_m$ будем называть *равными*, если $k = m$ и $b_i = c_i$ для $i = 1, \ldots k$, т. е. когда всюду на соответствующих местах в словах φ и ψ стоят одинаковые буквы. Равенство слов φ и ψ будем обозначать $\varphi = \psi$ (предполагая, что алфавит A не содержит буквы $=$, если это не так, то вместо нее здесь надо воспользоваться иной буквой). Слова $\varphi = b_1 \ldots b_k$ и $\psi = c_1 \ldots c_m$ не равны (обозначение $\varphi \neq \psi$), если условие их равенства не выполнено, т. е. если $k \neq m$, или $k = m$, но при некотором i $(1 \leq i \leq k)$ $b_i \neq c_i$.

Очевидно, что для любого слова φ справедливы равенства $\varphi\lambda = \varphi$ и $\lambda\varphi = \varphi$, и для любых трех слов φ, ψ и χ — равенство $(\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi)$, где скобки обозначают последовательность выполнения операций сцепления. Последнее свойство (ассоциативность операции сцепления) позволяет записывать результат двух и более сцеплений без скобок, например, $\varphi\psi\chi$ или $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_s$.

Множество всех слов в алфавите A (включая пустое слово) обозначается A^*. Любое подмножество множества A^* называется *языком* в алфавите A, а совокупность правил, позволяющих установить принадлежность слова языку, — *грамматикой* этого языка. Иногда такую грамматику называют *распознающей*, в отличие от *порождающей* грамматики, позволяющей выписывать произвольные слова данного языка и только их. Обычно требуется, чтобы как порождение, так и распознавание (задача более трудная) осуществлялись *эффективно*, т. е. за конечное (и желательно — не слишком большое, соразмерное длине слова) число шагов.

Если слово ψ представлено в виде $\psi = \varphi\chi$, то слово φ называется ***началом***, а слово χ — ***концом*** слова ψ при данном представлении. Если слово ψ представлено в виде $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$, где χ_1 и χ_2 — произвольные (возможно, пустые) слова, то говорят, что слово φ ***входит*** в слово ψ, а само представление слова ψ в указанном виде называется ***вхождением*** слова φ в слово ψ. Вхождения $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$ ***различны***, если $\chi_1 \neq \chi_1'$.

Упражнение 1.1.4. Доказать, что если вхождения $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$ различны, то $|\chi_1| \neq |\chi_1'|$.

Упражнение 1.1.5. Если $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$, то либо слово χ_1 — начало слова χ_1', либо слово χ_1' — начало слова χ_1 (либо то и другое вместе).

Упражнение 1.1.6. Сколько существует различных вхождений пустого слова в слово длины n?

Из утверждения упражнения 1.1.4 следует, что для задания вхождения слова φ в слово ψ (если оно существует) достаточно указать место вхождения, например, номер первой буквы слова φ в слове ψ или длину предшествующего этой букве начала слова ψ.

Вхождение $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ называется ***более левым***, чем вхождение $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$, если $|\chi_1| < |\chi_1'|$. Вхождение φ в ψ называется ***самым левым***, если не существует другого, более левого, вхождения φ в ψ. Говорят, что вхождения $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$ слова φ в слово ψ ***пересекаются***, если $|\chi_1| \leq |\chi_1'| < |\chi_1| + |\varphi|$ или $|\chi_1'| \leq |\chi_1| < |\chi_1'| + |\varphi|$ (иначе говоря, если $\big||\chi_1'| - |\chi_1|\big| < |\varphi|$). Например, слово РОКОКО содержит два пересекающихся вхождения слова ОКО — одно с $\chi_1 =$ Р, $\chi_2 =$ КО, второе — с $\chi_1' =$ РОК, $\chi_2' = \lambda$.

Вхождением буквы a в слово ψ называется вхождение слова φ, состоящего из одной буквы a, в ψ.

Упражнение 1.1.7. Доказать, что никакие два различные вхождения буквы a в слово ψ не пересекаются.

1.1.3. Структура формальных теорий

Формальная теория определяется заданием четырех ее элементов: ***алфавита***, множества ***формул***, множества ***аксиом*** и совокупности ***правил вывода***. Мы начали описание формальной теории фразой, написанной на естественном языке. Нет ли здесь противоречия? Разумеется, нет. Теория — это аппарат, предназначенный, в частности, для использования человеком. Правила пользования этим аппаратом должны быть изложены на языке, хорошо понятном человеку. Такой язык называется ***метаязыком*** или ***языком метатеории*** по отношению к собственно теории. Метаязык и сам может быть формализован — люди, знакомые с описанием некоторых языков программирования, хорошо это знают. Но пока ограничимся простым русским языком, стараясь не прибегать к смысловым и лингвистическим изыскам и вывертам. О языке логических теорий речь пойдет в разд. 1.2, а сейчас изложим общие принципы действия аппарата.